ROZHLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 95 (2020) • ČÍSLO 1

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha

Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem TEX připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8 – Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: https://rozhledy.jcmf.cz/

Vytiskla Tiskárna Pohlline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.
Vídeňská 546/55, 639 63 Brno
tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz
web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343 MK ČR E4691

Matematická biologie: Populační modely, dynamika a chaos

Radek Erban, Mathematical Institute, University of Oxford

V časopisu s názvem Rozhledy matematicko-fyzikální by neměly chybět články o aplikacích matematiky. Už si zde zájemci mohli přečíst o lékařských testech [5], metodě Monte Carlo [3], statistice [4] a lineární optimalizaci [6]. Do této kategorie patří i tento článek o matematické biologii, který se souhlasem autora otiskujeme a který původně vyšel ve školním roce 2004/2005 jako 1. část seriálu 24. ročníku Matematického korespondenčního semináře [1].

1. Historie

Druhá polovina dvacátého století přinesla revoluci v našem poznání živých systémů, počínaje rozluštěním struktury DNA a lidským genomem konče. Vznikaly nové mezioborové vědecké disciplíny a v neposlední řadě došlo k postupnému pronikání matematiky do biologie a medicíny. V tomto článku si budeme povídat o tom, že biologie a matematika mohou najít společnou řeč, o oboru, který budeme nazývat matematická biologie.

Biologie je věda zabývající se studiem velice různorodých živých systémů. Abychom pochopili život, musíme znát strukturu a funkci jednotlivých molekul, které se vyskytují v tělech rostlin a živočichů. Na druhou stranu, biologové také zkoumají objekty mnohem větší – například jednotlivé buňky, orgány, organismy či v neposlední řadě celá společenstva organismů. Stručně řečeno, biolog může (na jedné straně) přejíždět stovky kilometrů při studiu populace medvědů na Aljašce, nebo se (na druhou stranu) pohybovat ve světě molekul, kde se typické vzdálenosti měří v nanometrech. K pochopení takto rozdílných světů je samozřejmě potřeba rozdílná matematika.

V následujícím textu se zaměříme na objekty velké – na chování celých populací organismů (např. baktérií, mravenců, medvědů, lidí) či skupin buněk (např. růst rakovinného nádoru).

Abychom mohli použít matematiku ke studiu živých objektů, musíme si nejprve ujasnit, s jakými problémy nám matematika může pomoci. Chceme-li studovat aljašské medvědy grizzly, otázek nás napadne spousta. Čím se medvěd živí? Jak rychle běhá? Proč v zimě spí? Kolik je medvědů na Aljašce? atd. Najít odpověď na podobné otázky vyžaduje spoustu pozorování, experimentů a studia biologické literatury. To samozřejmě platí i pro další biologické systémy – chceme-li přispět matematikou k pochopení biologie, musíme se nejprve naučit biologii! A i když se nakonec biologii naučíme, vystačíme mnohdy jen se slovní popisnou odpovědí. Například pozorováním zodpovíme naši poslední otázku větou, že na Aljašce žije přibližně 35 tisíc medvědů grizzly. Na druhou stranu, ptáme-li se, kolik bude medvědů na Aljašce za rok, za deset let nebo za sto let, pak s pouhým pozorováním nevystačíme a můžeme začít zapojovat své matematické myšlení. Podobné otázky o budoucnosti populace nemusíme klást jen pro populaci medvědů, ale pro jakoukoliv skupinu jedinců, zvířat či rostlin. Studujeme-li například rostoucí zhoubný nádor, zajímá nás, kolik buněk bude obsahovat v budoucnosti. Bojujeme-li s epidemií, zajímá nás vývoj počtu nakažených lidí. Pokusme se tedy zformulovat podobné otázky obecně matematicky.

Uvažujme, že charakteristická jednotka času pro naši populaci je jeden rok, a označme si počet jedinců dnes jako N_0, počet jedinců za rok jako N_1, počet jedinců za dva roky jako N_2, obecně počet jedinců za t let jako N_t. Předpokládejme pro jednoduchost, že na základě pozorování víme, že velikost populace v roce $t + 1$ můžeme vypočítat z velikosti populace v roce t podle vzorečku

$$N_{t+1} = f(N_t), \tag{1}$$

kde f je nějaká známá funkce. Rovnice typu (1) matematici nazývají *diferenční rovnice*. Chování populace je jednoznačně dáno rovnicí (1) a hodnotou N_0, kterou budeme nazývat *počáteční podmínka*.

Jako jednoduchý příklad rovnice (1) předpokládejme, že velikost populace v roce $t + 1$ je dvojnásobkem velikosti populace v roce t, pak (1) zní

$$N_{t+1} = 2N_t.$$

Budeme-li tedy v čase $t = 0$ mít sto jedinců (tzn. $N_0 = 100$), bude jich za rok $N_1 = 200$, za dva roky $N_2 = 400$, za tři roky $N_3 = 800$, za čtyři roky $N_4 = 1\,600$ atd. Obecně za t let bude populace obsahovat $N_t = 2^t \cdot 100$ jedinců, což si můžete sami dokázat matematickou indukcí. Jak vidíme z obecného vyjádření, roste počet jedinců s časem nade všechny meze. To ovšem v reálném problému nastat nemůže, neboť organismy mají omezený zdroj potravy, omezený prostor, ve kterém žijí, apod. Realističtější je předpokládat, že s rostoucím počtem jedinců klesá jejich rychlost množení. Příkladem může být diferenční rovnice

$$N_{t+1} = \left(2 - \frac{N_t}{500}\right) N_t. \tag{2}$$

Rovnice (2) je příkladem takzvané *logistické rovnice*. Pro malý počet jedinců N_t můžeme na chvíli zanedbat malé číslo $\frac{N_t}{500}$ a dostaneme, že chovaní populace je podobné jako chování dané dříve zkoumanou rovnicí $N_{t+1} = 2N_t$. Na druhou stranu, zvyšuje-li se počet N_t, snižuje se faktor $\left(2 - \frac{N_t}{500}\right)$ a tím dochází ke snižování růstu populace, což řeší problém s nerealistickým přemnožením populace. V neposlední řadě modely ve tvaru rovnice (2) byly i v nedávné době s úspěchem použity na modelování rozličných biologických systémů, například pro modelování růstu rakovinného nádoru (kde N_t označuje počet rakovinných buněk), či vývoje počtu obyvatel různých států. Podotkněme, že rovnice (2) nám dává obecně posloupnost reálných čísel N_t, a chceme-li finální výsledky interpretovat jako počty jedinců, musíme je zaokrouhlit. V každém případě čísla N_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$, musí být reálná nezáporná, to znamená, že $N_t \geq 0$ a $N_{t+1} = \left(2 - \frac{N_t}{500}\right) N_t \geq 0$. Řešením těchto dvou nerovnic dostaneme nutnou podmínku pro N_t ve tvaru $N_t \in \langle 0, 1000\rangle$.

Zajímá nás tedy chování *posloupnosti reálných čísel* daných rovnicí (2) při počáteční podmínce $N_0 \in \langle 0, 1000\rangle$. Jako první krok analýzy diferenčních rovnic ve tvaru (1) je užitečné spočítat si takzvané *pevné body*, které jsou definovány jako řešení rovnice $N = f(N)$ a mají následující interpretaci. Je-li N_0 rovno pevnému bodu, potom $N_0 = N_1 = N_2 = N_3 = \ldots$, tzn. že biologický systém má v každém čase t stejný počet $N_t = N_0$ jedinců. V případě modelu (2) jsou tedy pevné body dány řešením rovnice $N = \left(2 - \frac{N}{500}\right) N$. To je kvadratická rovnice, která má dvě řešení $N = 0$ a $N = 500$. To znamená, že pokud v čase $t = 0$ žilo $N_0 = 500$ jedinců, nebude se jejich počet měnit a dostaneme $N_t = 500$ pro libovolný čas t. Podobně, pokud na začátku nebyl žádný jedinec v systému ($N_0 = 0$), budeme mít $N_t = 0$ pro libovolné t. Tím jsme odhalili všechno zajímavé o modelu (2) pro speciální počáteční podmínky $N_0 = 0$ a $N_0 = 500$. Co však můžeme říci pro obecnou počáteční podmínku N_0 z intervalu (0,1000)?

Zvolme například $N_0 = 100$ a počítejme. S využitím rovnice (2) dostaneme (při zaokrouhlení na jedno desetinné místo) $N_1 = 180$, $N_2 = 295{,}2$, $N_3 = 416{,}1$, $N_4 = 485{,}9$, $N_5 = 499{,}6$, $N_6 = 500$, $N_7 = 500$, $N_8 = 500$

atd. Vidíme, že se hodnoty N_t s rostoucím časem přibližují k hodnotě 500, což je hodnota jednoho z pevných bodů. Ke stejnému výsledku vede i jakákoliv jiná počáteční podmínka z intervalu $(0, 1000)$, jak se můžete sami přesvědčit. Tímto pozorováním jsme jednak popsali dynamické chování modelu (2) pro všechny zajímavé počáteční podmínky, ale také jsme zjistili, že pevný bod 500 je mnohem významnější než pevný bod 0, neboť členy všech posloupností začínajících číslem $N_0 \in (0, 1000)$ jsou pro velká t prakticky rovné číslu 500. Naproti tomu jenom posloupnosti začínající čísly 0 a 1 000 vedou k druhému pevnému bodu 0. Poznamenejme, že posloupnosti začínající číslem mimo interval $\langle 0, 1000\rangle$ vedou k záporným číslům, nemají žádnou biologickou interpretaci a nemá smysl se jimi zabývat.

Na základě předcházejícího pozorování pro rovnici (2) zkusme vybudovat obecnou teorii pro rovnici (1). Rovnice (1) a počáteční podmínka N_0 nám definují nekonečnou posloupnost reálných čísel N_0, N_1, N_2, N_3, …, N_t, … Důležitým matematickým objektem, který se hodí ke studiu posloupností, je takzvaná limita posloupnosti. Intuitivně je *limita posloupnosti* číslem, ke kterému se blíží členy posloupnosti N_t pro velké časy, toto číslo se standardně označuje $\lim N_t$. Například jsme již dříve objevili, že pro libovolnou počáteční podmínku $N_0 \in (0, 1000)$ dostaneme pro posloupnost danou modelem (2) hodnotu $\lim N_t = 500$.[1)] Poznamenejme, že pro některé posloupnosti limita nemusí existovat.

Nyní již můžeme definovat, že pevný bod $\overline{N}$ rovnice (1) je *globálně stabilní*, pokud pro libovolnou počáteční podmínku N_0 existuje limita posloupnosti N_t a platí $\lim N_t = \overline{N}$. Naše definice v podstatě říká, že počet jedinců v populaci se s rostoucím časem blíží k pevnému bodu $\overline{N}$. Takový globálně stabilní pevný bod je bezesporu velmi významný, neboť v tomto jednom čísle je ukryto chování populace pro velké časy pro libovolnou počáteční podmínku. Na druhou stranu není příliš časté, aby takový globálně stabilní pevný bod existoval. Například v případě rovnice (2) není pevný bod 500 globálně stabilní, protože např. posloupnost začínající 0 se nikdy k číslu 500 nepřiblíží. V tomto případě je proto lepší definovat jen takzvanou lokální stabilitu pevného bodu, která požaduje, že $\lim N_t = \overline{N}$ platí jen pro počáteční podmínky N_0 z nějakého otevřeného intervalu obsahujícího zkoumaný pevný bod $\overline{N}$. Ve smyslu této definice má mo-

[1)] Pozn. redakce: Definici limity posloupnosti můžeme vyslovit takto: Číslo A se nazývá limita posloupnosti (a_n), pokud ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $|a_n - A| < \varepsilon$ (skoro všechny členy posloupnosti leží libovolně blízko A).

del (2) lokálně stabilní pevný bod rovný číslu $\overline{N} = 500$. Vskutku, pro jakoukoliv počáteční podmínku $N_0 \in (0, 1000)$ platí $\lim N_t = 500$. Na druhou stranu, pevný bod 0 rovnice (2) není stabilní, tudíž vidíme, že definice stability nám pomohla rozlišit významné a méně významné pevné body. Pochopení definice stability si můžete vyzkoušet v příkladu 2 [2], při jehož řešení si vystačíte s jednoduchou středoškolskou matematikou. V obecném případě se k vyšetřování stability pevných bodů hodí elementární znalost derivací. Pokud jste již o derivacích slyšeli, pak by pro vás neměl být problém dokázat stabilitu pevného bodu 500 v našem předcházejícím případě. Abychom nediskriminovali mladší řešitele, nebudeme v tomto seriálu derivace potřebovat.

Dynamika (rozuměj chování řešení) rovnic podobných rovnici (2) může být mnohem komplikovanější než dynamika, kterou jsme již viděli. Uvažujme například diferenční rovnici

$$N_{t+1} = R\left(1 - \frac{N_t}{1000}\right) N_t, \tag{3}$$

kde R je dané známé číslo. Zvolíme-li $R = 2$ v modelu (3), dostaneme model (2), jehož chování už známe. Zvolme proto $R = 3{,}2$ v modelu (3) a sledujme, jak se změní chování této diferenční rovnice. Zvolíme-li počáteční podmínku $N_0 = 500$, dostaneme $N_1 = 800$, $N_2 = 512$, $N_3 = 799{,}5$, $N_4 = 512{,}9$, $N_5 = 799{,}5$, $N_6 = 513{,}0$, $N_7 = 799{,}5$, $N_8 = 513{,}0$ atd. Vidíme, že řešení po čase osciluje mezi hodnotami 799,5 a 513,0. K takovému výsledku dojdeme pro libovolnou počáteční podmínku z intervalu $(0, 1000)$. Tím jsme zjistili, že rovnice (3) pro $R = 3{,}2$ nemá stabilní pevný bod (ona má dva nestabilní pevné body, které snadno najdete), ale má oscilující řešení s periodou délky 2. Taková řešení se dají pro libovolnou rovnici (1) odhalit jako řešení rovnice $N = f(f(N))$.

Dosadíme-li $R = 3{,}5$ do modelu (3), objevíme periodické řešení o délce 4, podobně, dosadíme-li $R = 3{,}55$ do modelu (3), objevíme periodické řešení o délce 8, jak se můžete sami přesvědčit. Dynamika daná modelem (3) začne být ještě překvapivější, když dosadíme čísla $R > 3{,}570$. Můžeme dostat jednak periodická řešení, ale také řešení zcela neperiodická. Například pro $R = 4$ a počáteční podmínku $N_0 = 50$ model (3) dává $N_1 = 190$, $N_2 = 615{,}6$, $N_3 = 946{,}5$, $N_4 = 202{,}4$, $N_5 = 645{,}7$, $N_6 = 915{,}1$, $N_7 = 310{,}8$ atd. Tím jsme objevili *deterministický chaos* – neperiodické omezené řešení dané jednoduchým vzorečkem, které velice citlivě záleží na počáteční podmínce N_0. Vraťme se ale k biologii.

Model (1) nám říká, že počet jedinců v čase $t+1$ je funkcí počtu jedinců v čase t. V některých případech může být takový model daleko od reality. Uvažujeme-li například populaci medvědů, pak model (1) má v sobě zakotven předpoklad, že populace 100 mláďat se bude vyvíjet úplně stejně jako populace 100 starých medvědů. To je samozřejmě velice zjednodušený předpoklad. Abychom dostali věrohodnější popis skutečnosti, je dobré studovat nejen počet jedinců v populaci, ale také věkové rozložení populace.

Abychom si zjednodušili použitou matematiku, bude nás zajímat jen počet samic v populaci. Navíc, abychom si ještě více zjednodušili použitou matematiku, budeme předpokládat, že se samice dožívají maximálně dvou let (jako cvičení si zkuste promyslet, jak se naše úvahy změní, pokud se samice dožívají třeba třiceti let). Budeme tedy rozlišovat samice s věkem do jednoho roku (nula-leté), jejichž počet v roce t budeme označovat N_t^0, a samice s věkem od jednoho do dvou let (jednoleté), jejichž počet v roce t budeme označovat N_t^1. Při dovršení dvou let samice umírá. Samice mají potomky v daném ročním období (například na jaře) a víme, že nula-leté samici se v průměru narodí 2 mladé samičky a jednoleté samici se v průměru narodí 4 mladé samičky. Pouze 75 % nula-letých samic přežije první rok života a všechny samice umírají s dovršením druhého roku života. Potom můžeme spočítat počet nula-letých a jednoletých samic v roce $t+1$ z počtu nula-letých a jednoletých samic v roce t podle vzorce

$$N_{t+1}^0 = 2N_t^0 + 4N_t^1, \quad N_{t+1}^1 = 0{,}75N_t^0. \tag{4}$$

Model (4) je příkladem takzvaného *Leslieho modelu.* V každém případě je vývoj populace jednoznačně dán rovnicí (4) a počáteční podmínkou – uspořádanou dvojicí (N_0^0, N_0^1). Rovnice (4) nám potom dává posloupnost uspořádaných dvojic (N_0^0, N_0^1), (N_1^0, N_1^1), (N_2^0, N_2^1), (N_3^0, N_3^1), …, (N_t^0, N_t^1), …

K tomu, abychom pochopili chování modelu (4), je dobré nejprve nalézt jisté speciální počáteční podmínky, které budeme nazývat vlastními vektory modelu (4) a definujeme je takto: Nenulová počáteční podmínka (N_0^0, N_0^1) je *vlastním vektorem*, pokud existuje reálné číslo λ takové, že $N_1^0 = \lambda N_0^0$ a $N_1^1 = \lambda N_0^1$. Číslo λ budeme pak nazývat *vlastním číslem.* Definice vlastního vektoru nám říká, že populace v následujícím roce je λ-násobkem roku předcházejícího. Je-li tedy populace v čase $t=0$ rovna vlastnímu vektoru modelu (4), pak počet jedinců v populaci v čase t můžeme jednoduše spočítat jako $N_t^0 = \lambda^t N_0^0$ a $N_t^1 = \lambda^t N_0^1$, jak si čtenář snadno dokáže matematickou indukcí. Využijeme-li tedy předcházející definice, pak všechny vlastní vektory a vlastní čísla modelu (4) splňují

$$\lambda N_0^0 = 2N_0^0 + 4N_0^1, \quad \lambda N_0^1 = 0{,}75 N_0^0,$$

což po malé úpravě dává

$$(2-\lambda)N_0^0 + 4N_0^1 = 0, \quad 0{,}75N_0^0 - \lambda N_0^1 = 0. \tag{5}$$

Uvažujeme-li nyní číslo λ jako parametr a čísla N_0^0 a N_0^1 jako souřadnice ve dvoudimenzionálním prostoru, potom dvě rovnice (5) popisují dvě přímky procházející bodem o souřadnicích $N_0^0 = 0$ a $N_0^1 = 0$. Uspořádaná dvojice $(N_0^0, N_0^1) = (0, 0)$ je samozřejmě vždy řešením rovnice (5). Přečteme-li si ovšem pozorně definici vlastního vektoru, zjistíme, že hledáme *nenulová* řešení soustavy (5). Taková nenulová řešení existují pouze v případě, když přímky dané oběma rovnicemi jsou totožné, jinými slovy, když první rovnice v soustavě (5) je násobkem druhé. Z tohoto pozorování vyplývá, že vlastní čísla λ splňují rovnici

$$\lambda(2-\lambda) + 0{,}75 \cdot 4 = 0.$$

To je kvadratická rovnice, která má dvě řešení $\lambda = 3$ a $\lambda = -1$. Tím jsme objevili, že model (4) má dvě vlastní čísla.

Uvažujme nyní vlastní číslo $\lambda = 3$ a spočítejme si příslušný vlastní vektor. Dosazením $\lambda = 3$ do (5) dostaneme jednu rovnici

$$-N_0^0 + 4N_0^1 = 0$$

pro dvě neznámé N_0^0 a N_0^1. Taková rovnice má samozřejmě nekonečně mnoho řešení, nám bude stačit jen jedno řešení, například $N_0^0 = 4$ a $N_0^1 = 1$. Tím jsme objevili vlastní vektor

$$(N_0^0, N_0^1) = (4, 1)$$

příslušející vlastnímu číslu $\lambda = 3$. Zkusme nyní použít uspořádanou dvojici $(N_0^0, N_0^1) = (4, 1)$ jako počáteční podmínku pro model (4). Dostaneme posloupnost uspořádaných dvojic $(N_1^0, N_1^1) = (12, 3) = (3 \cdot 4, 3)$, $(N_2^0, N_2^1) = (36, 9) = (3^2 \cdot 4, 3^2)$, $(N_3^0, N_3^1) = (108, 27) = (3^3 \cdot 4, 3^3)$ atd. Obecně tedy v roce t bude mít populace strukturu $N_t^0 = 3^t \cdot 4$ a $N_t^1 = 3^t$. Tím jsme ovšem našli vzoreček pro obecný člen posloupnosti dané modelem (4) pro speciální počáteční podmínku $(N_0^0, N_0^1) = (4, 1)$.

Podobně můžeme nalézt vlastní vektor pro vlastní číslo $\lambda = -1$. Dosazením $\lambda = -1$ do (5) dostaneme jednu rovnici

$$3N_0^0 + 4N_0^1 = 0$$

pro dvě neznámé N_0^0 a N_0^1, jejímž jedním řešením je například $N_0^0 = 4$ a $N_0^1 = -3$. Tím jsme objevili vlastní vektor

$$(N_0^0, N_0^1) = (4, -3)$$

příslušející vlastnímu číslu $\lambda = -1$. Mělo by nás samozřejmě ihned zarazit, že vlastní vektor obsahuje záporné číslo, proto vlastnímu vektoru $(4, -3)$ nemůžeme dát biologickou interpretaci. Na druhou stranu bude vlastní vektor $(4, -3)$ spolu s vlastním vektorem $(4, 1)$ užitečným pomocným prostředkem k pochopení chování modelu (4). K tomu bude velice užitečné rovněž následující pozorování. Uvažujme libovolné dvě reálné konstanty C_1 a C_2 a uvažujme počáteční podmínku danou součtem

$$(N_0^0, N_0^1) = C_1(4, 1) + C_2(4, -3),$$

což znamená $N_0^0 = C_1 \cdot 4 + C_2 \cdot 4$ a $N_0^1 = C_1 - C_2 \cdot 3$. Potom je počet nula-letých a jednoletých samic v čase t dán vztahem

$$(N_t^0, N_t^1) = C_1 3^t (4, 1) + C_2 (-1)^t (4, -3),$$

což znamená

$$N_t^0 = C_1 3^t \cdot 4 + C_2(-1)^t \cdot 4, \quad N_t^1 = C_1 3^t - C_2(-1)^t \cdot 3. \tag{6}$$

Vztah (6) získáme dosazením počáteční podmínky do (4), použitím vlastností vlastních vektorů $(4, 1)$ a $(4, -3)$ a využitím matematické indukce. S využitím vztahu (6) můžeme spočítat počet jedinců daných modelem (4) pro libovolný čas t a pro libovolnou počáteční podmínku (N_0^0, N_0^1).

Typická úloha může tedy znít takto: Uvažujme populaci obsahující 8 mladších samic a 22 starších samic, která se vyvíjí podle modelu (4). Kolik bude mladších a starších samic za sto let? V tomto případě je počáteční podmínka $(N_0^0, N_0^1) = (8, 22)$. Nejprve nalezneme takové konstanty C_1 a C_2, které splňují

$$(8, 22) = C_1(4, 1) + C_2(4, -3),$$

neboli budeme řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4C_1 + 4C_2 &= 8, \\ C_1 - 3C_2 &= 22. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic je $C_1 = 7$ a $C_2 = -5$. Využitím vzorce (6) proto dostaneme, že počet mladších samic v roce $t = 100$ je roven

$$N_{100}^0 = 7 \cdot 3^{100} \cdot 4 - 5 \cdot (-1)^{100} \cdot 4 = 28 \cdot 3^{100} - 20$$

a počet starších samic v roce $t = 100$ je roven

$$N_{100}^1 = 7 \cdot 3^{100} + 5 \cdot (-1)^{100} \cdot 3 = 7 \cdot 3^{100} + 15.$$

Sami si můžete dokázat, že poměr počtu mladších a starších samic pro velké t je přibližně roven 4 : 1, tzn.

$$\lim \frac{N_t^0}{N_t^1} = 4.$$

V předcházejících odstavcích jsme prezentovali metodu, jejíž pochopení si můžete otestovat v příkladu 1 [2] a která nám pro libovolnou počáteční podmínku a pro libovolný čas t dá jednoduchý výpočet počtu mladších samic N_t^0 a starších samic N_t^1. Jedna z věcí, která by nás měla zarazit, je, že počet jedinců roste s rostoucím časem nade všechny meze, což není příliš realistické. Se zvyšujícím se počtem organismů roste spotřeba živin, prostoru atd., což má v konečném důsledku za následek zpomalení růstu populace způsobené větší úmrtností, menší porodností apod. S problémem přemnožení populace jsme se již dříve setkali, když jsme zkoumali rovnici $N_{t+1} = 2N_t$. Tehdy jsme problém vyřešili uvažováním komplikovanějšího modelu (2), který obsahoval kvadratickou funkci. Úplně stejná myšlenka se dá uplatnit i zde. Zavedením vhodných komplikovanějších funkcí do modelu pak dostaneme omezená řešení, která se budou buď blížit k nějakému bodu, či budou oscilovat, nebo odhalíme opět deterministický chaos jako v případě rovnice (3).

Doposud jsme studovali modely ve tvaru (1) a model s věkově strukturovanou populací (4), všechny tyto modely zatím popisovaly jeden živočišný druh. Většinou ovšem spolu v přírodě žije mnoho různých druhů pohromadě, které spolu soupeří o potravu, o prostor, o přežití. Uvažujme například les, ve kterém žijí vlci a zajíci, a zjednodušme si situaci tím, že vlci žerou jenom zajíce a zajíci mají trávy vždycky dost. Pak si můžeme slovně popsat dynamiku tohoto systému takto: Pokud je v lese hodně zajíců, začnou se množit vlci, neboť mají dost potravy. Tím, že se začali množit vlci, začnou ubývat zajíci. Tím, že začali ubývat zajíci, nemají vlci co žrát a začne jejich počet klesat. Tím, že klesá počet vlků, začne zase přibývat zajíců, neboť je nemá kdo lovit. Tím, že je hodně zajíců, začne se opět po čase zvyšovat počet vlků atd. Shrnuto, počty zajíců a vlků budou patrně oscilovat. Samozřejmě, že bychom teď mohli po studiu relevantní biologické literatury napsat model pro takový ekosystém a jako správní matematikové bychom dokázali odhalit podobné oscilatorní chování. Na to již zde není místo, čtenář si může ovšem sám vyšetřit jednoduchý model chování soupeřících druhů v příkladu 3 [2]. Zde je dynamika mnohem jednodušší než v případě vlků a zajíců a k řešení příkladu 3 není potřeba nic víc, než co jsme si v dosavadním textu pověděli. Pokud byste nevěděli, jak si s příkladem 3 poradit, zvolte si nějakou počáteční podmínku, napište si několik prvních členů posloupností a ono vás už něco napadne.

Závěrem nutno podotknout, že jsme se v tomto článku dotkli rozdílných partií matematiky a jste-li zvídaví, můžete v tomto trendu pokračovat. Od diferenčních rovnic, pevných bodů a chaosu je jen krůček k rovnicím diferenciálním, od Leslieho modelu k maticím a lineární algebře. Věříme, že vás náš článek bude motivovat k dalšímu samostudiu.

Literatura

[1] Matematická biologie, seriál Matematického korespondenčního semináře 2004/2005, dostupné z: https://prase.cz/archive/archive.php.

[2] Matematická biologie, úlohy k seriálu Matematického korespondenčního semináře 2004/2005, dostupné z: https://prase.cz/archive/24/9.pdf.

[3] Dvořáková, Ľ.: Vyzkoušejte metodu Monte Carlo. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 94 (2019), č. 2, s. 1–11.

[4] Vencálek, J.: Příklad do hodiny věnované statistice. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 94 (2019), č. 3, s. 1–8.

[5] Vybíral, J.: Lékařské testy individuální a skupinové. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 94 (2019), č. 1, s. 10–22.

[6] Zahradník, P.: Lineární optimalizace. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 94 (2019), č. 4, s. 1–8.

Od korespondenčních seminářů přes Anglii do Maďarska

Aranka Hrušková

Aranka Hrušková otevírá svým příběhem sérii medailonků zaměřenou na mladé vědce a vědkyně se zajímavou zkušeností. Po absolvování pražského gymnázia vystudovala Univerzitu v Cambridgi a nyní se v rámci doktorského studia v Budapešti věnuje nově vznikajícím odvětvím kombinatoriky.

Nedávno mě mile překvapil e-mail od mojí někdejší školitelky Ľubomíry Dvořákové s prosbou o napsání článku (dle jejích slov medailonku) pro Rozhledy, jehož přitažlivost pro středoškoláky se zájmem o matematiku by tkvěla z velké části v tom, že by byl psán někým sice zkušenějším, přesto ale stále věkově blízkým. Vzhledem k mému blížícímu se čtvrtstoletí je tohle patrně naposled, co se na mě někdo podobně obrací, takže jsem na chvíli zanechala frustrujícího bilancování běžícího bez povelu kdesi v polovědomí a obrátila jsem se ke klávesnici, abych se pro vás pokusila vše pojmout uceleně. Zde tedy máte jeden z mnoha příkladů, jak se může vyvíjet cesta člověka zaujatého matematikou.

Matematika mě bavila a šla mi jak na základní škole, tak už před ní. Když mě maminka vodila na odpolední kroužky, často jsem po ní chtěla, aby mi cestou dávala úlohy. Většinou jsem je rychle vyřešila, ale vzpomínám si, že jedna mi zamotala hlavu.

„Ve spíži je chleba. Každou noc přijdou myši a snědí půlku z toho, co z chleba zbývá. Za jak dlouho snědí celý chleba?“

Pochopila jsem tehdy bez delšího vysvětlování, že chleba nebude snězen nikdy, ale nesetkavši se dříve s podobným jevem, zůstala jsem docela ohromena.

O několik let později jsem složila přijímací zkoušky na Gymnázium Christiana Dopplera [1], do třídy se zaměřením na matematiku. Následujících osm roků jsem téměř den co den docházela do zelené neoklasicistní budovy (která ovšem bohužel při nedávné opravě pozbyla svou ikonickou barvu), kde jsme byli vystaveni nadprůměrné dávce vyučovacích hodin matematiky a fyziky. Matematická olympiáda, Pythagoriáda, Matematický klokan a další podobné soutěže byly nedílnou součástí výuky. Nikdo se nás neptal, zda se jich účastnit chceme nebo nechceme – domácí kola (pakliže nějaká byla) jsme úměrně jejich názvu dostali za domácí úkol a u kol následujících nám jednoduše bylo sděleno, kdy se budou konat, a účastnili se všichni. Poslední zmíněný rys zní na první poslech patrně dobře, ale obávám se, že v mém konkrétním případě měl i jeden nedobrý dopad, totiž že jsem téměř až do maturity nepochopila, že Matematická olympiáda je něco, na co se žáci, které zajímá, důkladně mimoškolně připravují nejen řešením minulých ročníků soutěže, ale i studiem látky, která se ve škole běžně neprobírá. Než jsem si to uvědomila, měli již moji vrstevníci, kteří brali MO vážně, značný náskok v olympiádové zběhlosti, a tak jsem se sice podívala do národního kola, ale na IMO (International Mathematical Olympiad) bohužel už ne.

Život středoškoláka ale skýtá mnohem víc zajímavých matematických příležitostí než jenom Matematickou olympiádu a Matematického klokana. Jednou z rozsáhlejších kapitol (a co vím, také českým a slovenským specifikem) jsou korespondenční semináře, zpravidla pořádané vysokoškolskými studenty. Pikomat a PraSe [2] jsou patrně nejznámějšími zástupci této kategorie, ale zdaleka to u nich nekončí. Pokud snad někdo z vás není s korespondenčními semináři obeznámen, je na čase tento stav změnit! Každý seminář několikrát ročně zveřejní sadu úloh, jejichž řešení žáci pošlou na adresu semináře (za mých mladých let se jednalo o adresu poštovní, ale dnes je vždy k dispozici i e-mailová). Po každém kole se obnoví průběžná tabulka řešitelů a zbytek už je na každém semináři. Například PraSe a M&M pořádají pro nejúspěšnější řešitele soustředění, ze kterých si účastníci krom matematických znalostí odvážejí nová přátelství a vzpomínky na hry v lese. Já sama jsem se účastnila jak PraSete, tak M&M a mohu je jen a jen doporučit, ale bylo by chybou nezmínit i BRKOS, FYKOS a KSP. Pralinka byla bohužel v roce 2015 pozastavena, ale stále můžete zabrousit přinejmenším na související stránky České lingvistické olympiády.

Vedle dlouhodobějších záležitostí, jejichž jsou korespondenční semináře příkladem, tu je i řada jednorázovek. Během jedné takové, Týdne vědy na Jaderce [3] pořádaného Českým vysokým učením technickým v Praze, jsem se seznámila s Ing. Ľubkou Dvořákovou (tehdy Balkovou), jež vedla miniprojekt, který jsem si v rámci Týdne vědy vybrala. Miniprojekt se zabýval Ramseyovou teorií, které jsem se posléze věnovala do větší hloubky během magisterského studia. Ing. Balková nám, Ramseyově skupince, tehdy nabídla, že pokud bychom měli zájem s ní spolupracovat dlouhodoběji a například vytvořit práci do přehlídky SOČ

(Středoškolská odborná činnost), je takové možnosti více než otevřená. Příležitost to byla lákavá, a tak jsem bez otálení odvětila, že bych zájem měla. Ľubka pak přišla s nápadem zabývat se řetězovými zlomky iracionálních algebraických čísel, o kterých je známo, že jsou posléze periodické (o tom, zda je slovo ‚posléze‘ v tomto popisu skutečně nutné, jsme vedly víc než jednu rozpravu). Zaměřily jsme se především na iracionální řešení kvadratických rovnic, pro která má dotyčná perioda dokonce palindromickou strukturu. Dokázala jsem několik pěkných pozorování týkajících se tvaru těchto period, která jsme posléze shrnuly v článku pro časopis Acta Mathematica, a s dotyčnými výsledky jsem se zúčastnila soutěží SOČ a AMAVET. Národní kolo AMAVETu jsem tehdy taky vyhrála (ze SOČ jsem radši odstoupila, abych omylem neporušila pravidla o účasti v několika soutěžích), a tak mě těsně před maturitou čekala cesta do Los Angeles na soutěž Intel International Science and Engineering Fair (musela jsem kvůli ní odmítnout účast na mezinárodní filosofické olympiádě, za což jsem byla potrestaná nejen svou lítostí, ale o několik let později taky zlodějem, který mi ve vlaku ukradl čtečku, jež byla cenou za první místo v odpovídající národní olympiádě Nebojme se myslet [4]).

Ve druhé polovině gymnázia jsem přirozeně pozvolna začala přemýšlet, kam na vysokou školu. Snad když mi bylo zhruba čtrnáct, máma poprvé navrhla, že bych mohla jít studovat do zahraničí. Když tenhle nápad poprvé nahlas vyslovila, zcela jsem ho odmítla, vůbec se mi nezamlouval a dlouho o něm nebyla znovu řeč. Časem mi ale přestal připadat tak nelibý a poslední kapkou ke změně názoru bylo patrně, když jsem v šestnácti poznala jednoho oktavána, který se právě chystal nastoupit ke studiu fyziky a filosofie v Oxfordu a vypadal zcela nadšeně a bezstarostně. Ještě před Intel ISEFem byl mojí první velkou samostatnou zahraniční zkušeností Stanford University Mathematics Camp (SUMaC) [5], kterého jsem se zúčastnila, když mi bylo sedmnáct. Tenhle netradiční letní tábor jedné z nejlepších amerických vysokých škol trval téměř měsíc, během kterého jsme měli od pondělí do pátku přednášky a o víkendech jezdili na výlety. Spolu s jedním hochem ze Švýcarska jsme tam byli jediní Evropani a nevýhodou bylo jen to, že jsem se kvůli SUMaCu musela vzdát jednoho ročníku svého oblíbeného letního tábora Palučinské šachové školy, kde mi bylo ten rok nabídnuto dělat instruktorku (ne že bych byla tak dobrá šachistka, ale učit nejmenší děti šachový zápis přeci jen zvládnu a někdo na nešachové činnosti je taky potřeba). Přijímací zkouškou na SUMaC bylo několik úloh ne zcela nepodobných těm, které můžete potkat v našich korespondenčních seminářích či Matematické olympiádě. Pokud jste na čtyřleté střední škole nebo ve vyšší části osmiletého gymnázia, rozhodně doporučuji nad SUMaCem či podobnou letní školou vážně popřemýšlet. Nejen že vám v mnoha ohledech rozšíří obzory, ale budete mít taky možnost požádat jeho pořadatele o doporučení, až se budete v budoucnu hlásit třeba do nějakého zvláštního stipendijního programu. Jak už bývá v Americe zvykem, kladné stránky letních táborů jsou doprovázeny vysokým školným, ale nenechte se odradit! Často můžete zažádat o stipendium, jehož šťastnou příjemkyní jsem byla na SUMaCu například i já. Pokud se vám ale do zahraničí nechce, můžete navštívit jeden z řady místních táborů – třeba MFF UK pořádá čtrnáctidenní Soustředění mladých fyziků a matematiků [6], kde vás pro všechny různé hry doslova ani nenechají vyspat.

Obr. 1: Prozkoumávání stanfordského kampusu, léto 2012

Jak jsem se tedy blížila k oktávě, zvažovala jsem víc a víc, kam na vysokou školu. Více méně jsem si přála jít na univerzitu s nejlepší výukou matematiky na světě. Ale která by to tak byla? To je otázka s nejasnou odpovědí závisející na mnoha okolnostech, ale pro sebe jsem se rozhodla, že to je Univerzita v Cambridgi. Nevýhodou amerických vysokých škol z mého pohledu bylo to, že v důsledku způsobu vedení amerických škol středních se student na univerzitě nemůže plně specializovat na svůj vybraný obor (kde oborem myslím pojem tak široký jako matematika). Přesto jsem se krom Univerzity v Cambridgi přihlásila i na Harvard, Princeton, MIT a Univerzitu Karlovu, protože jsem se samozřejmě nemohla spolehnout, že mě v Cambridge přijmou. Pokud si lámete hlavu, kam se v tomhle povídání poděl Oxford, tak vězte, že v jednom školním roce se k bakalářskému studiu nelze hlásit jak do Cambridge, tak do Oxfordu. V septimě jsem se byla v Cambridge podívat na dni otevřených dveří (dnes se českým a slovenským středoškolákům kromě této možnosti nabízí taky program Experience Cambridge [7] pořádaný Českou a slovenskou společností), během kterého jsem poprvé navštívila kolej Peterhouse. Každý student jak v Oxfordu, tak v Cambridge je kromě univerzity také součástí nějaké koleje, které si můžeme zjednodušeně představit zhruba jako bradavické koleje ve světě Harryho Pottera. Přihláška k bakalářskému studiu do Cambridge se potom nepodává univerzitě, ale přímo koleji dle vašeho výběru. Samozřejmě se může stát, že v některém roce má určitá kolej mnohem více dobrých uchazečů, než může přijmout, zatímco jiná se nachází v opačné situaci. V tom případě se dotyčné koleje domluví a část uchazečů si předají v rámci postupu zvaného ‚pooling‘ .

Obr. 2: Maturitní tablo Gymnázia Christiana Dopplera, 2014

Na začátku oktávy (uzávěrka oxbridgeských přihlášek je 15. 10.) jsem se tedy přihlásila do koleje Peterhouse, která ve mně během dne otevřených dveří zanechala dobrý dojem. Možnosti ostatních kolejí jsem prozkoumala po hříchu málo, ale měla jsem štěstí, protože viděno zpětně, Peterhouse skutečně byl jednou z nejlepších kolejí, kterou jsem si mohla vybrat. V prosinci jsem letěla do Anglie na přijímací pohovor, který byl sám o sobě poměrně zábavnou záležitostí. Zkoušející vám zadávají příklady, z nichž počáteční jsou velice jednoduché, ale jak pohovor pokračuje, obtížnost úloh strmě stoupá. Cílem je dorazit na hranici vašich současných schopností a pozorovat, jak přemýšlíte o problému, s jehož druhem jste se doposud nesetkali. Zadávající učitelé se vám pak snaží napovědět a pozorují, jestli jste schopni jejich nápověd využít. Na základě pohovoru jsem pak v lednu byla podmínečně přijata ke studiu matematiky. Slova podmínečně se nelekejte – v Británii téměř všechna přijetí závisejí na výsledcích různých zkoušek atp. Po mně se chtěla slušná maturita a složit zkoušku jménem Sixth Term Examination Paper (STEP). Podmínky jsem naštěstí splnila a v září jsem pak i získala stipendium Nadace Zdeňka Bakaly, takže jsem mohla směle vyrazit přes Lamanšský průliv.

V Anglii jsem strávila celkem čtyři roky. Základní bakalářské studium trvá stejně jako u nás tři roky (na rozdíl od Ameriky, kde to jsou roky čtyři), ale cambridgeskou zvláštností je, že pokud student na konci třetího ročníku napíše zkoušky dostatečně dobře, může si vybrat nepromovat a návazně pokračovat do jednoletého magisterského studia jménem Part III (pokud vám ta přirozená čísla v názvech ročníků jaksi nevycházejí, tak je to proto, že prvák se jmenuje IA, druhák IB a třeťák II). Tohle ‚dostatečně dobře‘ není úplně stoprocentní záležitost, a tak jsem si pro jistotu podala přihlášku do Švýcarska na ETH, ale naštěstí se mi do čtvrťáku probojovat podařilo, a tak jsem si celou rodinu přivezla až na promoci magisterskou (Peterhouse rozdává pět lístků na studenta, ale mému pákistánskému kamarádovi bohužel nepřijel nikdo, takže mi všech svých pět dal).

Mezi začátkem prváku a promocí se toho ale samozřejmě událo víc než dost. Školní rok se v Anglii nedělí na dva semestry, ale tři trimestry. Tyto jsou v Cambridge poměrně krátké (osm týdnů) a velice intenzivní. Matematici mají navíc přednášky nejen od pondělí do pátku, ale i v sobotu. Zkoušky jsou naopak jen jednou ročně a nelze je opakovat, což na studenty vytváří skutečně silný tlak. S koncem poslední zkoušky (která se většinou odehraje na začátku června) pak přirozeně ihned začne období zasloužených bujarých zahradních slavností a dalších radovánek dle osobního gusta. A dlouhé prázdniny! Tak dlouhé, že většina studentů je nenechá prázdnými a naplánuje si třeba cestu kolem světa (na kterou koleje často neváhají přispět) nebo častěji nějakou stáž. Já jsem se například po ukončení druhého ročníku vypravila do Massachusetts na letní školu pořádanou společností Wolfram Research, která stojí za softwary Mathematica a Wolfram Alpha [8]. Každý účastník si po konzultaci se Stephenem Wolframem, zakladatelem společnosti, vybral téma, které pak zpracovával za pomoci zmíněných softwarů. Dotyčná letní škola sice nevyžadovala účastnický poplatek, ale další rok jsem si přeci jen polepšila, když jsem naopak pro Wolfram Research pracovala, a to v malé anglické pobočce v hrabství Oxfordshire vedené Stephenovým bratrem. Můj přímý nadřízený, kterého jsem nikdy osobně nepotkala, seděl v hlavním středisku v Illinois a společně jsme se věnovali tomu, aby Mathematica co nejlépe integrovala.

O tom, že bych po magisterském studiu pokračovala jinak než doktorátem, jsem téměř neuvažovala. Co se zaměření týče, zajímala mě kombinatorika a především její možná propojení s algebrou a analýzou. Zásadní otázkou tedy zůstávalo, kam se na doktorát vypravit. V Anglii už se mi moc zůstávat nechtělo, rozhodně ne v Cambridge. Ne že by se mi tam snad nebylo líbilo! Ale v porovnání s Prahou je to přeci jen malé městečko, což má sice své výhody, nicméně po čtyřech letech už mi tam bylo trochu těsno. Kromě toho nikdo z mých starších cambridgeských přátel, kteří šli po čtyřech letech na doktorát jinam, svého rozhodnutí nelitoval. Každá výzkumná instituce poskytuje trochu jiný náhled, zdůrazňuje jiné stránky badatelského života a jiné podobory a je navýsost zdravé si vyzkoušet více než jeden přístup. Amerika taky nebyla mou vysněnou destinací, ale přesto jsem si nechtěla zavřít dveře, a tak jsem si před začátkem čtvrťáku napsala standardizovaný test GRE (Graduate Record Examination), což je požadavkem mnoha zaoceánských univerzit. Spojené státy jsou vůbec rájem standardizovaných testů – kvůli přihláškám do amerických bakalářských programů jsem zase nejednou jela do pražských Nebušic, kde člověk může vyplňovat taková potěšení jako SAT a ACT. Tyhle zkoušky, ve kterých student jednoduše kroužkuje jednu z uvedených možností, jsou postaveny na jeho závodu s časem, což je disciplína, ve které úplně nevynikám, takže jsem ráda, že už mám podobné testy za sebou.

Při přemýšlení o evropském doktorátu mimo Anglii mi znovu přišel na mysl Zürich a ETH, kde je profesorem Benny Sudakov, jeden z nejlepších současných kombinatoriků. V říjnu, krátce po začátku prvního trimestru magisterského studia, jsem mu napsala e-mail, zda přijímá doktorandy a jestli na ně má nějaké zvláštní požadavky. Neobvyklou odpovědí mi bylo, že po uchazečích chce, aby vyřešili všechny úlohy z prvních devíti kapitol knihy The Probabilistic Method od Nogy Alona a Joela Spencera. Věnovat se tomuto úkolu vedle velice intenzivního magisterského studia nebylo jednoduché, ale dělala jsem, co jsem mohla. V prosinci jsem se pak s Bennym Sudakovem potkala v Londýně, kde přednášel v rámci matematického semináře Londýnské školy ekonomie (LSE).

Dalším přirozeným místem pro zájemce o kombinatoriku je její kolébka, Maďarsko. Po konci prvního trimestru jsem se tedy vypravila na návštěvu do Budapešti, kde jsem se šla podívat na seminář pro změnu na Univerzitu Loránda Eötvöse (ELTE). Cesta to nebyla snadná, protože v Anglii se udál div světa a napadlo půl centimetru sněhu, kvůli čemuž byla zrušena velká část letů včetně toho mého. Dalo dost zabrat vzniklý chaos pořešit, ale nakonec jsem si zvládla koupit letenku na ten samý den (byť z jiného letiště) do Prahy, odkud jsem pak prvním ranním vlakem vyrazila do Budapešti a seminář zázračně stihla. Během maďarské návštěvy se ukázalo, že ELTE není jedinou budapešťskou univerzitou, kam dává smysl se hlásit na doktorát. Několik matematiků, se kterými jsem se v Budapešti potkala, mi doporučilo soukromou Středoevropskou univerzitu (CEU), jednou z jejíchž výhod oproti ELTE bylo značně vyšší stipendium. Matematická katedra Středoevropské univerzity je maličkým ostrůvkem v moři společenských věd, jehož fungování bylo postaveno na úzké spolupráci s Matematickým ústavem Alfréda Rényiho Maďarské akademie věd. A tenhle ústav je i místem, kde jsem nakonec zakotvila a odkud pro vás píši tyto řádky. Změnou ovšem je, že již nespadá pod Maďarskou akademii věd, protože ministerský předseda Viktor Orbán rozhodl, že všech patnáct zastřešujících výzkumných institucí (tj. deset výzkumných středisek a pět samostatných ústavů) se více méně přesune pod vládní kontrolu. Ještě než prosadil tuhle změnu, zvládl učinit Středoevropskou univerzitu nezákonnou a tato je nyní z tohoto důvodu v půlce postupného stěhování do Vídně, které taky způsobilo pozastavení přijímání nových studentů na moji katedru.

Dobrou zprávou ale je, že kvalitní matematika nám v Budapešti zůstává. Předseda Maďarské akademie věd László Lovász ve spolupráci s Jaroslavem Nešetřilem před rokem získali významný evropský grant na zkoumání velkých grafů (nebo jak by řekl jejich třetí spolupracovník Albert-László Barabási, velkých sítí). Lovász společně s o generaci mladším matematikem Balázsem Szegedym popsali limity hustých grafových posloupností (kde pod pojmem hustá posloupnost $(G_n)_n$ rozumíme, že $\liminf_{n\to\infty} e(G_n)/v(G_n)^2 > 0$) jako souměrné měřitelné funkce $W\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, které pojmenovali grafony. Na druhé straně pro posloupnosti grafů se stejnoměrně omezeným maximálním stupněm existuje konvergence nazývaná místní nebo taky Benjaminiho–Schrammova. Ovšem třeba taková posloupnost nadkrychlí (tzn. $(Q_n)_n$, kde $V(Q_n) = \{0,1\}^n$ a vrcholy spolu sousedí právě tehdy, pokud se liší přesně v jedné souřadnici) nespadá ani do jedné z výše uvedených skupin. Ukazuje se, že sítě, ve kterých je počet hran superlineární, ale subkvadratickou funkcí počtu vrcholů, se kolem nás vyskytují v hojné míře a Budapešť je právě teď skvělým místem, kde se jim věnovat.

Přestože jsem se nyní usadila v Maďarsku, do Británie se stále občas vracím. Po dosažení cambridgeského magisterského vzdělání se mi otevřela možnost velice dobře placené letní brigády v podobě opravování zmíněné přijímací zkoušky STEP, kterou jsem sama před lety musela projít. Společně s kamarádem Michalem jsme taky v Anglii rozjeli další z dnes již mnoha míst konání naší oblíbené soutěže Náboj [9] pro pětičlenná družstva středoškoláků. Přihlaste se taky, je to fakt sranda!

Aranka Hrušková
je doktorandkou na Středoevropské univerzitě a v Matematickém ústavu Alfréda Rényiho o jejích dalších příbězích si můžete přečíst na `arancin-blok.cz`.

Literatura

[1] https://gchd.cz
[2] http://mks.mff.cuni.cz
[3] http://tydenvedy.fjfi.cvut.cz
[4] http://nebojmesemyslet.upol.cz
[5] http://sumac.stanford.edu
[6] https://kdf.mff.cuni.cz/tabor/
[7] http://cucss.uk/experience-cambridge-en
[8] https://www.wolframalpha.com
[9] https://naboj.org

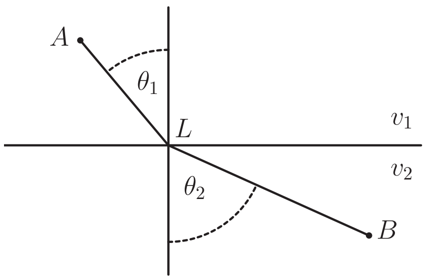
Geometrické řešení problému brachistochrony

Vojtěch Kloud, První soukromé jazykové gymnázium v Hradci Králové

Abstrakt. Tento článek je věnován čistě geometrickému nalezení křivky brachistochrony. Brachistochrona je křivka, po které se hmotný bod dostane z počátečního bodu do bodu konečného v nejkratším čase za působení pouze homogenního gravitačního pole. Ukážeme, že řešením tohoto problému je cykloida; křivka vykreslená pevně daným bodem na obvodu kružnice, která se valí po přímce. Za pomoci Fermatova principu a Ptolemaiovy nerovnosti ukážeme platnost Snellova zákona, kterého poté využijeme k řešení problému brachistochrony.

1. Snellův zákon a Ptolemaiova nerovnost

Klíčem k ryze geometrickému řešení problému brachistochrony je Snellův zákon (Willebrord Snellius, 1591–1626). Ten popisuje, jak se láme světlo při přechodu z jednoho prostředí do druhého, například ze vzduchu do vody.



Obr. 1: Snellův zákon

Označíme-li rychlost světla v horním prostředí jako v_1 a rychlost světla v prostředí dolním jako v_2, pak Snellův zákon říká, že platí:

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}. \tag{1}$$

Platnost zákona lze odvodit z přesného pozorování a měření, jehož výsledky by vždy splňovaly právě podmínku (1). Zákon jako takový nemůžeme dokázat, můžeme ho pouze potvrdit tím, že ukážeme, jak je možné ho odvodit z jiného, řekněme jednoduššího, zákona. Snellův zákon lze odvodit z Huygensova principu nebo Maxwellových rovnic. V tomto článku se ale zaměříme na odvození zákona pomocí Fermatova principu (Pierre de Fermat, 1607–1665), který tvrdí, že světlo se šíří mezi dvěma body tak, aby doba šíření byla co nejkratší [5].

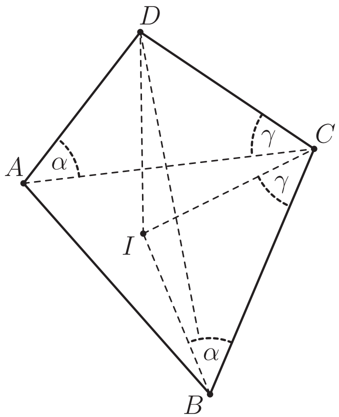
Ukážeme tedy, že pokud platí Fermatův princip, pak nutně platí i Snellův zákon. K důkazu využijeme následující větu z geometrie:

Věta 1 (Ptolemaiova nerovnost)**.** *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník. Pak*

$$|AB| \cdot |CD| + |DA| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|, \tag{2}$$

kde rovnost nastává, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový (vepsaný kružnici) [2].

Důkaz. Nejprve určeme bod I takový, že $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CBI|$ a zároveň $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle ICB|$.



Obr. 2: Ptolemaiova (ne)rovnost

Dostáváme tak dva podobné trojúhelníky $\triangle ACD \sim \triangle BCI$, které splňují

$$\frac{|CD|}{|CI|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DA|}{|BI|}.$$

Odsud dostáváme

$$|DA| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BI|. \tag{3}$$

Protože $|\sphericalangle DCI| = |\sphericalangle ACB|$ a

$$\frac{|BC|}{|CI|} = \frac{|AC|}{|CD|},$$

pak jsou si podobné i trojúhelníky $\triangle ICD \sim \triangle BCA$, což znamená, že

$$\frac{|BC|}{|CI|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|DI|},$$

odkud dostáváme

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |DI|. \tag{4}$$

Sečtením (3) a (4) dostáváme

$$|AB| \cdot |CD| + |DA| \cdot |BC| = |AC|(|BI| + |DI|),$$

což po použití trojúhelníkové nerovnosti $|BI|+|DI| \geq |BD|$ dá hledanou nerovnost

$$|AB| \cdot |CD| + |DA| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

Pro tětivový čtyřúhelník pak podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí, že: $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CBD|$. Tedy bod I leží na úsečce BD a $|BI| + |DI| = |BD|$. Pro takový čtyřúhelník dostáváme Ptolemaiovu rovnost

$$|AB| \cdot |CD| + |DA| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|. \tag{5}$$

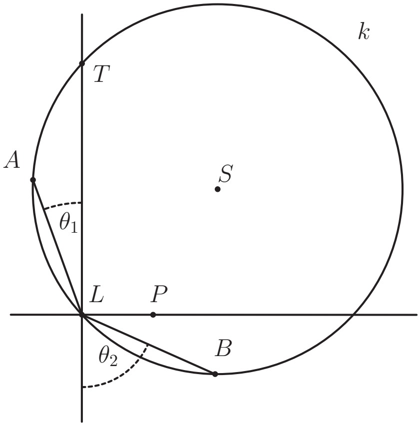
Důkaz implikace druhým směrem ponechávám jako případné cvičení čtenáři. Fakt, že pro čtyřúhelník $ABCD$ rovnost (5) implikuje tětivový čtyřúhelník dále v článku nevyužijeme. □

Následující důkaz Snellova zákona na základě Fermatova principu a Ptolemaiovy nerovnosti je převzat z knihy [6]. Ze vzorce $t = \frac{s}{v}$ určíme podle obr. 1 čas, za který se paprsek světla dostane z bodu A do bodu B:

$$\frac{|AL|}{v_1} + \frac{|LB|}{v_2}. \tag{6}$$

Paprsek procházející na rozhraní prostředí bodem L splňuje Snellův zákon (1). Ukážeme, že pro všechny ostatní body P na rozhraní platí:

$$\frac{|AL|}{v_1} + \frac{|LB|}{v_2} < \frac{|AP|}{v_1} + \frac{|PB|}{v_2}.$$



Obr. 3: Odvození Snellova zákona z Fermatova principu

Sestrojme kružnici k se středem v S, která prochází body A, L, B (zdůrazněme, že tyto body nejsou kolineární). Tato kružnice protíná normálu k rozhraní v bodě T.

Podle věty o obvodovém a středovém úhlu je $|\sphericalangle TSA| = 2\theta_1$. Pokud tedy označíme poloměr kružnice k jako r, pak $|TA| = 2r\sin\theta_1$. Dále je $|\sphericalangle BLT| = 180° - \theta_2$, odkud vyplývá, že $|\sphericalangle TSB| = 2\theta_2$. Obdobně pak $|BT| = 2r\sin\theta_2$. Podle našeho předpokladu pak dostáváme

$$\frac{|TA|}{|BT|} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Pro nějaké $\lambda > 0$ pak máme

$$\begin{aligned} |TA| &= \lambda \cdot v_1, \\ |BT| &= \lambda \cdot v_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Pro čtyřúhelníky $ALBT$ a $APBT$ na obr. 3 máme podle podle Ptolemaiových vztahů (5) a (2):

$$\begin{aligned} |TA| \cdot |LB| + |AL| \cdot |BT| &= |AB| \cdot |TL|, \\ |TA| \cdot |PB| + |AP| \cdot |BT| &\geq |AB| \cdot |PT|. \end{aligned}$$

z kterých lze získat za použití nerovnosti $|TL| < |PT|$ následující nerovnost:

$$|TA| \cdot |PB| + |AP| \cdot |BT| > |TA| \cdot |LB| + |AL| \cdot |BT|.$$

Provedeme-li substituci z (7) a vydělíme obě strany výrazem $\lambda v_1 v_2$, pak dostaneme právě hledanou nerovnost

$$\frac{|AP|}{v_1} + \frac{|PB|}{v_2} > \frac{|AL|}{v_1} + \frac{|LB|}{v_2}.$$

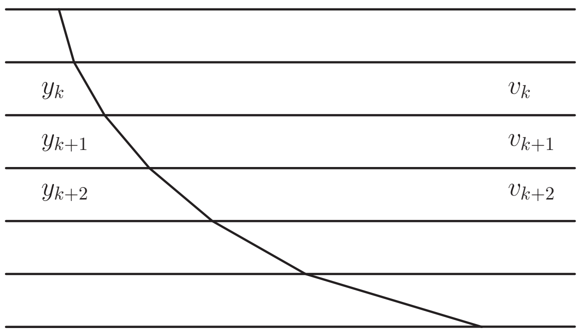
Je-li tedy P různé od bodu L, pak čas není minimalizován. Podle Fermatova principu se tedy světlo šíří z bodu A do bodu B přes L, kde je splněn Snellův zákon (1).

2. Problém brachistochrony

Brachistochrona je křivka, po které se hmotný bod dostane z počátečního bodu do bodu konečného v nejkratším čase za působení pouze homogenního gravitačního pole.

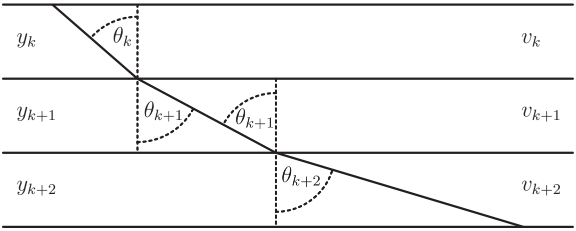
V této sekci uvedeme řešení Johanna Bernoulliho (1667–1748), které vychází právě z Fermatova principu, resp. ze Snellova zákona. Bernoulliho hlavní myšlenkou bylo udělat z tohoto spojitého problému se spojitým pádem problém diskrétní. Dále uvažoval, jakou cestu by si vybralo světlo [3].

Rovinu rozdělme na tenké vrstvy, ve kterých uvažujeme konstantní rychlost, která závisí na výšce. Při přechodu zpět na spojitý případ si tuto závislost vyjádříme tak, aby reprezentovala pád hmotného bodu rovinou.



Obr. 4: Diskrétní přístup

Světlo si vybere cestu nejkratšího času, tedy ve všech přechodech platí Snellův zákon.

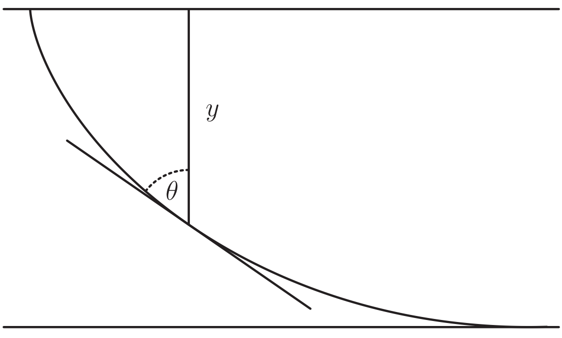


Obr. 5: Snellův zákon v brachistochroně

$$\frac{\sin\theta_k}{v_k} = \frac{\sin\theta_{k+1}}{v_{k+1}} = \frac{\sin\theta_{k+2}}{v_{k+2}} = \cdots = \ell \text{ pro všechna } k.$$

Při přechodu zpět na spojitý problém máme tedy podle značení na obr. 6 $\sin\theta/v = \ell$. Protože počáteční rychlost hmotného bodu je nulová, máme $v = \sqrt{2gy}$, což vyplývá z platnosti $y = \frac{1}{2}gt^2$a $v = gt$ při volném pádu. Označením $C_1 = \ell\sqrt{2g}$ dostáváme nutnou podmínku pro křivku nejrychlejšího spádu:

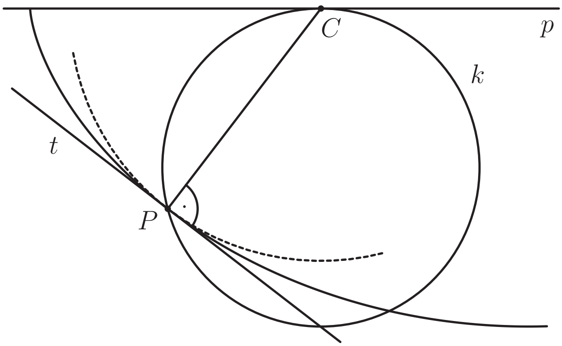
$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{y}} = C_1. \tag{8}$$



Obr. 6: Nutná podmínka brachistochrony

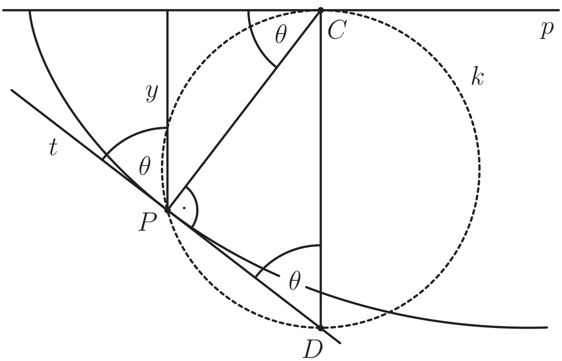
Nyní máme daný jasný vztah mezi pozicí a sklonem tečny ke každému bodu hledané křivky. Stejně jako původně Bernoulli můžeme tuto křivku najít vyřešením odpovídající diferenciální rovnice. Do této doby jsme se ovšem obešli bez diferenciálního počtu. V tomto duchu chceme pokračovat. Za pomoci geometrie ukážeme, že podmínku brachistochrony splňuje právě cykloida; křivka vykreslená pevně daným bodem na obvodu kružnice, která se valí po přímce [4].

Dotýká-li se kružnice k, tvořící cykloidu, přímky p v nějakém bodě C, pak se v tomto okamžiku chová C jako střed otáčení bodu P na cykloidě. Proto je tečna t k cykloidě v bodě P kolmá na CP.



Obr. 7: Tečna k cykloidě

Jako na obr. 6 označme vzdálenost bodu P od přímky p jako y a úhel svíraný tečnou t a normálou k p jako θ.



Obr. 8: Geometrie cykloidy

Kružnice k má průměr $d = CD$. Pak $CP = d \sin \theta$, a tedy

$$y = d \sin^2 \theta.$$

Odsud dostáváme, že cykloida splňuje právě podmínku brachistochrony (8):

$$\frac{\sin \theta}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{d}} = C_2.$$

Konstanta C_2 je závislá na poloměru r, který se při válení kružnice samozřejmě nemění. Poloměr r můžeme ovšem zvolit tak, aby $C_1 = C_2$ (viz čtvrtá odrážka v sekci 3).

Diskretizace je častý a efektivní přístup k řešení fyzikálních problémů, avšak se nejedná o zcela rigorózní přístup, spíše praktický. I přesto dává přesné řešení problému brachistochrony, které lze najít ještě například pomocí variačního počtu [1, 3].

3. Analýza brachistochrony

Několik argumentů v tomto článku bychom mohli rychleji dokázat nebo alespoň potvrdit právě metodami matematické analýzy. Pro čtenáře, kteří jsou s ní již seznámeni, ponechávám následující otázky:

- Pro důkaz Snellova zákona na základě Fermatova principu jsme využili Ptolemaiovy nerovnosti. Dokažte Snellův zákon za pomoci derivace odpovídající funkce.

- Dokažte, že vždy existuje právě jedno L na rozhraní, které splňuje Snellův zákon. *Nápověda.* Využijte věty o nabývání mezihodnot, spojitosti a monotónnosti odpovídající funkce.

- Najděte parametrické vyjádření cykloidy. *Odpověď.* Pro souřadnice, kde osa y směřuje dolů s počátečním bodem v $A[0, 0]$ mají rovnice cykloidy tvar:

  $$x(t) = r(t - \sin t),$$
  $$y(t) = r(1 - \cos t),$$

  kde r je poloměr kružnice tvořící cykloidu a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je parametr. Máme- li daný konečný bod $[x_1, y_1]$, pak můžeme numericky určit z rovnic r a interval parametru t.

- Z nutné podmínky pro brachistochronu (8) sestavte odpovídající diferenciální rovnici. Ukažte, že jejím řešením je právě cykloida splňující $C_1 = C_2$ v sekci 2.

- Důležitým poznatkem v případě obr. 7 bylo, že $t \perp CP$. Za pomoci parametrických rovnic cykloidy dokažte, že vskutku je tečna t v bodě P normálou k CP pro všechny P na cykloidě.

- Uvedený důkaz Ptolemaiovy nerovnosti je jeden z mnoha. Nerovnost dokažte za pomoci komplexních čísel, respektive za pomoci trojúhelníkové nerovnosti pro komplexní čísla:

$$\forall w_1, w_2 \in \mathbb{C}\colon (|w_1| + |w_2| \geq |w_1 + w_2|).$$

Literatura

[1] Chamrová, M.: *Brachistochrona v teorii a pokusech.* Bakalářská práce, Univerzita Karlova, Praha, 2018.

[2] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.: *Geometry revisited.* 5th ed., Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.

[3] Kielhöfer, H.: *Calculus of variations.* Springer, New York–Berlin–Heidelberg, 2018.

[4] Levi, M.: Quick! Find a Solution to the Brachistochrone Problem. *SIAM News*, roč. 48 (2015), č. 6, https://sinews.siam.org/Details-Page/quick-find-a-solution-to-the-brachistochrone-problem.

[5] Malý, P.: *Optika.* Karolinum, Praha, 2008.

[6] Niven, I. M.: *Maxima and minima without calculus.* 3rd ed., Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1981.

* * * * *

Immanuel Kant (1724–1804), německý filozof:

Tvrdím však, že v každé jednotlivé nauce o přírodě lze najít jen tolik skutečné vědy, kolik je v ní matematiky.

(Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, A VIII)

Zdroj: https://citaty.net/temata/matematika/?page=2

Elegantní řešení úlohy MO

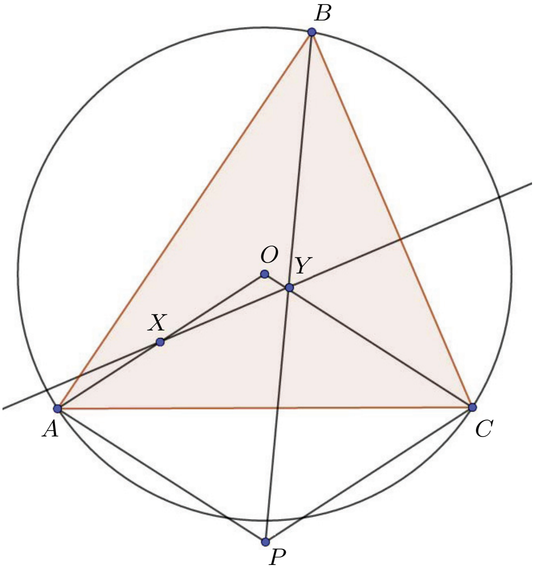
Martina Kašparová, KMT FPE ZČU Plzeň

V krajském kole MO kategorie A v r. 2020 byla zadána následující úloha:

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme O střed kružnice opsané. Obraz bodu O v osové souměrnosti podle přímky AC označme P. Dokažte, že středy úseček AO a BP leží na téže kolmici k přímce BC.

Autorské řešení naleznete na:
`http://www.matematickaolympiada.cz/media/5435685/a69ii.pdf`

Pěkné řešení této úlohy využívající skalární součin vektorů nalezl Adam Blažek, student gymnázia Plzeň, Mikulášské náměstí:



Obr. 1

Označme X střed úsečky AO a Y střed úsečky BP. Úkolem je dokázat, že $\overrightarrow{XY} \perp \overrightarrow{BC}$. Body A a C leží na stejné kružnici se středem O, platí tedy $|OA|=|OC|$. P je obrazem O v osové souměrnosti podle přímky AC, tudíž $|AO| = |AP|$ a $|CO| = |CP|$ a zároveň $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AC}$. Z toho všeho plyne, že čtyřúhelník $AOCP$ je kosočtverec. Označme $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ a $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Jelikož jsme dokázali, že čtyřúhelník $AOCP$ je kosočtverec, platí $P = O + \vec{a} + \vec{c}$. Také z definice víme, že

$$X = \frac{1}{2}O + \frac{1}{2}A = O + \frac{1}{2}\vec{a}$$

a

$$Y = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}(O + \vec{b}) + \frac{1}{2}(O + \vec{a} + \vec{c}) = O + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Vypočtěme nyní skalární součin $\overrightarrow{XY}$ a $\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(|\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2).\end{aligned}$$

Ze zadání však víme, že $|\vec{b}| = |\vec{c}|$, neboť body B a C leží na kružnici se středem O a vzdálenost je tedy stejná. Z toho plyne, že

$$\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Víme, že pokud je skalární součin dvou vektorů roven nule, jsou tyto vektory na sebe kolmé, tedy $\overrightarrow{XY} \perp \overrightarrow{BC}$.

Velká drogová kocovina

Tomáš Fürst, Jan Strojil, Halina Šimková

Abstrakt. Náhodné testování přítomnosti drog ve slinách řidičů, studentů nebo zaměstnanců je přehlídkou ostouzení nevinných. Ve velkém. Příčinou není podvádění nebo „vadné testy“, ale naprosté nepochopení matematických zákonitostí testování.

Jednoduché testy na přítomnost drog ve slinách jsou na první pohled úžasný nástroj. Přibývá ale případů, kdy si pozitivně testovaní stěžují, že drogy rozhodně neberou, a když pak podstoupí testy z krve (pokud je ovšem podstoupí!), jejich nevina se potvrdí. Jenže než se dočkají výsledků, už podstupují martyrium správního řízení a martyrium osobní a donekonečna ujišťují policii, rodinu, zaměstnavatele a kamarády, že opravdu, ale opravdu nefetují.

Týká se to nejen řidičů, ale i náhodně testovaných studentů ve školách nebo zaměstnanců ve firmách. Lze jen spekulovat, kolika z nich na základě výsledku testu ze slin hrozilo vyloučení ze školy nebo vyhazov z práce, nebo kolik jich dokonce vyloučeno či propuštěno bylo. V médiích se objevují titulky „Přišli o řidičák, ač byli čistí", „Chybné policejní testy na drogy dělají z nevinných řidičů narkomany" a příběhy dalších a dalších postižených kolují sociálními sítěmi. Proč?

Odpověď je závažnější, než bychom čekali: *Testy při tomto způsobu používání jiné než zavádějící výsledky poskytovat nemůžou.*

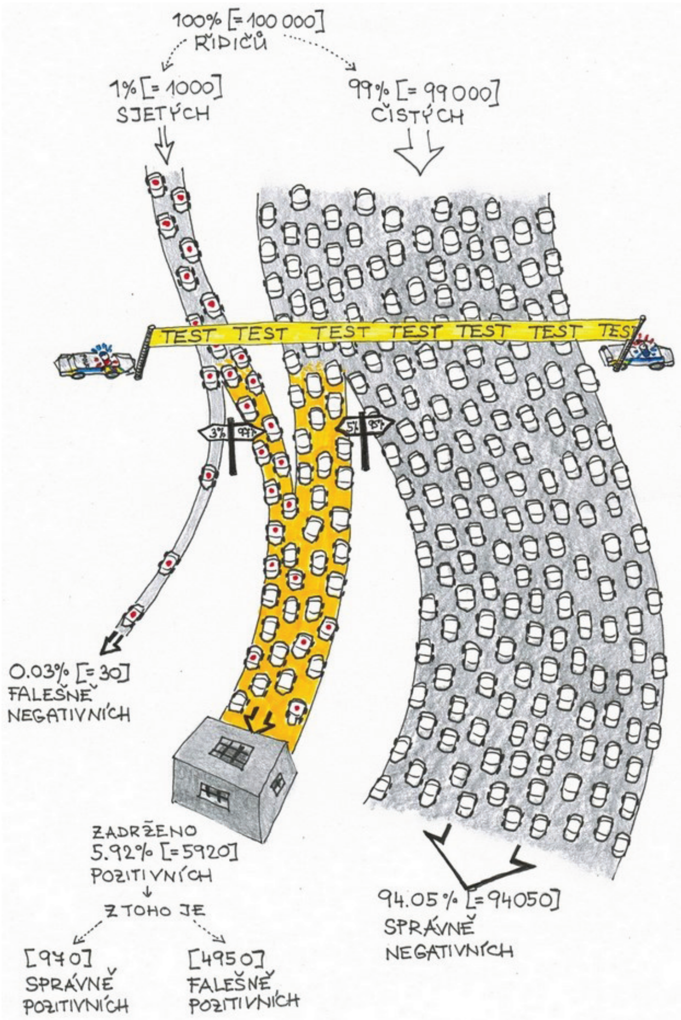
Správné testy, vadná logika

Samy testy nijak vadné nejsou. Fungují správně – tak, jak to testy tohoto typu umí, tedy „většinou ukazují dobře". Toto „většinou" se u každého testu vyjadřuje pomocí dvou základních hodnot, které ho charakterizují: senzitivity a specificity.

Senzitivita testu nám říká, s jakou pravděpodobností bude test pozitivní u osoby, která opravdu pod vlivem drogy je. Například policií užívaný test DrugWipe 5S má podle výrobce senzitivitu 97 %. To znamená, že otestujeme-li s ním 100 lidí pod vlivem drogy, u 97 vyjde test správně, tj. pozitivně, a u 3 vyjde nesprávně, tj. negativně (tomu se říká falešná negativita testu).

Specificita testu nám říká, s jakou pravděpodobností bude test negativní u osoby, která opravdu pod vlivem drogy není. DrugWipe 5S má specificitu 95 %. To znamená, že otestujeme-li s ním 100 lidí, kteří pod vlivem drogy nejsou, u 95 vyjde test správně, tj. negativně, a u pěti vyjde nesprávně, tj. pozitivně (tomu se říká falešná pozitivita testu).

Teď se ale podívejme, jak se bude takový test chovat v reálném světě, kde „čistých" je zaplaťpánbůh mnohonásobně víc než „sjetých". Podíl „sjetých" v populaci vyjadřuje hodnota, které říkáme prevalence, což je odborný termín pro výskyt. Představme si dosti černý scénář, že v určitém okamžiku připadá na 99 „čistých" osob (za volantem, ve třídě nebo na pracovišti) jedna „sjetá" některou z pěti drog, kterou test DrugWipe 5S umí zachytit – prevalence je tedy 1 ze 100 neboli 1 %. Alespoň občasných konzumentů drog bude v populaci více, ale ne každý, kdo fetuje, je sjetý právě v okamžiku testování a ne každý aktuálně zfetovaný je sjetý zrovna některou z drog, na kterou je test zacílen. Nyní si představme, že policie jednoho rána spustí po celé republice megaakci „Bič boží“, při níž otestuje testem DrugWipe 5S rovných sto tisíc řidičů. Co se stane, to ukazuje následující schéma.



Ne, v infografice není chyba. Plných 84 % pozitivně otestovaných jsou nevinní, u nichž se pouze projevila falešná pozitivita testu. Pokud má náhodně vybraná osoba (například řidič při běžné silniční kontrole) pozitivní výsledek testu, je pravděpodobnost, že je skutečně pod vlivem drog, jen zhruba 16 %. Tomuto číslu se říká pozitivní prediktivní hodnota testu, a právě o něj by se měl zajímat každý, kdo chce nějaký test používat!

Máte něco s prostatou, slečno

Dokonce i pokud by prevalence v populaci dosáhla (čistě teoreticky) hororových 2 %, tedy pokud by pod vlivem drog byla každá padesátá (!) osoba, bude pozitivní prediktivní hodnota testu jen 28 %. Pokud naopak bude prevalence menší, třeba jeden zdrogovaný z pěti set, bude nevinných plných 96 % pozitivně otestovaných!

Je-li totiž počáteční pravděpodobnost, že osoba je opravdu pod vlivem drogy, malá, pak i diagnostické testy s velmi dobrou specificitou a senzitivitou produkují obrovské množství falešně pozitivních výsledků. To nastává typicky právě u náhodně vybraných řidičů, studentů nebo zaměstnanců, tedy u osob, u kterých nic nevzbudilo naše podezření, pouze jsme se je „jen tak“ rozhodli otestovat. Jedním takovým testem jim přitom můžeme udělat ze života peklo.

O tomto jevu ví dobře své medicína, kde se diagnostické testy na vzácná onemocnění nasazují velmi uvážlivě a pouze v případech, kdy je zvýšené riziko, že osoba tímto onemocněním trpí (projevují-li se u ní příznaky onemocnění, má-li dědičnou zátěž apod.) Kdyby se totiž nasadily plošně, stovky a tisíce zdravých lidí by byly falešně pozitivně testovány, výsledkem testu psychicky zdeptány a třeba i zbytečně léčeny z onemocnění, kterým ve skutečnosti netrpí.

Nejlépe to lze ukázat na absurdním příkladu: Představte si pošahaného lékaře, který by screeningový test na rakovinu prostaty provedl plošně u všech dívek na základních školách. Test má specificitu 99 %, takže u 1 % dívek by vyšel pozitivní! Je snad každá stá školačka zakuklený chlápek s rakovinou prostaty? Samozřejmě, že ne – všechno by to byly falešné pozitivity: náctileté dívky opravdu nemůžou mít rakovinu orgánu, který nemají.

Pokud ale tentýž test provedeme u sedmdesátiletých mužů stěžujících si na problémy s močením, podíl falešně pozitivních bude velmi malý a hodnota výsledku testu bude mít nesrovnatelně vyšší vypovídající hodnotu – prostě proto, že prevalence rakoviny prostaty u sedmdesátiletých mužů s obtížemi při močení je poměrně velká, na rozdíl od školaček, kde je nulová.

Stop kobercovým náletům

Ale zpět k našim drogovým testům. Bylo by možné namítnout, že podíl lidí pod vlivem drog je třeba naopak výrazně vyšší než 1 %. Zajímavá data v tomto směru poskytla policie České televizi pro zpracování reportáže z 31. 10. 2015. Zde se říká, že z 31 657 screeningových testů provedených policií bylo 2607 pozitivních. Nejprve si představme, že by všechny testy byly prováděny zcela náhodně. Pak z těchto údajů můžeme při znalosti specificity a senzitivity použitého testu zpětně vypočítat prevalenci, tedy už vícekrát zmíněnou míru zdrogovanosti populace. Ta nám vyjde přibližně 3,5 %. Jenže: bezpochyby zdaleka ne všichni řidiči byli testováni náhodně. U řady z nich použili policisté test cíleně, například kvůli podezření, které v nich vyvolalo chování osoby, způsob jízdy, pozitivní výsledek testu na alkohol a podobně. V tom případě je skutečná prevalence v populaci ještě několikanásobně nižší a 1 %, použité v naší infografice, představuje spíše horní mez.

Jsou tedy diagnostické testy na přítomnost drog k ničemu? Vůbec ne, jen nesmějí být používány k namátkové kontrole! Test má smysl provádět tehdy, když je z nějakého důvodu předem zvýšená pravděpodobnost, že osoba je pod vlivem drogy: Pokud jeví příznaky ovlivnění drogou, pokud má pozitivní test na alkohol, pokud má drogovou minulost nebo například pokud víme, že v daném kolektivu (třeba v nějaké skupině mladistvých) je míra užívání drog velká. Naopak za zcela nesmyslné lze považovat náhodné testování. Zvlášť proto, že pozitivní výsledek testu v naprosté většině případů nezůstane okolí utajen a úplně zbytečně stigmatizuje osobu, která je s velkou pravděpodobností nevinná. Řešením není hledání jiného dodavatele testů, ale pochopení matematických zákonitostí testování.

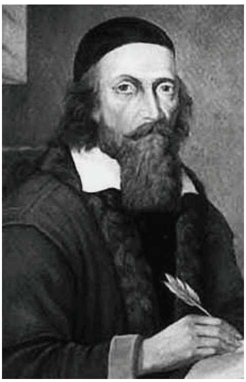
Článek byl se svolením autorů a editora převzat z časopisu Finmag: https://finmag.penize.cz/kaleidoskop/407932-velka-drogova-kocovina

Fyzika očima Komenského

Alena Šolcová, FIT ČVUT v Praze

28. března měl narozeniny Jan Amos Komenský, který je považován za zakladatele moderní pedagogiky a vysloužil si přízvisko Učitel národů. Díky jeho dílům se můžeme podívat na to, jak v 17. století rozuměl např. různým přírodním jevům.

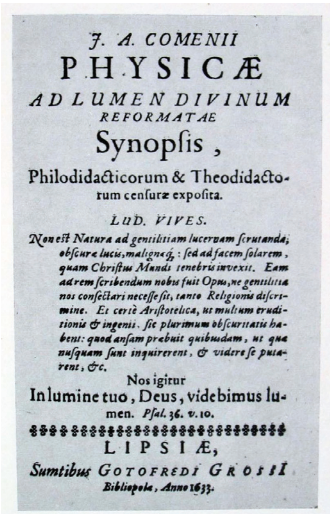
Ve stejném roce, kdy Galileo Galilei napsal své proslulé Dialogy, vyšla v Lipsku Komenského *Fyzika podle Božího světla upravená* (Lipsko, 1633), viz obr. 2. Jan Amos Komenský (1592–1680) ji napsal patrně v polském Lešně o rok dříve, kde fyziku přednášel svým žákům. Dílo vyšlo později ještě v Amsterodamu a v Paříži. Text je psán latinsky, tedy tak, jak to bylo tehdy obvyklé. Vykládá zde svoji představu filosofie přírody. Uvažuje o trojici principů (smysl, rozum, Písmo). První z nich přijímá poznatky z vnějšího světa, druhý je organizuje, uvádí v obecné formy a dospívá k obecným závěrům, třetí pak odpovídá na otázky, na které první dva nedovedou odpovědět. Nauku o duchu (spiritus), pohybech (motus) a jakostech (qualitates) považuje Komenský za svoje původní myšlenky. Z jeho úvah je vidět, že si osvojil dokonale aristotelskou filosofii.



Obr. 1

Vše, co je v přírodě, rozděluje Komenský do sedmi stupňů: živly, pára, nerosty, rostliny, zvířata, lidé a andělé. Těmto stupňům jsou také věnovány jednotlivé kapitoly Komenského *Fyziky* [1]. Poslední dvanáctá kapitola je pro nás ve 21. století překvapivě věnována studiu andělů.

Celému textu předchází úvodní část, v níž Komenský vykládá, co je fyzika (pro Komenského má širší význam, týká se i přírodních jevů). Připojuje k tomu také návod, že je třeba postupovat od jednoduššího ke složitějšímu v Descartově duchu. René Descartes podobné úvahy rozebírá již v mládí ve slavné *Rozpravě o metodě* (vydána až v roce 1637). Komenský se s Descartem později setkal v Nizozemí na zámku v Endegeestu (1642). Rozmlouvali spolu asi 4 hodiny, ale Komenský svobodomyslnějšímu Descartovi nerozuměl.


J. A. COMENII
PHYSICÆ
AD LUMEN DIVINUM
REFORMATAE
Synopsis,
Philodidacticorum & Theodidactorum censuræ exposita.

LUD. VIVES.

Non est Natura ad gentilitiam lucernam scrutanda; obscuræ lucis, maligneq; : sed ad facem solarem, quam Christus Mundi tenebris invexit. Eam ad rem scribendum nobis fuit Opus, ne gentilitia nos consectari necesse sit, tanto Religionis discrimine. Et certè Aristotelica, ut multum eruditionis & ingenii, sic plurimum obscuritatis habent: quod ansam præbuit quibusdam, ut quæ nusquam sunt inquirerent, & videre se putarent, &c.

Nos igitur
In lumine tuo, Deus, videbimus lumen. *Psal. 36. v. 10.*

LIPSIÆ,
Sumtibus GOTOFREDI GROSII
Bibliopolæ, Anno 1633.

Obr. 2

V tomto stručném textu se soustředíme na to, jak Komenský vykládá některé jevy a pojmy.

Co je to Země? *Komenský vysvětluje, že Země je jeden ze čtyř živlů (éter, vzduch, voda, země) a že je „věčně klidná“. Nad ní plove voda, nad tou poletuje vzduch a nad ním se vznáší éter. Část ohnivého éteru je také v nitru zemském. Země, jak nás poučuje naše pozorování (smysly), je středem tíže. Země je nejhustší, nejtěžší, proto musí být ve středu.*

Jak vysvětluje hvězdy? *Jsou to ohnivé koule, plné světla a tepla, jimiž se éter ze všech stran třpytí. Bůh je rozložil po nebi kolkolem v počtu převelikém. Lze je spočítat, ale Bůh jich zná nesčetné množství, jak* *vysvítá např. z Mléčné dráhy, i Písmo to dotvrzuje. Slunce a hvězdy jsou ohňové, lehké, energií hoření pohybují se samy od sebe a přenášejí tento pohyb na planety.*

A jak je to s planetami? *Liší se svou polohou, velikostí a světlem, pomáhají Slunci, je jich šest, a to tři nad Sluncem: Saturn, Jupiter a Mars, a tři pod Sluncem: Venuše, Merkur a Měsíc.*

Planety horní jsou větší a dolní menší než Země. Čím která je vyšší, tím rychleji, čím nižší a Zemi bližší, tím volněji se pohybuje.

V minulých stoletích se označovaly také planety jako „hvězdy bludné“ či „oběžnice“.

Jak uvažuje Komenský o Slunci? *Bylo učiněno tak velkým, aby stačilo k osvětlování celého světa a k zahřívání a vypařování celé Země. Je 160krát větší než Země. Bylo vyzdviženo do takové vzdálenosti nad Zemí, aby ji nespálilo a ani zase nenechalo na holičkách. Je desetkrát blíž Zemi než hvězdná sféra. Pohybuje se volněji než hvězdná sféra, téměř o 1 stupeň zůstává denně pozadu. Stává se, že za 365 dnů „jaksi zpátečním pochodem celou sféru obejde a za tolik též dní k téže hvězdě se vrací“. Sluneční rok je „zpáteční pohyb Slunce“.*

Stálice, nebe a hvězdná sféra. *Největší stálice je 107krát větší než Země. Vzdálenost hvězdné sféry činí 20 000 poloměrů zemských po 900 německých mil. (Pro představu 1 německá míle = 2 912 vídeňských sáhů = 5 522,561408 m, tedy asi 5 a půl kilometrů). Jak k těmto hodnotám dospěl, Komenský neuvádí.*

Jak popisuje komety? *Komety jsou hvězdy, jež někdy svítí a někdy zhasnou. Nejsou to vznícené páry (vapores), ale odraz sluneční v parách. Z existence komet plyne:*

1. *že se celé nebe pohybuje, nejen hvězdy*
2. *že je tekuté a průchodné, není jako křišťál tvrdé*
3. *že páry (vapores) až tam vystupují a že se ve světě viditelném dějí změny.*

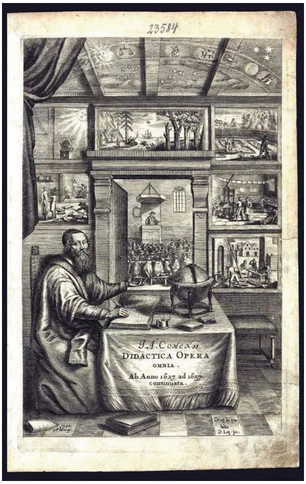
Když Komenský mluví o parách, má na mysli: *živel zředěný, jinému živlu přimíšený, plodí se působením tepla, jež hmotu těles rozřeďuje ze živlů hustějších (země, vody, vzduchu). Veškerý svět je naplněn parami, tak jako by byl svět velké „vaporium“* (pozn. autora: pařiště, či pařeniště). *Páry samy vznikají, aby daly původ věcem. Pohybují se směrem vzhůru. Nahromaděním způsobují vítr, na moři příliv a na Zemi zemětřesení.*

Když se zabývá meteory, představuje si: *sraženiny vzduchové, které vznikají stálým stékáním výparů od všech živlů denně, trvanlivostí bývají nepatrné.* Rozděluje je na:

1. *Meteory vodní (z vlhkých výparů) – mlha, oblak, déšť, kroupy, sníh, rosa, jíní.*
2. *Meteory žhavé (ze suchých výparů) – pocházejí z mastného dýmu, jenž se vzňal ve vzduchu – jsou to např. padající hvězdy, létací drak, blesk, blýskavice, bludičky, čištění hvězd a ignis lambens (výpar mastný).*
3. *Meteory svítící – okolí Měsíce a Slunce, tvárný Měsíc, tvárné Slunce, pruhy („když Slunce pije vodu“), červánky, duha.*

A co když se blýská? Komenský píše, že *blesk je oheň vznícený uprostřed mraků, které mají protivnou zimu, a s rachotem hrozným vyráží a velmi často plamen až na Zemi vrhá.*

Porovnejte si Komenského pohledy se současnými znalostmi a připomeňte si, jak rozumíme prostředí kolem nás dnes.



Obr. 3

Čtenáře by mohlo také překvapit, že se Komenský snažil řadu let o vytvoření „perpetua mobile“ (1642). Zabýval se konstrukcí stroje s loukoťovým kolem. Na loukotích byla umístěna závaží. Každé vychýlení závaží způsobilo otáčení kola, protože podle Komenského „váha od svého středu vzdálená v klidu být nemůže“. Již delší dobu je známo, že takový trvale pohybující stroj „perpetuum mobile“ bez podpory vnější energie sestrojit nemůžeme.

Literatura

[1] Komenský, J. A.: *Physicæ Ad Lumen divinu reformandæ Synopsis.* Lipsiæ, Amsterodami, 1663 (Fyzika podle Božího světla opravená, neboli Přehled fyziky podle Božího světla opravené).

[2] Soldát, H.: J. A. Komenského Fysika. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, roč. 21 (1892), s. 256–296.

[3] Šolcová, A.: Kapesní slovník astronoma v labyrintu Komenského spisů. *Říše hvězd*, roč. 4-5 (1992), s. 78–79.

Měření rotace plazmatu na tokamaku GOLEM

Daniela Kropáčková, Gymnázium Brno, Křenová

V tomto článku se spolu podíváme na jednoho z nejnadějnějších adeptů na budoucí ekologický zdroj energie, tokamak. Tokamaky k zisku energie využívají tzv. jadernou fúzi, tedy slučování jader lehkých prvků do jader prvků těžších, přičemž dochází k uvolnění velkého množství energie. Nápad na toto zařízení se poprvé objevil v padesátých letech minulého století v tehdejším Sovětském svazu. Od té doby se na jeho vývoji intenzivně pracuje v mnoha zemích světa, a to zejména na společném světovém projektu ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), který se právě staví ve Francii. Jedná se o vůbec nejdražší pozemský projekt na světě (nejdražším projektem světa je mezinárodní vesmírná stanice ISS) a jeho spuštění se očekává v roce 2025. Hlavním úkolem ITERu je ukázat, zda tokamaky dokáží vyprodukovat větší množství energie, než kolik jí je potřeba k zapálení jejich paliva. Pokud se projekt ukáže jako úspěšný, měla by započít výstavba elektrárny DEMO, která by zatím sloužila pouze vědeckým účelům a byla by tak „předskokankou“ budoucích fúzních elektráren.

To vše zní slibně, od vysněného cíle ale tokamak dělí mnoho nedořešených problémů, jedním z nich jsou i tzv. disrupce (náhlé vyvržení plazmatu na stěny komory). Pokud by k takové disrupci došlo na ITERu, mohlo by to způsobit velké škody dosahující obrovských částek, což by projekt mohlo ohrozit. Je tedy velmi žádoucí tyto disrupce nějakým způsobem potlačit. A právě jednomu z předpokladů, díky němuž toho lze docílit, jsem se věnovala ve své práci SOČ, jejíž hlavní výsledky jsou zmíněny v závěru článku.

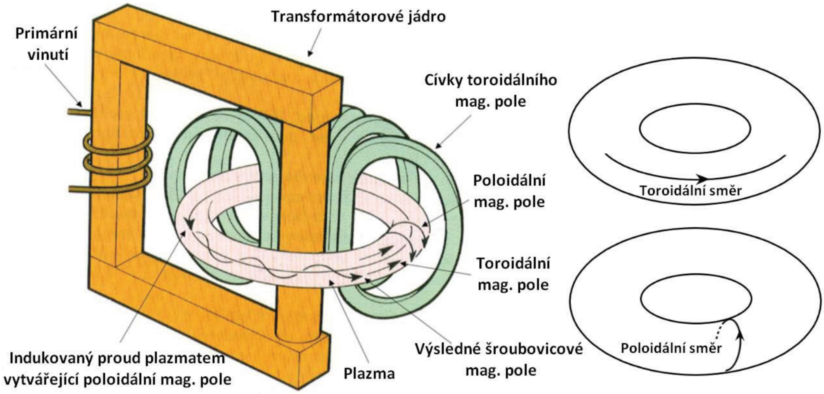
Termojaderná fúze

Pojďme se nejdříve podívat na reakci, kterou chceme k zisku energie využít. Inspirací nám v tomto případě bylo naše Slunce, kde termojaderná fúze probíhá už po miliony let a bez níž bychom tu dnes nebyli. Termojaderná se nazývá proto, že vysoké teploty umožní jádrům dostat se dostatečně blízko k sobě, aby mohlo dojít k jejich sloučení, konkrétně u proton-protonové reakce, probíhající na Slunci, je to okolo 15 miliónů stupňů Celsia. Tuto reakci ale z praktických důvodů na Zemi nemůžeme využít, jelikož probíhá velice pomalu. Jako nejperspektivnější reakce pro průmyslové účely se jeví reakce deuteria s tritiem, zkráceně D-T. K zisku maximální možné energie je však potřeba tuto reakci provozovat za teploty 150 miliónů stupňů Celsia. Je zřejmé, že při takových teplotách už nemluvíme o plynu, nýbrž o plazmatu. S tím jsou spojené i dva hlavní problémy, se kterými se vědci museli vypořádat: jak dosáhnout tak vysoké teploty a v čem následně plazma udržet tak, aby nedošlo ke kontaktu s okolními materiály. Bylo proto zkonstruováno mnoho nádob a provedeno nespočet pokusů, z nichž zatím nejúspěšněji vyšel právě tokamak.

Tokamak

K vyřešení výše zmíněných problémů využívají tokamaky tzv. magnetické udržení plazmatu. Plazma je v komoře, tvaru toru (lze si představit jako americkou koblihu nebo pneumatiku), udržováno kombinací toroidálního a poloidálního magnetického pole, viz obr. 1. Pokud tato dvě pole sečteme, získáme výsledné šroubovicové magnetické pole, podél kterého se nabité částice plazmatu pohybují, přičemž navíc kolem magnetických indukčních čar opisují kružnici (tzv. Larmorova rotace). Tím je omezen pohyb částic napříč magnetickým polem, tedy směrem ven, a vzniká magnetické udržení plazmatu.

Princip tokamaků je založen na principu transformátorů, kde primárem jsou cívky toroidálního elektrického pole a sekundár tvoří samotná komora tokamaku. Pokud je napětí indukované na sekundáru a vzniklé toroidální elektrické pole dostatečně velké, dojde k průrazu neutrálního plynu do plazmatu a vzniklý proud plazmatem kolem sebe následně vytváří poloidální magnetické pole. Toroidální magnetické pole je generováno soustavou cívek umístěných po obvodu komory.



Obr. 1: Základní schéma tokamaku

K ohřevu plazmatu se zpočátku využívá tzv. ohmický ohřev, který vzniká díky odporu plazmatu. Ten lze ale využít jen po omezenou dobu, jelikož jednou z vlastností plazmatu je i to, že s rostoucí teplotou klesá jeho odpor. K dodatečnému ohřevu plazmatu se proto dále využívá např. vstřelování svazků velmi urychlených částic.

Tokamak GOLEM

Tokamak GOLEM je jedním ze dvou tokamaků na území ČR a zároveň se jedná o vůbec nejstarší dosud fungující tokamak na světě. Navštívit ho můžete v útrobách budovy FJFI ČVUT v Praze, kde už 10 let slouží studentům k jejich vzdělávání. Navíc si díky jeho webovým stránkám můžete iniciovat svůj vlastní výboj a to doslova kdykoliv odkudkoliv, stačí být připojen(a) k internetu. Na GOLEMovi se setkáme pouze s ohmickým ohřevem, který dokáže plazma ohřát na řádově stovky tisíc kelvinů. Nelze tedy mluvit o nějaké fúzi, navíc jako pracovní plyn GOLEM využívá pouze vodík a helium, žádné deuterium s tritiem. S D-T kampaněmi se setkáme jen občas, a to pouze na několika málo tokamacích. Po reakci s využitím nestabilního tritia (poločas rozpadu 12,3 let) se totiž komora stává dočasně radioaktivní a pracovníci do ní nemohou ručně instalovat potřebná diagnostická zařízení.

Rotace plazmatu

Jak již bylo zmíněno na začátku, jednou z překážek pro úspěšné udržení plazmatu jsou tzv. disrupce, jejichž zdrojem mohou být proudové nestability. Proudových nestabilit existuje celá řada, většinu z nich ale můžeme potlačit systémem tzv. stabilizace. Ta může být buď aktivní, nebo pasivní. Pasivní stabilizace probíhá sama, nepotřebuje k tomu žádný lidský zásah. Probíhá díky tomu, že plazma v tokamacích rotuje. Jelikož jsou magnetické indukční čáry „vmrzlé" do plazmatu, pohybují se spolu s ním a taktéž se pohybuje i zárodek vznikající magnetické nestability. Magnetické pole se tak mění a v okolních vodičích vznikají vířivé proudy. Ty kolem sebe vytváří vlastní magnetické pole, čímž vznikající nestabilitu vtlačují zpět do nitra plazmatu.

S aktivní stabilizací je to už o něco složitější. Na rozdíl od pasivní stabilizace neprobíhá sama, ale je k ní potřeba poměrně náročný počítačový výpočet, na základě něhož jsou do vnějších stabilizačních cívek pouštěny různě velké proudy. Kolem cívek vzniká magnetické pole a zárodek nestability je opět vtlačován zpět do plazmatu. Detekce nestability je zajištěna diagnostickými cívkami umístěnými uvnitř komory, kterým se magnetická nestabilita jeví jako periodicky se opakující proměnné magnetické pole.

Pro uplatnění obou těchto stabilizací je proto velice žádoucí, aby plazma v tokamacích rotovalo. Abychom v budoucnu tuto rotaci v tokamacích zajistili, je nejdříve potřeba porozumět jevům, které rotaci způsobují a které ji mohou ovlivňovat. S tím nám mohou pomoci diagnostické sondy, jakou je např. dvojitá tunelová sonda zobrazená na obr. 2.

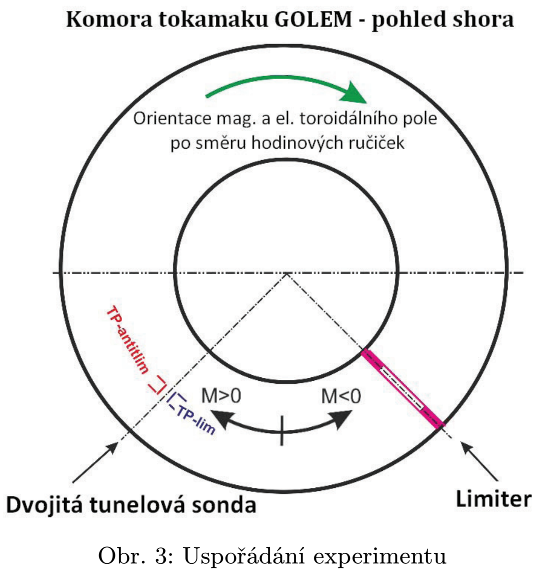
Obr. 2: Dvojitá tunelová sonda

Dvojitá tunelová sonda

Z měření dvojité tunelové sondy lze určit tzv. Machovo číslo, což podobně jako v letectví i v plazmatu představuje poměr rychlosti plazmatu k iontozvukové rychlosti. Díky tomu, že je sonda dvojitá (dvě sondy k sobě připevněné zády), můžeme kromě toho, jestli se plazma pohybuje nadzvukovou či podzvukovou rychlostí, také určit směr, kterým se plazma ubírá.

Měření na tokamaku GOLEM

Měření Machova čísla jsme vyzkoušeli i na tokamaku GOLEM, kde jsme zkoumali, jaký vliv bude mít obrácení magnetických polí tokamaku na rotaci plazmatu. Obrácení toroidálního pole jsme dosáhli jednoduchým přepólováním cívek toroidálního pole a obrácení poloidálního pole přepólováním transformátoru a indukcí proudu plazmatem v opačném směru. Vždy byla obracena obě dvě pole zároveň. Pokud bychom se na tokamak podívali seshora, mělo by toroidální magnetické pole i proud plazmatem směr buď po směru hodinových ručiček, nebo proti směru hodinových ručiček, viz obr. 3. Sonda byla umístěna 90 stupňů toroidálně od limiteru (kruhová clona omezující velikost plazmatického sloupce) a během experimentu byla nabíjena na záporný potenciál, díky čemuž byly elektrony od sondy odpuzovány a na sondu dopadaly pouze ionty. Ze získaných dat jsme následně určili Machovo číslo. Zároveň byla sonda výboj od výboje zasouvána hlouběji do plazmatu, což umožnilo proměření radiálních profilů Machova čísla.



Obr. 3: Uspořádání experimentu

Zde jsou hlavní závěry z tohoto měření:

1. Plazma má tendenci měnit směr své toroidální rotace se změnou orientace polí a středová část plazmatu se pohybuje proti směru proudu plazmatem.
2. Blíže středu plazmatického sloupce se plazma pohybuje jiným směrem než na svém okraji.

Zajímavým úkazem bylo to, že u výbojů s orientací polí proti směru hodinových ručiček bylo Machovo číslo téměř vždy o něco vyšší než u výbojů s opačnou orientací. Vysvětlení, proč tomu tak bylo, ale zůstává zahaleno tajemstvím a spolu s dalšími nevyřešenými problémy čeká na své budoucí řešitele.

Pokud vás téma zaujalo, můžete si o něm přečíst více v [1].

Poděkování

Za cenné připomínky k textu děkuji vedoucí mé práce SOČ Ing. Kateřině Jirákové.

Literatura

[1] Kropáčková, D.: *Měření rotace plazmatu na tokamaku GOLEM*. 1963, dostupné z: http://golem.fjfi.cvut.cz/wiki/Library/GOLEM/SOCky/19Kropackova.pdf.

[2] Řípa, M.: *Řízená termojaderná fúze pro každého*. Svět energie, Praha, 2011.

[3] *Tokamak GOLEM wiki*, dostupné z: http://golem.fjfi.cvut.cz/wiki/.

Slyšené slovo pomíjí, napsané trvá

Ivo Kraus, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT, Praha

Vox audita perit, littera scripta manet[1)]

Abstrakt. Článek je věnován náhodně získané informaci doplňující fakta z pobytu Alberta Einsteina v Praze v letech 1911–1912. Díky svědectví pamětníků se okruh jeho pražských kolegů a obdivovatelů, jako byl např. matematik

[1)] Základem vědeckého výzkumu dějin člověka a jeho civilizace jsou především písemné prameny.

Georg Pick, fyzik a filozof Philipp Frank nebo fyzik Karel Teige, rozšířil o profesora fyziky a elektrotechniky na německé technice Ivana Puluje, od jehož narození letos uplynulo 175 let.

Až donedávna jsem si myslel, že o pražském období života Alberta Einsteina od dubna 1911 do července 1912 bylo už vše napsáno. A přece se i po více než sto letech našel pamětník, který k pobytu slavného fyzika u nás mohl ještě drobnost dodat.

V jednom pořadu z cyklu *Osudy* vysílaném v lednu 2018 na ČRo Vltava jsem se při vzpomínce na spolupráci s fyziky z univerzity ve Lvově zmínil také o tom, jak prezident T. G. Masaryk podporoval ukrajinské emigranty a že dva z nich byli dokonce rektory našich vysokých škol. Profesor lékařské chemie Ivan Jakovlevič Horbačevský (1854–1942) řídil českou Karlo-Ferdinandovu univerzitu (1902/1903), profesor fyziky a elektrotechniky Ivan Pavlovič Puluj (1845–1918) vykonával funkci rektora Německé vysoké školy technické (1888/1889).

Albert Einstein bydlel v Praze se svou ženou Milevou a syny Hansem Albertem (*14. 5. 1904) a Eduardem (*28. 7. 1910) na Smíchově v dnešní Lesnické ulici č. 7, Ivan Puluj s rodinou v dnešní Preslově ulici č. 15. Od Einsteinových k Pulujovým to bylo jen pár minut chůze. Páni profesoři o sobě sice mohli vědět, znali se však také osobně? A co jejich rodiny? Odpověď byla v dopise, který jsem několik dnů po odvysílané rozhlasové relaci dostal z Turnova:

„Jsem pediatr, pracující stařík a pamětník MUDr. Puluje (syna prof. Ivana Puluje), s nímž jsem se potkával v ordinaci v Příšovicích u Svijan. Dr. Puluj tam kdysi pracoval jako obvodní lékař. Rád jsem k němu chodil na popovídání, měl za sebou zajímavý život a velké zkušenosti z medicíny, kdy nebyla antibiotika a ani potřebné přístroje. Zajímavé byly jeho vzpomínky na otce, který v Praze pracoval souběžně s Albertem Einsteinem. Vzpomínal na setkání s jeho malým synkem,[2] s nímž se při nedělní procházce na Petřín poprali a potom se museli usmířit.“[3]

Dopis, který přišel do redakce ČRo Vltava:

Český rozhlas VLTAVA Praha
k rukám pana profesora Ivo Krause

---

[2] Hans Albert Einstein i Pavlo Puluj byli stejně staří, oba se narodili v roce 1904. Jak mi autor dopisu MUDr. Jaroslav Adam sdělil, Hans Albert a Pavlo se při společném nedělním obědě obou rodin museli navzájem omluvit.

[3] I když jde o zprostředkovanou informaci, je setkání rodin Alberta Einsteina a Ivana Puluje po konfliktu jejich dětí velmi pravděpodobné.

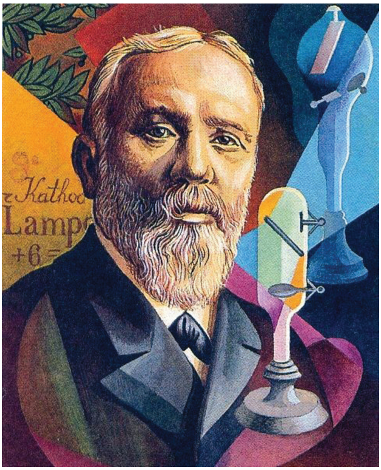
Věc: památka MUDr. Puluje v Příšovicích

Vážený pane profesore,
zdravím Vás z Turnova v Českém Ráji a děkuji za polední pořad na Vltavě.
Jsem pediatr, pracující stařík a pamětník MUDr. Puluje, se kterým jsem se potkával v ordinaci v Příšovicích u Svijan. Dr. Puluj tam kdysi pracoval jako obvodní lékař.
Rád jsem k němu chodil na popovídání, měl za sebou zajímavý život a velké zkušenosti z mediciny, kdy nebyla antibiotika a ani potřebné diagnostické přístroje. Mnoho bolestí a příznaků léčil svéhlavě morfinovou tinkturou a často mu to vycházelo.
Zajímavé byly jeho vzpomínky na otce, který v Praze pracoval souběžně s Albertem Einsteinem na německé univerzitě. Vzpomínal na setkání s jeho malým synkem, se kterým se při nedělní procházce na Petřín poprali a nakonec se museli usmířit a podat si ruce.
Otec dr. Puluje postavil svůj model „rentgenu", dokonce jeho lampy byly v Příšovicích k vidění. Rodáci z Podkarpatské Rusi o něm vydali v Anglii monografii a bojovali o přiznání patentu. Dr. Puluj měl jednu dceru, žila s manželem lesníkem v Brandýse nad Labem, kam se s adoptovanou dcerkou odstěhovali z Příšovic. Je pravděpodobné, že při tom přesunu vzalo za své mnoho osobních památek.
Moc rád jsem Vaše vzpomínky sledoval, zvlášť děkuji za ty na dr. Puluje.
Přeji Vám dobré zdraví a brzské jaro   MUDr. Jaroslav Adam

Kdo byl Ivan Puluj?

- Narodil se 2. února 1845 v městečku Hrymajlov asi 40 km jihovýchodně od haličského Ternopolu. Rodiče, otec Pavlo (1820–1893) a matka Ksenie (1823–1882), byli dostatečně zámožní, aby jejich syn mohl vystudovat ternopolské klasické gymnázium (1857–1865) a pak ve Vídni teologickou fakultu (1865–1869) i fakultu filozofickou (1869–1872). Teologie ho inspirovala k překladům duchovní literatury do ukrajinštiny, na filozofické fakultě získal kvalifikaci gymnaziálního profesora matematiky a fyziky.
- V letech 1872–1874 pracoval v laboratoři profesora fyziky Viktora Langa na vídeňské univerzitě.
- Dva roky (1874–1875) přednášel fyziku, mechaniku a matematiku na Vojenské námořní akademii ve Rijece.
- Ve Fyzikálním ústavu profesora Augusta Kundta na univerzitě ve Štrasburku vypracoval disertaci o teplotní závislosti vnitřního tření v plynech a získal doktorát filozofie (1876).
- Jako asistent a soukromý docent na univerzitě ve Vídni se zabýval vlastnostmi katodových paprsků (1876–1883).

- Byl poradcem a ředitelem výroby žárovek ve zbrojovce Josefa Werndla v rakouském Steyru (1883–1884).
- V roce 1884 přijal místo profesora experimentální a technické fyziky na německé technice v Praze. Téhož roku uzavřel sňatek se svou bývalou žákyní; šest z jejich dětí (tři dcery a tři synové) se dožilo dospělosti.
- V akademickém roce 1888–1889 zastával funkci rektora pražské německé techniky.
- Od roku 1899 byl řádným členem Vědecké společnosti Tarase Ševčenka ve Lvově.
- V roce 1902 se na Německé vysoké škole technické v Praze stal vedoucím nově založené katedry elektrotechniky.
- Za vědeckou a učitelskou činnost dostal Řád železné koruny (1906).
- Velký ukrajinský učenec a badatel zemřel 31. ledna 1918, místem jeho posledního odpočinku je pražský hřbitov Malvazinky. Na domě č. 15 v Preslově ulici, kde před svou smrtí bydlel, byla z iniciativy ukrajinských studentů 22. června 1930 odhalena pamětní deska.



Obr. 1: Ivan Puluj a jeho lampa

Ivan Puluj se prosadil v elektrotechnice, telekomunikacích i jako konstruktér originálních přístrojů k měření fyzikálních veličin, např. mechanického ekvivalentu tepla. Na světové výstavě v Paříži (1878) bylo toto zařízení oceněno stříbrnou medailí. Další vyznamenání dostal Ivan Puluj o tři roky později v Paříži za elektrotechnické přístroje.

Jeden z jeho vynálezů je ve starších fyzikálních a technických encyklopediích uváděný pod názvem Pulujova lampa. Jde o vakuovou trubici, zkonstruovanou roku 1881, v níž dopadem katodových paprsků na oxidy nebo sulfidy vápníku, hořčíku, stroncia nebo barya vzniká nejen viditelné světlo, ale, jak se později ukázalo, i záření objevené v listopadu 1895 würzburským profesorem fyziky Wilhelmem Conradem Röntgenem.

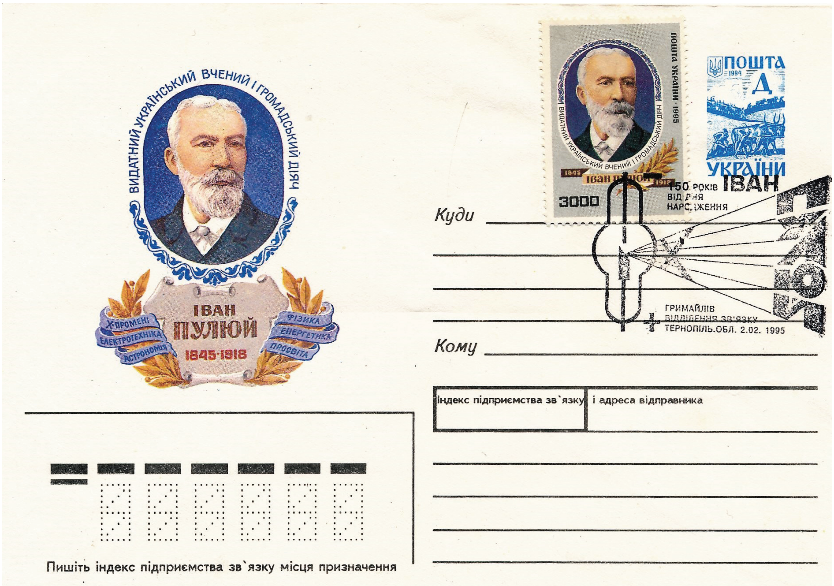
Ivan Puluj měl vysokou vědeckou i společenskou autoritu: byl přísežným[4)] odborným znalcem pro elektrotechniku u c. k. Obchodního soudu pro Čechy, členem Zkušební komise inženýrů a architektů, prezidentem Elektrotechnického spolku v Praze, čestným členem Vídeňské elektrotechnické společnosti, členem c. k. Patentového úřadu a redakčních rad několika odborných časopisů. Při svých 65. narozeninách (1910) byl jmenován dvorním radou a v roce 1916 dokonce nominován na ministerské křeslo. Spolupracoval s význačnými českými inženýry tehdejší doby – Františkem Křižíkem, Emilem Kolbenem a Čeňkem Daňkem.

Tepelná elektrárna v Holešovicích slouží Pražanům už od konce 19. století. Málokdo však ví, že je tomu tak díky Pulujovi. Kolem projektu bylo prý mnoho sporů. Řada tehdejších městských radních i renomovaných technických poradců nesouhlasila ani s budováním elektrárny, která měla vyrábět střídavý proud, ani s návrhem ji postavit za hranicemi města. Hlavním argumentem Pulujových odpůrců doporučujících větší počet stejnosměrných energetických zdrojů bylo varování, že při koncepci jediné elektrárny povede případná porucha k energetickému kolapsu a že rozvod střídavého proudu bude potřebovat navíc ještě síť transformačních stanic. Časem se ukázalo, že u těch, kdo prosazovali malé stejnosměrné elektrárny na pozemcích poblíž městského centra, byly ve hře i zájmy realitních kanceláří. Profesor Puluj se stal průkopníkem elektrifikace také v Mariánských Lázních, Havlíčkově Brodě, Cvikově a Vyšším Brodě.

Většinu prací z fyziky i elektrotechniky uveřejnil v časopisech *Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien, Jahres-Bericht des polytechnischen Vereins in Böhmen, Zeitschrift für Elektro-*

[4)] Přísežný znalec je znalec zavázaný přísahou tomu, kdo jej jmenoval. Znalec slibuje, že podá svůj nález a posudek podle svého nejlepšího vědomí a svědomí a podle pravidel vědy.

technik, Elektrotechnische Zeitschrift, Annalen der Physik und Chemie a Physical Memoirs. Při 150. jubileu Pulujova narození začalo jeho dílo vycházet i v ukrajinštině. Nejsou to jen spisy technického zaměření, z německého vydání v roce 1915 byla přeložena také brožura *Ukrajina a její mezinárodní politický význam.* Píše se v ní, že samostatnost Ukrajiny je klíčem k evropskému míru (*Die Selbständigkeit der Ukraine ist der Schlüssel zur Friedenshalle von Europa*).



Obr. 2: Ukrajinská obálka a známka s prof. Pulujem

L i t e r a t u r a

[1] Gajda, R., Plazko, R.: *Johann Puluj – Rätsel des universalen Talent.* Euro Welt Verlag, Lvov, 2001.

[2] Kraus, I.: *Fyzika v kulturních dějinách Evropy. Století elektřiny.* Nakl. ČVUT, Praha, 2008.

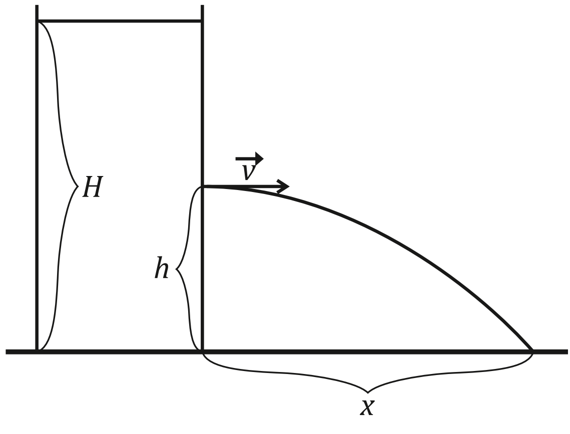
[3] Kraus, I.: *Století fyzikálních objevů.* Academia, Praha, 2014.

Jak dostříknout co nejdále

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

Ukážeme, jak hledáním extrému funkce jedné reálné proměnné lze vyřešit praktickou fyzikální úlohu.

Uvažujme vodorovnou podlahu a na ní nádrž, která je do výšky H naplněna vodou. Nádrž má svislou stěnu, ve které vytvoříme malou dírku ve výšce h. Touto dírkou vytéká voda vodorovně ven z nádrže, viz obrázek. Jak vysoko má být tato dírka, aby voda dostříkla na podlahu co nejdále, předpokládáme-li, že hladina je stále stejně vysoko?



Sloupec vody o výšce $H - h$ nad otvorem způsobí tlak, díky kterému proudí voda otvorem vodorovně ven rychlostí v. Voda dostříkne do vzdálenosti

$$x = vt,$$

kde v je rychlost vody ve vodorovném směru a t je čas, za který voda po opuštění nádrže dopadne na podlahu. Na základě Bernoulliovy rovnice můžeme psát

$$(H - h)\rho g = \frac{1}{2}\rho v^2,$$

kde ρ je hustota vody, tedy

$$v^2 = 2g(H - h).$$

Neuvažujeme, že by se voda pohybovala v nádobě před otvorem, což lze, pokud je otvor malý.

Element vody koná pohyb, který si můžeme představit jako složený ze dvou pohybů: rovnoměrný pohyb ve vodorovném směru rychlostí v a rovnoměrně zrychlený pohyb ve svislém směru se zrychlením g. Ve svislém směru element vody urazí vzdálenost h za čas t, pro který platí

$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$

tedy

$$t^2 = \frac{2h}{g}.$$

Odpor vzduchu zanedbáváme.

My hledáme maximum vzdálenosti x. Abychom se vyhnuli odmocnině, budeme hledat maximum čtverce (druhé mocniny) této vzdálenosti (to je ekvivalentní, protože $x > 0$), tedy hledáme maximum výrazu

$$x^2 = v^2t^2 = 2g(H-h)\frac{2h}{g} = 4h(H-h).$$

Maximum funkce lze hledat pomocí derivace, ale v tomto jednoduchém případě nemusíme ani derivaci použít. Výraz $4h(H-h)$ definuje kvadratickou funkci proměnné h

$$f(h) = 4h(H-h) = -4h^2 + 4Hh,$$

která nabývá nulových hodnot pro $h = 0$ a pro $h = H$. Grafem příslušné funkce je parabola otevřená dolů se svislou osou souměrnosti, proto maximum nastane v polovině mezi $h = 0$ a $h = H$, tedy pro

$$h = \frac{H}{2}.$$

Pak

$$x = H.$$

Závěr: Bude-li otvor ve stěně ve výšce rovné polovině výšky H sloupce kapaliny, dostříkne voda nejdále, a to do vzdálenosti $x = H$.

Poděkování

Za inspiraci k této úvaze jsem vděčný svému příteli Tomáši Mouchovi.

Buď, čím chceš. Už na střední

Monika Smiešková

Rozumný člověk se přizpůsobuje světu, nerozumný chce svět přizpůsobit sobě. Proto veškerý pokrok pochází od těch nerozumných.

George Bernard Shaw

Je to mladé, nadějné, iniciativní, úspěšné a studuje to střední školu. Co to je? No jasně, je to aktivní středoškolák! A že nic takového neexistuje, to je už dávno mýtus. Středoškoláci mají odvahu a inovaci zkrátka zapsanou ve svém genetickém kódu – a je jen otázkou času, kdy jejich kreativní nápady spatří světlo světa. Být podnikatelem nebo vědcem už na střední již dávno není nic nadpřirozeného. A to, že nejsi Albert Einstein mladší, není žádnou překážkou!

Na střední škole mají studenti bezstarostná dětská léta již za sebou a dospělácké problémy většinou ještě daleko před sebou. Za děti je již nikdo nepovažuje, za dospělé však rovněž ne, jak tedy mohou aktivně využít svůj potenciál tak, aby jim věk nebyl překážkou? Podobnými úvahami se na střední zabývali i Robin Ibl, Tomáš Zahradník a Filip Ibl, kterým tak společná cesta ze školy pravidelně zabrala 2 až 3 hodiny, ač měla jen 700 metrů. Právě tehdy se rozhodli, že chtějí středoškolákům pomoci objevit svůj talent a plně rozvinout všechny své schopnosti, i ty doposud neobjevené. Začali společně shromažďovat možnosti a nabídky mimoškolních aktivit, soutěží, stáží a jiných příležitostí, které se středoškolákům ze všech stran nabízejí a které jsou i přesto mnohým neznámé. Tak se stalo, že v roce 2014 založili organizaci *ProStředoškoláky* a vrhli se do toho po hlavě. Nad možnými riziky nebo neúspěchy neměli čas přemýšlet, motivace a touha něco vytvořit měly mnohem větší sílu.

Stvořit a spustit na svém webu databázi se širokou škálou aktivit od exaktních, přes humanitní až po umělecké obory se jim povedlo sice až v roce 2019, ale není se čemu divit, neboť databáze čítá přes 350 aktivit. Ano, to znamená, že mají středoškoláci minimálně 350 možností, jak aktivně trávit svůj volný čas. No není škoda se celou střední jenom nudit doma?

Mimo to se organizaci *ProStředoškoláky* za dobu své existence povedlo uspořádat přes 21 vzdělávacích akcí, kterých se zúčastnilo více než 2 200 středoškoláků z celé České republiky. Jejich stěžejní aktivitou je především soutěž „Středoškolák roku“, která má za cíl oceňovat středoškolské studenty za jejich mimoškolní aktivity. Je jedno, jestli se zabýváš vědou, sportem, podnikáním, dobrovolničením nebo soutěžením - bráno v potaz je v soutěži vše. Porotci složení z řad organizátorů a bývalých výherců soutěže následně vyberou TOP65 středoškoláků, které pozvou na „Vzdělávací akademii“, kde se naučí to, co ve škole ne – podnikání, investování, řečnictví a jiné užitečné soft-skills (jemné dovednosti). TOP25 nejlepších středoškoláků zároveň může zažít „Víkendové setkání“, kde se navzájem jako parta stmelí a mají možnost navázat spolupráci na společných projektech. Na závěrečném Galavečeru jsou jim posléze předány diplomy a hodnotné ceny. Přihlašování do soutěže obvykle probíhá od března do května, ročník 2020 bude velmi brzy vyhlášen.

Tak na co ještě čekáš?

Odstartuj se na `www.prostredoskolaky.cz`

Staň se na den vědkyní

Katarína Křížková Gajdošová, FJFI ČVUT v Praze

Jaroslav Bielčík, FJFI ČVUT v Praze

Abstrakt. Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze (FJFI) tento rok opäť organizovala akciu Staň se na den vědkyní, ktorá sa uskutočnila v utorok 11. februára 2020 od 9:00 do 16:30 hod. v hlavnej budove FJFI v Břehovej ulici (Praha 1). Akcia bola predovšetkým určená študentkám stredných škôl s cieľom podporiť a vyzdvihnúť úlohu žien vo vede.

Staň se na den vědkyní tento rok prebehla už po piatykrát. Akcia vznikla ako odozva na založenie Medzinárodného dňa žien a dievčat vo vede, ktorý vyhlásilo Valné zhromaždenie Organizácie spojených národov v roku 2015. Tento deň každoročne pripadá na 11. februára. Jeho cieľom je pripomenúť, že veda nie je určená výhradne mužskej populácii, ale je taktiež otvorená ženám zaujímajúcim sa o výskum, ktoré je nutné podporiť, a umožniť im prístup k vzdelaniu a účasti na vedeckých aktivitách.

To, že ženy nepatria do vedy, je jedným z mylných názorov v súčasnej spoločnosti. Bohužiaľ, takéto alebo podobné vyjadrenia môžu často viesť k tomu, že strácame potenciálne šikovné adeptky, ktoré by dokázali značne prispieť do výskumu a stimulovať jeho ďalší vývoj. Podľa Českého štatistického úradu je na technických školách, ako napríklad na ČVUT, podiel dievčat len 32,1 % aj napriek tomu, že celkové zastúpenie na vysokých školách všeobecne sa blíži 60 percentám.

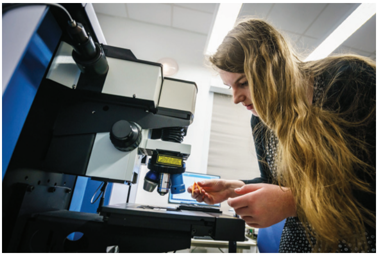
Preto je dôležité ukázať, že ženy vo vede hrajú dôležitú úlohu, a tým podnietiť dievčatá, aby sa voľne rozhodovali pre vedecké odbory. Z tohoto dôvodu organizujeme akciu Staň se na den vědkyní.

Zozačiatku bola akcia zameraná na časticovú fyziku a organizovaná v spolupráci s programom International Masterclasses - hands on particle physics, ktorý zaštiťuje CERN. V roku 2019 sme ponuku tematických okruhov rozšírili o matematiku a kvantové technológie. Vďaka veľkému záujmu o všetky tri témy sme v nich pokračovali aj tento rok.

Na akciu sa prihlásilo 40 dievčat zo stredných škôl z celej Českej republiky. Pre účastníčky boli pripravené štyri prednášky a poobede praktické cvičenia zamerané na rôzne oblasti matematiky a fyziky. Začali sme úvodom do časticovej fyziky s doktorkou Janou Bielčíkovou, ktorú vystriedala docentka Lubomíra Dvořáková s praktickou ukážkou rôznych spôsobov násobenia. Fyzikálne prednášky zavŕšila profesorka Helena Jelínková, ktorá priblížila lasery a ich aplikácie. Nakoniec si účastníčky vypočuli tematickú prednášku o predsudkoch o ženách vo vede, a ako sa nimi nenechať ovplyvniť. Po každej prednáške bola prestávka, ktorá študentkám okrem iného poskytla ideálnu príležitosť na otázky a diskusiu s prednášajúcimi.

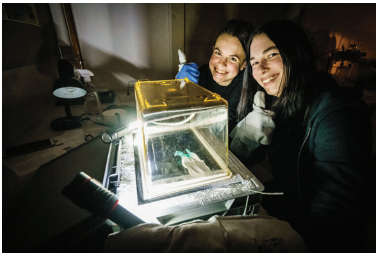
Obr. 1: Spoločná fotka účastníčok s prednášajúcimi a organizátormi akcie. Zdroj [1].

Po obede sa účastníčky rozdelili do učební a laboratórií podľa cvičení, na ktoré sa vopred prihlásili. V rámci časticovej fyziky si študentky vyskúšali prácu s reálnymi dátami z Veľkého hadrónového urýchľovača (LHC) v CERNe, a prostredníctvom videokonferencie sa spojili s vedcami z tejto organizácie, ktorým odprezentovali získané výsledky. Druhá skupinka sa venovala stavbe hmlovej komory, pomocou ktorej detekovali častice, ktoré k nám letia z vesmiru. Ďalšia skupinka nazrela pod pokrievku aplikovanej matematiky, kde si uzrejmila prepojenie matematiky s biológiou, hudbou, či informatikou. Poslednou témou na cvičenia boli kvantové technológie s možnosťou práce s laserami, kde bolo možné študovať interakciu laserového žiarenia so zubnou tkaninou, pomocou luminiscencie odhaliť zhubné nádory, alebo si vyskúšať programovanie na kvantovom počítači.



Obr. 2: Študentka pri práci na cvičení z kvantových technológií – luminiscencia ako prostriedok na odhalenie rakoviny. Zdroj [1].

Akcia sa zdala byť úspešná, o čom svedčí aj značná pozornosť médií a mnoho pozitívnych ohlasov od dievčat okrem iného aj o tom, ako ich akcia povzbudila v záujme o vedu. Dievčatá predovšetkým oceňovali bohatý program, pozitívny prístup organizátorov a príjemné prostredie, v ktorom sa nezdráhali položiť otázku.



Obr. 3: Účastníčky pri stavbe hmlových komôr na cvičeniach z časticovej fyziky. Zdroj [1].

Staň se na den vědkyní bola organizovaná v spolupráci s JČMF a veľkými infraštruktúrami CERN-CZ a BNL-CZ. Prikladáme spoločnú fotografiu účastníčok, a výber z poobedných cvičení. Viac informácií k akcii je možné nájsť na webe [2]. V akcii plánujeme pokračovať aj v budúcnosti a dúfame, že záujem o ňu pretrvá, a budeme sa môcť tešiť z vysokého počtu účastníkov.

Literatura

[1] Mediatéka: *ČVUT obrazem a zvukem.* Dostupné z: https://media.cvut.cz/cs/foto/20200211-stan-se-na-den-vedkyni.

[2] *Staň se na den vědkyní.* FJFI ČVUT, Praha, dostupné z: https://vedkyne.fjfi.cvut.cz.

Československý časopis pro fyziku

Jan Valenta

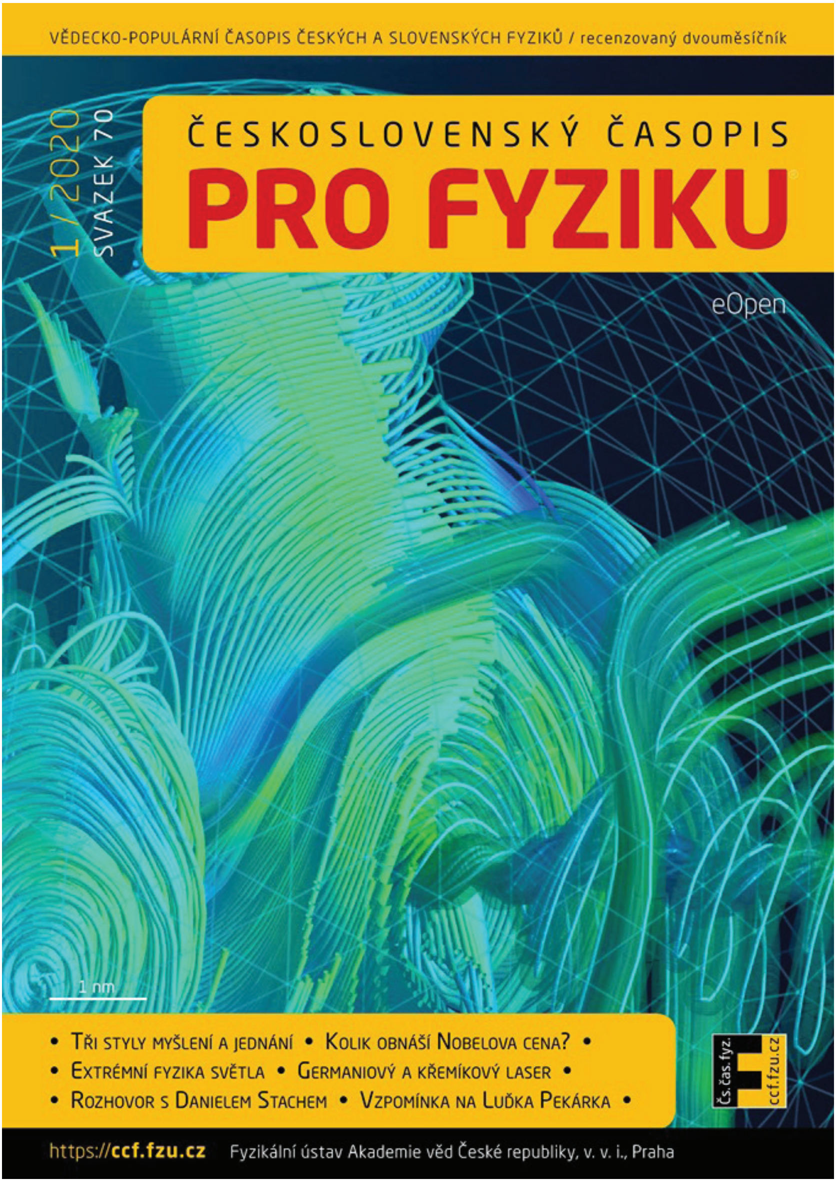
Československý časopis pro fyziku je vědecko-populární fyzikální časopis, který v letošním roce slaví významné jubileum – vstupuje již do svého 70. ročníku. Nejen z tohoto důvodu se redakční rada rozhodla otevřít přístup k elektronické verzi časopisu zdarma. Časopis najdete na adrese `https://ccf.fzu.cz/`.

Ohlédnutí do historie aneb kdy a jak se zrodil „žlutý časopis"

Československý časopis pro fyziku (dále ČSČF) vzniknul v roce 1951 rozdělením Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky, který Jednota českých (československých) matematiků a fyziků (JČMF) vydávala již od roku 1872. Počátkem roku 1969 byl ČSČF rozdělen na souběžně vycházející svazek A psaný česky a slovensky (se žlutou obálkou, odtud obecné označení „žlutý časopis") a cizojazyčný mezinárodní časopis *Czechoslovak Journal of Physics* (svazek B s modrou obálkou), který v devadesátých letech zaniknul. Po určitou dobu byl ČSČF členským časopisem JČMF.

Samostatná redakce ČSČF byla ustavena až na sklonku šedesátých let. Do obsahu začaly být kromě referativních článků zařazovány rovněž aktuality, zprávy a recenze knih, překlady přednášek laureátů Nobelových cen a nová rubrika Otázky a názory. V listopadu 2001 získal časopis novou grafickou úpravu; nová redakce pod vedením Zdeňka Chvoje obnovila většinu z tradičních rubrik, jejichž kontinuita byla přerušena. V letech 2008–2017 vedl ČSČF Libor Juha a za jeho působení došlo k dalším změnám jak ve složení redakce, tak i ve formě a obsahu samotného časopisu. Modernizoval se grafický design, vznikla on-line internetová verze časopisu, včetně elektronického předplatného, a byly zavedeny nové rubriky *Ve zkratce* a *Dokument* (reprodukce zajímavých, ale špatně dostupných, starších textů k tématu čísla).

Od 1. ledna 2018 převzal vedení časopisu Jan Valenta (kmenový pracovník katedry chemické fyziky a optiky, Matematicko-fyzikální fakulty UK), který se pokouší s oživenou redakční radou a oborovými redaktory posunout časopis k širšímu záběru, aby se stal médiem, které fyzikální komunita od studentů a učitelů, po badatele (aktivní i emeritní) bude aktivněji využívat pro vzájemné informování a poučení.


VĚDECKO-POPULÁRNÍ ČASOPIS ČESKÝCH A SLOVENSKÝCH FYZIKŮ / recenzovaný dvouměsíčník
1/2020
SVAZEK 70
ČESKOSLOVENSKÝ ČASOPIS
PRO FYZIKU
eOpen
1 nm
• Tři styly myšlení a jednání • Kolik obnáší Nobelova cena? •
• Extrémní fyzika světla • Germaniový a křemíkový laser •
• Rozhovor s Danielem Stachem • Vzpomínka na Luďka Pekárka •
Čs. čas. fyz.
ccf.fzu.cz
https://ccf.fzu.cz
Fyzikální ústav Akademie věd České republiky, v. v. i., Praha

Československý časopis pro fyziku dnes, na prahu svých sedmdesátých narozenin

Československý časopis pro fyziku není skutečným impaktovaným vědeckým časopisem, ale odborně-populárním médiem české a slovenské fyzikální komunity.

Dosud fungoval v předplatitelském modelu, kdy si knihovny institucí a jednotlivci předplácejí jednotlivé ročníky časopisu tištěné či elektronické. Od letošního jubilejního 70. ročníku jsme se rozhodli (s podporou vedení Fyzikálního ústavu AV ČR) otevřít přístup k elektronické verzi po registraci zdarma. Říkáme tomuto modelu „eOpen“ a nabízíme tím přístup pro čtenáře i autory zdarma. Doufáme, že tímto krokem podstatně zvýšíme počet pravidelných čtenářů zejména mezi učiteli fyziky a možná i mezi nadšenými studenty. S tímto eOpen se vám otevře i „pokladnice“ elektronického archivu časopisu, zatím sahající do roku 2000 – tedy dvacet ročníků časopisu.

Je třeba zdůraznit, že zavedení eOpen neznamená „upozadění“ tištěné verze časopisu, jíž mnozí čtenáři stále dávají přednost. Budeme ji tisknout dále. Nakonec, tištěný časopis přežije i možné kolapsy internetu a digitálních úložišť a budete si ho moci číst při svíčce, až třeba někdy nastane blackout. Hlavně si jej ale jednou budou číst příští historikové vědy a budou z něj čerpat informace o naší vědě současné. Tak se musíme víc snažit – *sub specie aeternitatis*.

Souhrnné informace o časopisu

Časopis vydává: Fyzikální ústav Akademie věd ČR, v. v. i.

vedoucí redaktor: Jan Valenta (valentaj@fzu.cz)

výkonná redaktorka: Jana Žďárská

technický redaktor, grafika a výroba: Jiří Kolář

sekretariát: Ondřej Marek Šípek

ISSN: 0009-0700 (print), 1804-8536 (online)

registrace MK ČR: E 3103

web: http://ccf.fzu.cz/

Adresa redakce: Redakce ČSČF (FZU AV ČR), Na Slovance 2, 182 21 Praha 8, tel. č. 266 052 152

na Slovensku: Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka v Žilině, ul. 1. Mája 32, 010 01 Žilina, e-mail: ivo.cap@fel.uniza.sk.

Distribuci časopisu zajišťuje v ČR společnost SEND.

V zahraničí má distribuční práva: Kubon & Sagner, P.O. Box 240108, D-8000 München 34

* * * Archimédés * * *

☛ Objednávky časopisu ☚

Od roku 2020 vyřizuje objednávky časopisu
Rozhledy matematicko-fyzikální
společnost

MediaCall, s. r. o.
Vídeňská 546/55
639 63 Brno
tel: +420 532 165 165
e-mail: export@mediacall.cz

Objednávky lze realizovat i přes web:
www.zahranicnitisk.com

Tato informace se netýká členů JČMF. Pro ně vyřizuje objednávky předplatného sekretariát JČMF a předplatné je hrazeno spolu s členskými příspěvky.

Elektronická verze čísla 1/2020 je ke stažení na adrese:
https://rozhledy.jcmf.cz/wp-content/uploads/RMF-95-1.pdf
heslo: K5em9lek

ROZHLEDY matematicko-fyzikální

Ročník 95 (2020), číslo 1

OBSAH

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu LaTeX, přijatelný je i formát PlainTeX, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.