

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky

Obor: Fyzika a technika termojaderné fúze



Stabilizace proudu plazmatem na tokamaku GOLEM

Plasma current stabilization on the tokamak GOLEM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Jan Buryanec
Vedoucí práce: Ing. Vojtěch Svoboda, CSc.
Rok: 2023



Katedra: fyziky

Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: Jan Buryanec

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Fyzika a technika termojaderné fúze

Název práce: Stabilizace proudu plazmatem na tokamaku GOLEM
(česky)

Název práce: Plasma current stabilization on the tokamak GOLEM
(anglicky)

Pokyny pro vypracování:

Pro experimenty v oblasti tokamakového plazmatu je důležitá fáze výboje, které se říká „flat top“, kdy je proud plazmatu I_p po své náběhové části již stabilní. V případě tokamaku GOLEM je pro dosažení takového stavu ideálně potřeba zpětnovazební řízení proudu primárními cívkami transformátoru v reálném čase. Osnova práce:

- 1) Základní seznámení s problematikou termojaderné fúze, vysokoteplotního plazmatu v magnetickém udržení, tokamaku GOLEM se zaměřením na generaci elektrického pole na tažení proudu plazmatem a s teorií zpětnovazební řízení technologických procesů v reálném čase.
- 2) Jako úvodní krok s pomocí vhodné numerické simulace navrhnete a sestavte zmenšený a zjednodušený laboratorní model („table top“) transformátorového jádra tokamaku s předdefinovaným řízením proudu primární cívkou pomocí proudových zesilovačů tak, aby proud sekundární cívkou po náběhové části byl v určitém čase konstantní.
- 3) Adaptujte „table top“ řešení pro charakteristiky tokamaku GOLEM a navrhnete pro něj potřebné parametry proudových zesilovačů.
- 4) Implementujete dosavadní výsledky do částečného reálného technologického řešení a provedte základní experimenty ověřující funkčnost této metody přímo na tokamaku.

Doporučená literatura:

- [1] J. Wesson: Tokamaks – third edition. Oxford, 2004
- [2] J. Skalický: Teorie řízení. Ústav výkonové elektrotechniky a elektroniky, 2002
- [3] J. Kocman: Řízení polohy plazmatického prstence na tokamaku GOLEM. Diplomová práce, FJFI ČVUT v Praze, 2011
- [4] M. Valovič: An ohmic heating circuit for the CASTOR tokamak. Czechoslov. J. Phys. 40, 673 (1989)


Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:


Ing. Vojtěch Svoboda, CSc., Katedra fyziky
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze


Datum zadání bakalářské práce: 22.10.2021


Termín odevzdání bakalářské práce: 07.07.2022

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

.....

garant oboru

.....

vedoucí katedry



.....

děkan

V Praze dne 22.10.2021

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Břehová 7
115 19 Praha 1**PROHLÁŠENÍ**

Já, níže podepsaný

Iméno a příjmení studenta: Jan Buryanec
Osobní číslo: 486328
Studijní program: Aplikace přírodních věd
Studijní obor: Fyzika a technika termojaderné fúze
Specializace: /

prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem:

Stabilizace proudu plazmatem na tokamaku GOLEM

vypracoval samostatně a uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Praze dne 02. 08. 2023

podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval svému školiteli Ing. Vojtěchu Svobodovi, CSc. za jeho neocenitelné rady při tvorbě této bakalářské práce. Také bych chtěl poděkovat za jeho ochotu strávit nad konstrukcí systému pro stabilizaci proudu plazmatem nejednou až pozdě do noci a také za trpělivost naučit mne vše potřebné pro zvládnutí této technologické výzvy.

Mé díky patří také Ing. Martinu Himmelovi za pomoc při tvorbě laboratorní verze experimentu a jeho asistenci při implementaci finální technologie pro stabilizaci na samotný tokamak GOLEM.

Jan Buryanec

Název práce:

Stabilizace proudu plazmatem na tokamaku GOLEM

Autor: Jan Buryanec

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Fyzika a technika termojaderné fúze

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Vojtěch Svoboda, CSc.

Katedra fyziky Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Abstrakt: Tato práce se zabývá stabilizací proudu plazmatem na tokamaku GOLEM. Teoretická část obsahuje seznámení se s problematikou jaderné fúze a realizací reaktoru v pozemských podmínkách se zaměřením zejména na magnetické udržení v podobě tokamaků. Následuje bližší popis technologií použitých na tokamaku GOLEM a prozkoumání současného stavu generování proudu plazmatem a možné vylepšení v podobě implementování proudového zesilovače KEPCO prostřednictvím přidavného vinutí na transformátorové jádro tokamaku GOLEM. V další části proběhne tvorba laboratorní verze simulující generování proudu plazmatem zvaná jako table-top experiment a také tvorba příslušné numerické simulace. Jako zjednodušující verze výboje bude využito vakuového výboje bez plazmatu. Po prokázání funkčnosti v laboratorní verzi následují příslušné výpočty pro jedno KEPCO a poté implementace na samotný tokamak GOLEM. Závěrem proběhnou testy stabilizování proudu komorou pro danou implementaci a diskuze počtu zesilovačů KEPCO pro budoucí experimenty.

Klíčová slova: Termojaderná fúze, tokamak, GOLEM, proud plazmatem, proudová stabilizace, table-top experiment

Title:

Plasma current stabilization on the tokamak GOLEM

Author: Jan Buryanec

Abstract: This thesis deals with the stabilization of plasma current on tokamak GOLEM. In the theoretical part, the nuclear fusion and the realization of a fusion reactor in the terrestrial environment is presented. Next, the technologies used on tokamak GOLEM are described and a research of present generation of plasma current and its possible improvements via the implementation of the KEPCO amplifier on the transformer core are done. In the next part, the laboratory table-top experiment simulating the generation of a plasma current is constructed together with its numerical simulations. For simplification, the vacuum discharge was used. After the table-top experiment proved the simulations right, the calculations for one KEPCO are done and then, the sole implementation for tokamak GOLEM. In the end, the testing of a stabilization of current for a given implementation is made and then, the discussion of a number of KEPCO amplifiers and its effects is done.

Key words: Thermonuclear fusion, tokamak, GOLEM, plasma current, current stabilization, table-top experiment

Obsah

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Úvod | 1 |
| 2 | Teoretické seznámení s problematikou | 3 |
| 2.1 | Plazma | 3 |
| 2.2 | Jaderná fúze | 4 |
| 2.3 | Realizace fúzního reaktoru v pozemských podmínkách | 5 |
| 2.4 | Tokamak | 8 |
| 2.4.1 | Původ | 8 |
| 2.4.2 | Současnost | 8 |
| 2.5 | Tokamak GOLEM | 9 |
| 2.5.1 | Základní parametry tokamaku GOLEM | 10 |
| 2.5.2 | Komora | 10 |
| 2.5.3 | Toroidální cívky | 11 |
| 2.5.4 | Ohřev a generování proudu plazmatem | 12 |
| 2.6 | Motivace stabilizace proudu plazmatem na tokamaku GOLEM | 13 |
| 2.7 | Stabilizace proudu plazmatem na tokamaku GOLEM pomocí proudových zesilovačů | 17 |
| 3 | Table-top experiment stabilizace proudu | 21 |
| 3.1 | Schéma výboje generování proudu plazmatem na tokamaku GOLEM | 21 |
| 3.2 | Implementace proudového zesilovače do schématu výboje | 23 |
| 3.3 | Vakuový výboj | 25 |
| 3.4 | Sestrojení RLC obvodu v rámci table-top experimentu | 26 |
| 3.4.1 | Analytické řešení RLC | 26 |
| 3.4.2 | Numerické řešení RLC | 28 |
| 3.4.3 | Laboratorní verze RLC | 32 |
| 3.4.4 | Porovnání Table-top s numerickým modelem | 33 |
| 3.5 | Vakuový výboj v rámci table-top experimentu | 34 |
| 3.5.1 | Numerický model vakuového výboje | 34 |
| 3.5.2 | Laboratorní verze vakuového výboje | 42 |
| 3.6 | Vakuový výboj s přídavným primárem v rámci table-top experimentu | 49 |
| 3.6.1 | Numerický model vakuového výboje s přídavným primárem | 50 |
| 3.6.2 | Laboratorní verze vakuového výboje s přídavným primárem | 57 |
| 4 | Specifikace implementace zesilovače KEPCO do provozu tokamaku GOLEM | 63 |
| 4.1 | Odhad parametrů pro soustavu zesilovačů KEPCO | 63 |
| 4.2 | Odhad parametrů pro jeden zesilovač KEPCO | 65 |
| 5 | Aplikace zesilovače KEPCO do provozu tokamak GOLEM | 67 |
| 5.1 | Implementace přídavného primárního vinutí na tokamak GOLEM | 67 |
| 6 | Závěr | 77 |

| | |
|---|-----------|
| Bibliografie | 79 |
| Přílohy | 83 |
| A Odvození analytického řešení RLC | 83 |

Kapitola 1

Úvod

Termojaderná fúze představuje jednu z nejmambicióznějších technologických výzev, kterým čelí lidstvo v hledání udržitelné a čisté energetické budoucnosti. Na rozdíl od současného jaderného štěpení, při kterém se uvolňuje energie rozštěpením atomů, se při termojaderné fúzi uvolňuje energie slučováním lehkých jader a má potenciál vyvinout efektivní, bezpečný a ekologicky šetrný způsob výroby energie.

Fúze probíhá přirozeně ve hvězdách, na Zemi je však k zažehnutí zapotřebí vysokých teplot (kolem sta milionů stupňů Celsia), což je problém při hledání materiálu, který by provoz takových teplot ustál [1]. Z toho důvodu bylo zapotřebí hledat technologické řešení, které by tento problém s vysokou teplotou byl schopen eliminovat.

Jedním z nadějných způsobů realizace fúzní reakce jsou tokamaky, které jsou schopny pomocí silných magnetických polí nechat horké plazma levitovat a udržovat ho tak v bezpečné vzdálenosti od povrchu reaktorové komory. V současné době je v provozu 77 funkčních tokamaků [2]. Ve Francii nyní probíhá výstavba jednoho z nejdražších vědeckých zařízení na světě – tokamaku ITER. Celkový rozpočet projektu bude do roku 2025 přes 19 miliard eur ([3]), z čehož zhruba polovinu hradí Evropská unie a zbytek ostatní účastnické státy: USA, Rusko, Čína, Japonsko, Jižní Korea, Indie a Velká Británie. Měl by být prvním tokamakem, který z paliva získá více energie, než sám spotřebuje na ohřev plazmatu.

V České republice jsou v současné době provozovány dva tokamaky. Prvním je tokamak COMPASS na Akademii věd, který nyní prochází generální rekonstrukcí a bude označen jako COMPASS-U (upgrade). Druhým je pak menší tokamak GOLEM, který je na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské a slouží primárně pro vzdělávání studentů po celém světě. Vědci a studenti využívající české tokamaky svou prací přispívají k dalšímu rozvoji našich znalostí o procesu fúze, která by měla ve výsledku zajistit energii pro další rozvoj lidstva.

Cílem této bakalářské práce je zabývat se problematikou v oblasti stabilizace proudu plazmatem na tokamacích, konkrétně na tokamaku GOLEM. V teoretické části je seznámení se s uvolňováním jaderné energie se zaměřením zejména na jadernou fúzi a realizaci vysokoteplotního plazmatu v pozemských podmínkách.

Následně bude specifikována jedna z možných realizací termojaderné fúze v podobě tokamaků a jejich fungování a bližší seznámení se s tokamakem GOLEM, na

kterém bude realizace proudové stabilizace realizována pomocí proudových zesilovačů. Je zde diskutováno generování proudu plazmatem na tokamacích v porovnání se současnou technologií tokamaku GOLEM a motivace pro stabilizování proudu plazmatem na tokamaku GOLEM.

Jedním z cílů této práce je také blíže se seznámit s konfigurací proudu plazmatem známou jako flat-top, která je charakteristická konstantní hodnotou proudu plazmatem. Dále bude stanoven cíl realizace stabilizace v podobě zjednodušeného vakuového režimu výboje, kde jako demonstrace funkčnosti řešení bude cílem udržet proud komorou I_{ch} na konstantní hodnotě. Proud komorou a proud plazmatem I_p má totiž podobný mechanismus iniciace, ale technologicky se mnohem jednodušeji vyvolává

Před samotnou implementací je třeba popsat konstrukci laboratorní verze tokamaku nazvanou jako table-top experiment pro simulování elektrického pole potřebného pro tažení proudu komorou, která simuluje proud plazmatem ve zjednodušené verzi. Je zde blíže popsána realizace a jednotlivé fáze konstrukce takového laboratorního modelu a současně s tím příslušný numerický model, který by měl dané chování v sestrojěných obvodech simulovat.

Po úspěšné realizaci v laboratorní verzi proběhnou potřebné výpočty a úvahy pro realizaci na samotný tokamak GOLEM. V závěru je popsána samotná implementace na tokamak GOLEM a diskuze užití proudových zesilovačů na tokamaku GOLEM a možnostech vylepšení nedostatků v budoucích experimentech.

Kapitola 2

Teoretické seznámení s problematikou

2.1 Plazma

Stav hmoty ve formě plazmatu je někdy označováno jako čtvrté skupenství hmoty. Samo Slunce i ostatní hvězdy se skládají z horkého plazmatu zformovaného do velké koule v důsledku masivní gravitace samotné hvězdy. Také se jedná o nejběžnější formu hmoty ve vesmíru, ačkoli se na Zemi vyskytuje velmi zřídka. Odhaduje se, že více než 99% hmoty ve vesmíru je v plazmatickém stavu.

Plazma může být popsáno hned několika ekvivalentními definicemi, mezi které patří například: "Plazma je **kvazineutrální plyn** nabitých a neutrálních částic, který vykazuje **kolektivní chování** [4]". Kolektivní chování je popsáno dále.

Pojem **kvazineutrální** znamená, že v makroskopickém objemu je stejné množství n kladných a záporných nábojů. Takový systém není zdrojem makroskopického elektrostatického pole, jinými slovy: navenek se jeví nábojově jako neutrální látka. Tedy celkový náboj Q_c definovaný jako součet všech kladných q_i^+ a záporných nábojů q_i^- musí být přibližně nulový [5], tj.:

$$Q_c = \sum_{i=1}^n q_i^+ + \sum_{i=1}^n q_i^- \cong 0. \quad (2.1)$$

Pod pojmem **kolektivní chování** jsou míněny nabitě částice plazmatu, které se nechovají jako jednotlivé nezávislé částice. Každá nabitá částice v plazmatu interaguje s mnoha dalšími nabitými částicemi najednou skrze srážky. Kolektivní chování je důsledkem dalekodosahové Coulombovské interakce nabitých částic, kdy vzniká makroskopické elektromagnetické pole v důsledku v něm přítomných nenulových hustot náboje a proudu a také tato hmota je schopna na takové pole reagovat.

V důsledku různých nestabilit je narušována stabilita plazmatu a následně díky elektrostatickým silám má plazma tendenci vrátit se do své stabilní polohy zpět, což má za následek rozkmitání jistých částí plazmatu a tím dochází k narušení lokální kvazineutrality. Tento jev lze pro jednoduchost aproximovat v jisté míře pomocí tlumených kmitů lineárně harmonického oscilátoru, který je řešením pohybových rovnic elektromagnetického pole. Vyřešením těchto rovnic dostaneme jistou frekvenci, kterou nazýváme elektronovou plazmovou frekvencí ω_p a je dána vztahem:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}, \quad (2.2)$$

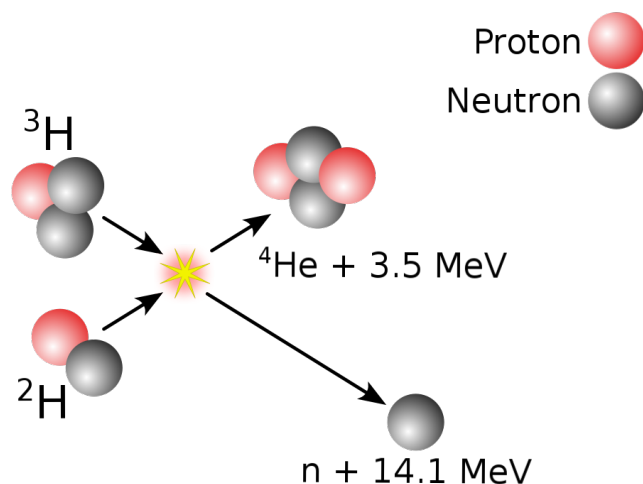
kde m_e je hmotnost elektronu. Tato frekvence je důležitá nejen pro popis různých význačných vlastností plazmatu, ale také pomocí ní lze říci, kdy převažuje kolektivní chování a to tehdy, když je splněna následující nerovnost [6]:

$$\omega_p > \nu_e, \quad (2.3)$$

kde ν_e je srážková frekvence binárních srážek a jak plyne z definice plazmatu, tak v plazmatu binární srážky zpravidla nesmí dominovat.

2.2 Jaderná fúze

Jaderná fúze neboli syntéza je jaderný proces, který funguje na opačném principu, než je štěpná reakce. Dochází zde naopak ke sloučení lehkých jader na jádra těžší za uvolnění velkého množství energie z vazebné energie (viz Obr.2.1).



Obrázek 2.1: Obecný princip fungování jaderné fúze pro deuterium-tritiovou syntézu. Převzato a upraveno z [7].

Jaderná fúze probíhá přirozeně v nitrech hvězd. Jedná se nejenom o přírodní zdroj energie velmi důležitý pro život na Zemi v podobě světla a tepla ze Slunce, ale stojí také za vznikem první hmoty ve vesmíru po Velkém třesku, během něžž byly zpočátku v mladém vesmíru přítomny pouze lehké prvky jako vodík a helium (přibližně 3 minuty po Velkém třesku), které se později zformovaly do těžších prvků v prvních hvězdách. Atomy těžší než železo pak vznikají při výbuchu například supernov, ale ne přímo prostřednictvím fúze, spíše díky záchytu neutronů [8].

Iniciace štěpné reakce je poměrně "jednoduchá", avšak za cenu neschopnosti tuto reakci definitivně zastavit, což přináší řadu technologických problémů, které je nutné řešit. U jaderné fúze je však problém principiálně opačný, protože iniciovat tuto reakci není triviální záležitost v pozemských podmínkách, ale naopak ukončení je

velmi snadné.

Problémem iniciace fúzní reakce spočívá v elektrostatickém odpuzování jader, protože atomární obaly většinou neexistují, látka je směsicí holých jader a volných elektronů [9]. Pro popis lze provést pomocí elektrostatického potenciálu U_C . Pro přiblížení jader na dostatečnou vzdálenost je třeba překonat tzv. **Coulombovskou bariéru**, která je popsána právě tímto potenciálem U_C . Závislost potenciálu U_C vzájemného působení dvou atomů závisí na jejich vzájemné vzdálenosti [10] a je dán vztahem:

$$U_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\left(A_1^{\frac{1}{3}} + A_2^{\frac{1}{3}}\right) r_0}, \quad (2.4)$$

kde $Z_{1,2}$ jsou protonová čísla daných atomů, $A_{1,2}$ jsou nukleonová čísla a $r_0 = 1.25$ fm je konstanta [11]. Například pro atomy deuteria je potřeba dosáhnout přiblížení přibližně dvojnásobku svých poloměrů, což odpovídá hodnotě r_0 . Po dosazení $Z_{1,2} = 1$ a $A_{1,2} = 2$ do vztahu (2.4) dostaneme velikost potenciálové bariéry U_C okolo 457 keV, což v přepočtu na teplotu odpovídá asi 5,3 miliardy Kelvinů.

Provoz takových teplot je v pozemských podmínkách nemyslitelný, protože žádný známý materiál by takto enormní teploty dlouhodobě nevydržel, neboť i ty nejodolnější materiály vydrží maximální teploty okolo 3000 Kelvinů [1]. Takových teplot nedosahuje ani naše Slunce, kde se teplota pohybuje v řádech desítek milionů Kelvinů, ale přesto zde probíhá jaderná fúze přirozeně v důsledku kvantového tunelování. Jedná se o kvantový jev, který porušuje principy klasické fyziky tak, že částice je schopna protunelovat se skrz potenciálovou bariéru U_C , která může mít vyšší energii, než tunelující částice. Díky tomuto jevu se značně snižují nároky na energii - například pro reakci deuteria s tritiem je velikost potenciálové bariéry odhadnuta na 300 keV. Díky tunelovému jevu klesnou nároky na pouhých 14 keV, která odpovídá teplotě přibližně 160 milionů stupňů Celsia, což je stále velmi vysoká teplota, ale v pozemských podmínkách je již realizovatelná. Při takto vysokých teplotách všechny známé látky jsou plně ionizovány a jsou ve formě plazmatu.

Procesu, kdy dochází k fúzní reakci prostřednictvím působení vysoké teploty a tlaku se nazývá **Termojaderná fúze**. V důsledku působení vysoké teploty a tlaku dochází ke zvýšení kinetické energie všech zúčastněným částicím najednou a tak se zvýší i pravděpodobnost iniciace fúzních reakcí. V současné době panuje přesvědčení, že termojaderná fúze je jediný způsob jak dosáhnout energie z jaderné fúze v pozemských podmínkách a být tak potenciální budoucí elektrárnou, která se minimálně vyrovná svoji účinností té jaderné.

2.3 Realizace fúzního reaktoru v pozemských podmínkách

Pro realizaci fúzního reaktoru je zapotřebí nejen stanovit technologické parametry pro budoucí fúzní zařízení, ale také parametry pro fúzní palivo. Inženýrské parametry pro fúzní palivo zformuloval v roce 1955 britský inženýr J.D.Lawson do

jedné elegantní nerovnice [12] nazvané **Lawsonovo kritérium**. Lawsonovo kritérium je obecně dáno elegantní nerovností:

$$n \cdot \tau_E \geq f(T), \quad (2.5)$$

kde n je hustota plazmatu, τ_E je doba udržení energie a $f(T)$ je funkce teploty, která se pro každé palivo liší. V případě D-T reakce je Lawsonovo kritérium [13] dáno vztahem:

$$n \cdot \tau_E \geq \underbrace{\frac{12k_B T}{\langle \sigma v \rangle E_{f(i)}}}_{f(T)} \frac{1}{\xi + \frac{1}{Q}}, \quad (2.6)$$

kde k_B je Boltzmannova konstanta, T je termodynamická teplota, $\langle \sigma v \rangle$ je reaktivita plazmatu, $E_{f(i)}$ je energie uvolněná během jedné fúzní reakce, Q je faktor zesílení definovaný jako poměr mezi fúzním výkonem P_F a výkonem ohřevu P_H a ξ je část využitelné energie, tj. energie, kterou lze energeticky využít. Například pro D-T reakci je $\xi = \frac{1}{5}$, která odpovídá $\frac{1}{5}$ celkového fúzního výkonu P_F . Tento výkon odpovídá pouze výkonu α částic a zbývající $\frac{4}{5}$ celkového fúzního výkonu P_F je odnášena neutrony.

Po dosazení konkrétních hodnot do (2.6) lze odhadnout hodnotu teploty potřebné pro splnění nerovnosti. Pro D-T reakci je zapotřebí teplota přibližně 160 milionů stupňů Celsia. Po dosazení do (2.6) lze dostat hodnotu přibližně v řádech 10^{20} . Pak se nerovnost redukuje na:

$$n \cdot \tau_E \geq 10^{20} [\text{m}^{-3} \cdot \text{s}]. \quad (2.7)$$

Z výše uvedené nerovnosti (2.7) pro D-T reakci je patrné, že pro splnění této nerovnosti, resp. energetické rovnováhy, je možné dosáhnout při vhodné volbě hodnoty součinu $n \cdot \tau_E$. Z energetického hlediska chceme dokonce najít minimální hodnotu součinu, protože ta bude z hlediska energetických nákladů nejvýhodnější. Součinu, který bude roven alespoň hodnotě 10^{20} , lze dosáhnout v zásadě dvěma způsoby, které mají přímý vliv na konstrukci budoucího fúzního reaktoru [14].

Jednou ze zamýšlených možností je maximalizace hustoty paliva n a naopak minimalizace doby udržení τ_E . Pro takovou volbu parametrů se využívá konstrukční způsob řešení v podobě tzv. **Inerciálního udržení**. Konkrétní podmínky pro D-T reakci pomocí inerciálního udržení jsou stanoveny přibližně pro hustotu plazmatu $n = 10^{30}$ jader/ m^3 a dobu udržení stanovené na $\tau_E = 10^{-10}$ s. Inerciální udržení probíhá prudkým stlačením fúzního paliva prostřednictvím soustředěných laserových paprsků, které díky tlaku záření (nejčastěji rentgenového) stlačí palivovou hmotu natolik, že má šanci zažehnout fúzi a uvolnit tak energii.

Tento způsob fungování budoucí elektrárny není alespoň prozatím optimální kvůli neschopnosti kontinuálního provozu, malé účinnosti a životnosti elektrárny, nákladné konstrukci a provozu, drahé výrobě paliva a nakonec také komplikovanému přenosu energie z reaktoru.

Druhou zamýšlenou možností splnění Lawsonova kritéria je naopak maximalizace doby udržení τ_E a minimalizace hustoty n . Tento způsob volby parametrů se realizuje v podobě **Magnetického udržení**. Konkrétní hodnoty pro splnění parametrů Lawsonova kritéria pro magnetické udržení jsou odhadem pro D-T reakci stanoveny při hustotě paliva přibližně $n = 10^{20}$ jader/m³, což je přibližně o 5 řádů méně než vzduch. Při této volbě hustoty zůstává plazma globálně stabilní při realistických intenzitách magnetického pole v řádech desítek Tesla. Doba udržení τ_E se odhadem bude pohybovat v řádech sekund, ale je velmi obtížné tuto dobu přesně stanovit.

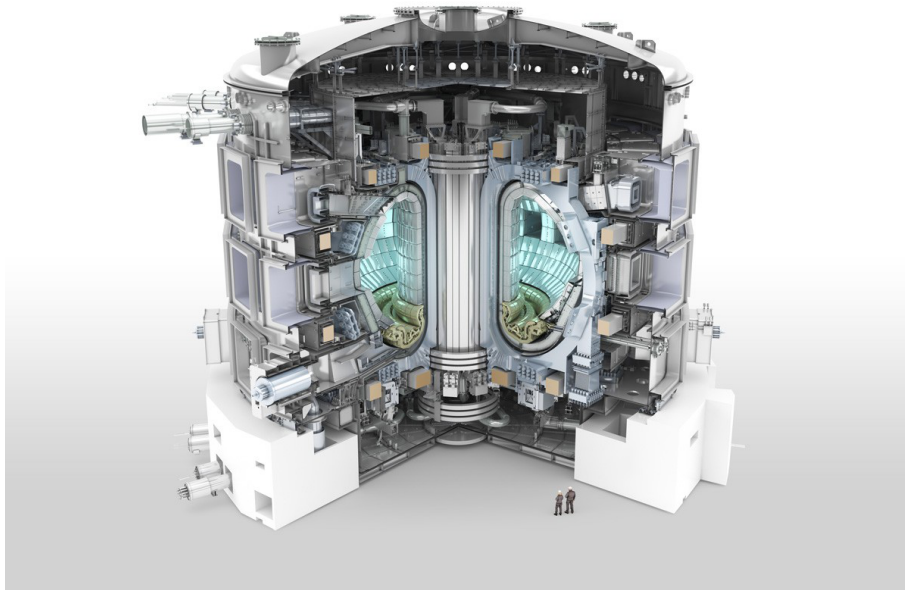
Pro zažehnutí fúzní reakce je zapotřebí teplot ~ 160 milionů stupňů Celsia, což žádný známý materiál není schopen dlouhodobě udržet aniž by došlo k poškození stěn reaktoru, v horším případě k tavení reaktoru. Taktéž je palivo, které je zahřáto na takto vysoké teploty, ve formě plazmatu. Výhoda plazmatu je v jeho kolektivním chování, které spočívá ve schopnosti reagovat jako celek na elektromagnetická pole. Tato vlastnost je velmi důležitá z hlediska konstrukce budoucí elektrárny, protože takovou hmotu můžeme nechat levitovat zvolením vhodné magnetické konfigurace.

Mezi nejúspěšnější zařízení využívající magnetického udržení patří **tokamaky** využívající torodiální geometrii magnetického pole. Horké plazma je udržována pomocí šroubovicového magnetického pole. Mezi další podobné zařízení využívající magnetické udržení patří například **stelarátory**, které se od tokamaků liší zejména absencí generování proudu v plazmatu.

V současné době nejnadějnější koncepty budoucích fúzních elektráren jsou **tokamaky**, protože jsou svým provozem velmi podobné současným elektrárnám, jsou konstrukčně levnější a to včetně výroby paliva a hlavně reakce jsou zde značně stabilnější, než u inerciálního udržení. Samozřejmě i magnetické udržení má své neopomíjitelné problémy. Mezi hlavní nevýhody patří například torodiální geometrie magnetického pole, která stojí hned za řadou nestabilit jako jsou například MHD nestability [15], mezi které patří například *gradB* nestabilita.

2.4 Tokamak

Tokamak je zařízení schopné udržet vysokoteplotní plazma. To je zajištěno pomocí levitace vysokoteplotního plazmatu zprostředkované vhodnou konfigurací magnetických polí. Tokamak tedy řadíme mezi zařízení s **magnetickým udržením** plazmatu. V současné době se jedná o nejnadějnější způsob realizace termojaderné fúze jako budoucí elektrárny v pozemských podmínkách díky dosavadním výsledkům.



Obrázek 2.2: Největší plánovaný tokamak současnosti jménem ITER, který je zároveň největším mezinárodním projektem v oblasti termojaderné fúze vůbec. Převzato z [16].

2.4.1 Původ

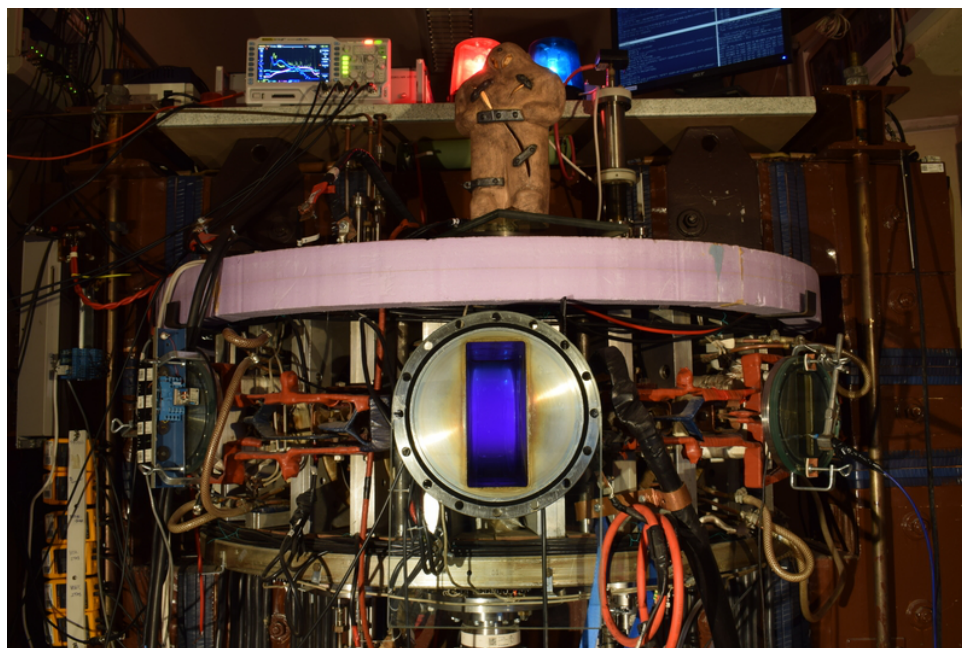
Toto zařízení je původem z Ruska. Název **Tokamak** je z ruské zkratky **TO**roidalnaja **KA**mera i **MA**gnitnyje **K**atuški, což v překladu znamená **toroidální komora s magnetickými cívkami** [17]. Tento koncept se poprvé objevil v 50. letech minulého století v Kurčatově ústavu v Sovětském svazu s jehož myšlenkou přišli poprvé Igor Jevgeněvič Tamm a Andej Sacharov. První tokamak byl postaven v roce 1951 jako experimentální zařízení potvrzující Kruskal-Shafranovovy podmínky stability.

2.4.2 Současnost

Termojaderná fúze je jako nadějný budoucí zdroj čisté energie v čele s tokamaky předmětem intenzivního výzkumu. V současné době se v jižní Francii staví největší tokamak na světě s názvem **ITER** vyobrazený na Obr.2.2. Jedná se o zkratku **I**nternational **T**hermonuclear **E**xperimental **R**eactor, ale latinsky to znamená **CESTA**. Cílem tohoto mezinárodního projektu je technologická demonstrace schopnosti vytvořit a udržet termojadernou fúzi s kladným energetickým ziskem.

2.5 Tokamak GOLEM

Tokamak GOLEM je nejdéle fungující tokamak na světě. Jednalo se o první zařízení určené pro základní výzkum mikrovlnného ohřevu pod označením **TM-1** nebo **TM-1-MH**, které se zařazovalo do kategorie malých tokamaků [18]. Pod tímto označením se zařízení do května 1976 nacházelo v Ústavu atomové energie I. V. Kurčatova v Moskvě a poté bylo přesunuto do Ústavu fyziky plazmatu ČSAV, kde dostalo nové jméno **CASTOR**. V roce 2006 bylo zařízení CASTOR nahrazeno větším a modernějším tokamakem jménem **COMPASS** a CASTOR byl převezen na Fakultu jadernou a fyzikálně inženýrskou.



Obrázek 2.3: Fotografie tokamaku GOLEM. Převzato z [19]

Pod označením **GOLEM** vykonává novou úlohu v oblasti zejména vzdělávání studentů v oboru termojaderné fúze a po celém světě díky jeho důmyslnému, na dálku řízenému systému jménem **Dirigent**, pomocí kterého lze provoz tokamaku ovládat odkudkoli prostřednictvím internetu. V další části budou blíže popsány některé základní komponenty tokamaku GOLEM.

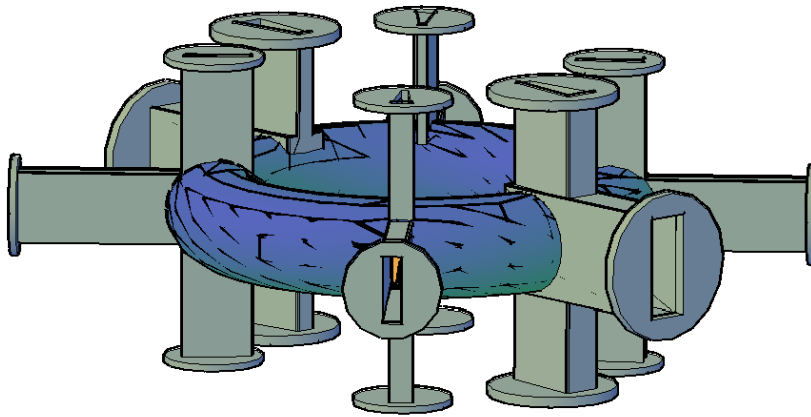
2.5.1 Základní parametry tokamaku GOLEM

| Základní specifikace tokamaku GOLEM | |
|-------------------------------------|--|
| Velký poloměr komory | $R = 0.4 \text{ m}$ |
| Malý poloměr komory | $r = 0.1 \text{ m}$ |
| Poloměr plazmatu (limiterový) | $a = 0.085 \text{ m}$ |
| Toroidální magnetické pole | $B_t < 0.5 \text{ T}$ |
| Počet cívek generující B_t | $N = 28$ |
| Proud plazmatem | $I_p < 8 \text{ kA}$ |
| Délka výboje | $\tau < 20 \text{ ms}$ |
| Centrální elektronová teplota | $T_e(0) < 80 \text{ eV}$ |
| Tlak pracovního plynu | $1 \text{ mPa} \leq p_{H_2} \leq 70 \text{ mPa}$ |

Tabulka 2.1: Tabulka základních parametrů tokamaku GOLEM, dostupné z [20].

2.5.2 Komora

Vakuová komora tokamaku GOLEM je vyrobena z 0,2 mm tlustého nerezového plechu ve tvaru **toroidu**. V komoře se nachází šest diagnostických sekcí ve tvaru T a každá sekce disponuje třemi porty, které lze vidět na Obr.2.4.

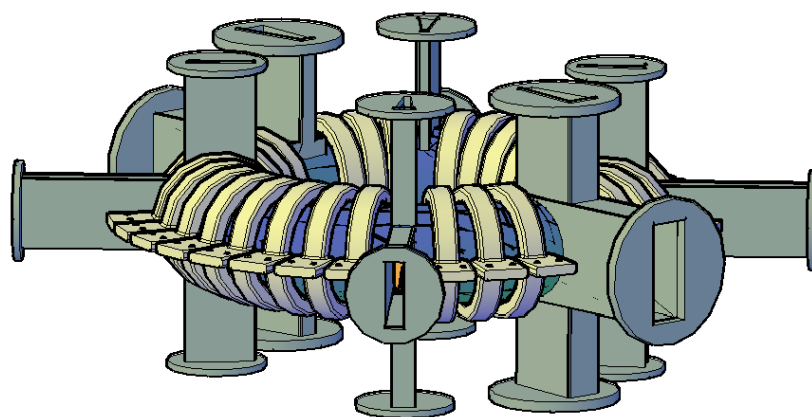


Obrázek 2.4: Model vakuové komory neboli lineru tokamaku GOLEM.

U modernějších tokamaků se používají průřezy komorou označované jako D Shape, tj. průřez komorou ve tvaru D, kterým disponuje i samotný budoucí tokamak ITER, který je na Obr.2.2 kde tento tvar lze vidět. V případě všech možných konfigurací má komora primární funkci jako vakuová nádoba, která svým tvarem kopíruje vzniklé helikální pole a také by měla odolat vysokým teplotám.

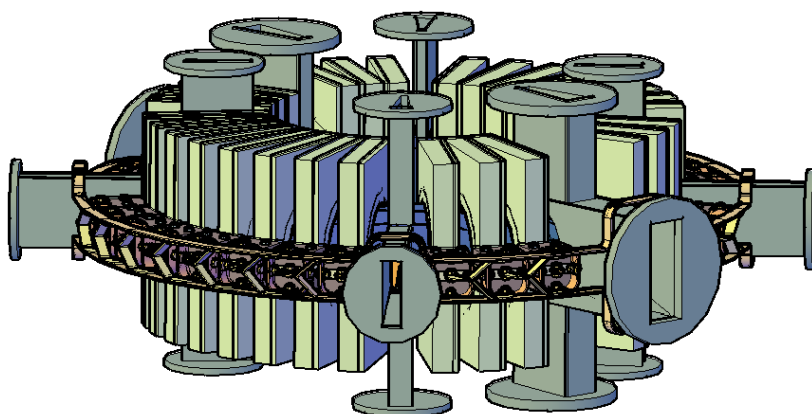
2.5.3 Toroidální cívky

Toroidální magnetické pole na tokamaku GOLEM je zprostředkováno pomocí 28 cívek, které obepínají vakuovou komoru. Tyto cívky slouží k vytvoření **toroidálního** magnetického pole, které společně s **poloidálních** magnetickým polem vytváří **šroubovicové** magnetické pole, někdy také označované jako **helikální**. Toto výsledné magnetické pole zajistí levitaci částic plazmatu obíhajících kolem magnetických silokřivek a nedochází tak k úniku částic na stěnu komory, nebo se alespoň tento jev minimalizuje. Cívky jsou schopny dosáhnout magnetických polí v okolo $B_t < 0,5$ T. V současné době jsou napájeny pomocí kondenzátorové baterie, což má za následek nekontrolované uvolnění energie do těchto cívek.



Obrázek 2.5: Model toroidálních cívek okolo komory tokamaku GOLEM.

Cívky jsou navzájem propojeny měděnými pláty pro společné napájení všech cívek a zakryté v hliníkových boxech. Vše je zobrazeno na Obr.2.6.



Obrázek 2.6: Model toroidálních cívek okolo komory tokamaku GOLEM včetně napájecí kaskády a krycích hliníkových boxů.

2.5.4 Ohřev a generování proudu plazmatem

Pro tuto bakalářskou práci je nejvíce stěžejní částí tokamaku GOLEM indukování proudu plazmatem, které na tokamaku probíhá prostřednictvím masivního kovového transformátorového jádra ve tvaru osmičky (viz Obr.2.7). Na transformátorové jádro je namotáno šest navzájem propojených primárních vinutí vždy po osmi závitech. Změna proudu v primárním vinutí generuje magnetický indukční tok, který je většinou veden kovovým jádrem a v důsledku Faradayova zákona elektromagnetické indukce se ve vodivém plazmatu ale i komoře jako sekundární vinutí (někdy nazývané jako jeden závit) na krátko generuje napětí U_{loop} . Pro indukované napětí U_{loop} na závit z Faradayova zákona platí vztah [21]:

$$U_{\text{loop}} = -\frac{d\phi}{dt}, \quad (2.8)$$

kde ϕ je magnetický indukční tok a mínus před výrazem je z Lenzova zákona. Platí přepočítání na indukovaný proud plazmatem I_p pomocí indukovaného napětí na závit U_{loop} prostřednictvím Ohmova zákona jako:

$$I_p = \frac{U_{\text{loop}}}{R_p}, \quad (2.9)$$

kde R_p je celkový odpor plazmatu, který obecně není konstantní ale proměnný v čase. Jak již bylo řečeno, indukovaný proud plazmatem má navíc sekundární roli nezbytnou pro stabilizaci plazmatu, protože v důsledku Ampérova zákona vzniká okolo tekoucího proudu plazmatem poloidální magnetické pole, které je potřebné pro vznik výsledného šroubovicového pole. Indukovaný proud I_p je také hlavním zdrojem ohřevu plazmatu na tokamaku GOLEM v podobě ohmického ohřevu P_{OH} dané vztahem:

$$P_{\text{OH}} = U_{\text{loop}} \cdot I_p. \quad (2.10)$$

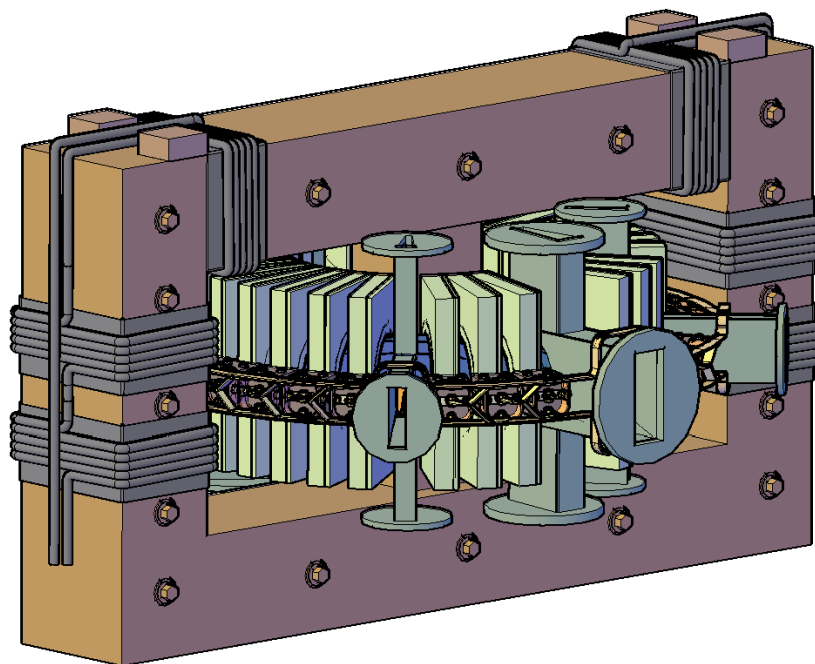
Ohmický ohřev plazmatu má však svá omezení, mezi které patří například omezená schopnost indukovat proud plazmatem prostřednictvím magnetického indukčního toku tekoucího kovovým jádrem. Tato schopnost je limitována tzv. nasycením transformátorového jádra, kdy dojde k dosažení maximální hodnoty magnetického indukčního toku a jádro není nadále schopno spolehlivě generovat indukovaný proud v sekundárním vinutí (v plazmatu) [22]. Dalším nezanedbatelným faktorem je klesání odporu plazmatu během výboje, kdy se tak ohmický ohřev stává neefektivním.

V současné době probíhá napájení primárního vinutí taktéž prostřednictvím kondenzátorové baterie. Kvůli nekontrolovanému toku energie z kondenzátorové baterie je znemožněno více ovládat stabilizaci. Tato problematika je popsána v další podkapitole.

Vzniklé poloidální pole obvykle bývá výrazně menší než toroidální, což má za následek malou helicitu (šroubovitost pole). To znamená, že během jednoho oběhu pomyslného bodu po silokřivce v poloidálním směru dojde k výrazně méně oběhům v toroidálním směru, což může vést hned k řadě nestabilit v plazmatu. Tato vlastnost je reprezentována pomocí bezpečnostního faktoru q , který je dán vztahem:

$$q = \frac{r \cdot B_t}{R \cdot B_p}, \quad (2.11)$$

kde r je malý poloměr, R je velký poloměr, B_t je magnetická indukce v toroidálním směru a B_p je magnetická indukce v poloidálním směru. Obecně platí, že při vyšších hodnotách q vedou k vyšší stabilitě systému. Nejnižších hodnot q je dosahováno na okrajích plazmatu, kde jsou také nejvíce zastoupeny různé nestability v plazmatu. Výše uvedený vzorec (2.11) funguje pro tokamaky s kruhovým profilem komory (jako je například tokamak GOLEM), není tedy příliš použitelný pro modernější typy využívající například profil komory ve tvaru D, kde je zapotřebí tento vzorec příslušně modifikovat.



Obrázek 2.7: Model transformátorového jádra a namotaného primárního vinutí tokamaku GOLEM.

2.6 Motivace stabilizace proudu plazmatem na tokamaku GOLEM

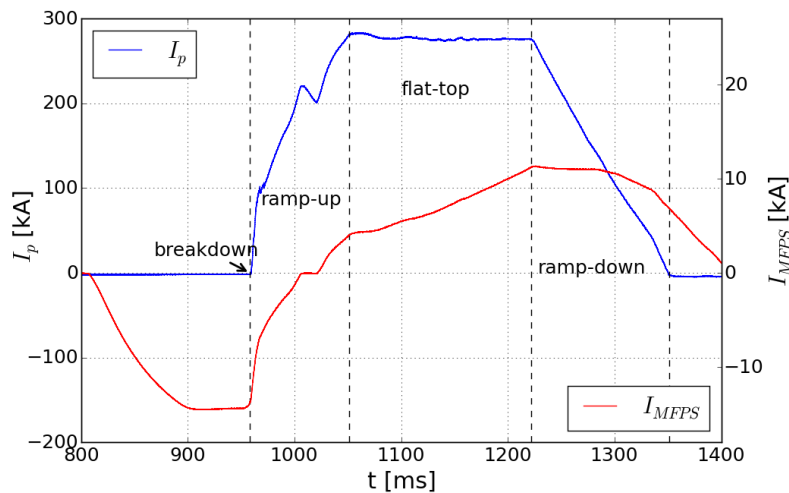
Jak již bylo řečeno, nedílnou součástí každého tokamaku je indukování proudu plazmatem potřebné nejen jako jeden z možných ohřevů plazmatu v podobě ohmického ohřívání, ale také jako důležitý prvek stabilizace v podobě generování poloidálního pole B_p . K takovému provozu je zapotřebí nemalé množství energie a běžné experimentální tokamaky musí být napájeny například pomocí velkých setrvačníků [23].

Během experimentů na tokamacích má optimální průběh proudu plazmatem tvar tzv. **flat-topu**. To znamená, že po počátečním nárůstu proudu (neboli náběhové části, tzv. ramp-up) se následně udržuje buď indukovaný proud, nebo tažený, tzv. **current drive** v plazmatu na konstantní hodnotě až do ukončení výboje (v ideálním případě). Konstantní hodnota proudu plazmatem zajišťuje neměnné podmínky

v tokamacích z hlediska stability a samotného udržení plazmatu. Lze tak předejít například různým MHD nestabilitám nebo alespoň omezit jejich vliv na průběh výboje [24].

U velkých tokamaků je časový průběh proudu plazmatem nejčastěji řízen pomocí proměnlivého proudu v cívkách poloidálního pole [24], někdy také ve vinutí centrálního solenoidu [24] (vzduchové jádro místo kovového pro eliminaci neschopnosti indukovaní proudu v důsledku nasycení kovového jádra). Pro ukázkou takového průběhu proudu plazmatem a dosažení flat-top konfigurace využijeme naměřených dat vyobrazených na příloženém Obr.2.8 z tokamaku **COMPASS** dostupné z [25].

Předdefinovaný průběh proudu tekoucí v cívkách poloidálního pole [24] (někdy také označováno jako magnetizační pole) je označován jako I_{MFPS} (Magnetising Field Coils) a jejich napájení je označováno MFPS (Magnetising Field Power Supply).



Obrázek 2.8: Ukázka dosažení flat-top průběhu na tokamaku COMPASS s předdefinovaným proudem I_{MFPS} v primárním vinutí a vzniklým indukovaným proudem plazmatem I_p jako sekundárním vinutí. Převzato z [25].

Z příloženého Obr.2.8 můžeme vidět, že napájecí proud I_{MFPS} klesá zpočátku do záporných hodnot. To je z důvodu maximálního rozsahu proudu potřebné pro zajištění dostatečně změny pro generování indukovaného proudu v plazmatu na dostatečně dlouho. Po dosažení hodnoty proudu přibližně -150 kA se přibližně 50 ms počká a následně dojde k prudkému nárůstu proudu v cívkách poloidálního pole. Tento bod výboje je označován jako **breakdown**. Do tohoto bodu zůstává proud plazmatem I_p na nulové hodnotě, protože se jedná pouze o přípravnou fázi před samotným výbojem.

Od doby breakdownu do přibližně 1000 ms dochází k nárůstu proudu na I_{MFPS} a také k nárůstu proudu plazmatem I_p . Zde je další význačný bod výboje, protože proud na I_{MFPS} se blíží k nulové hodnotě a bude zde docházet k přepólování. Lze si povšimnout, že proud na I_{MFPS} je chvíli na nulové hodnotě. Proud plazmatem I_p se pohybuje přibližně okolo 200 kA. Nulový proud na I_{MFPS} je z důvodu krátké latence tyristorového měniče, který zajistí pokračování napájení s původní polaritou

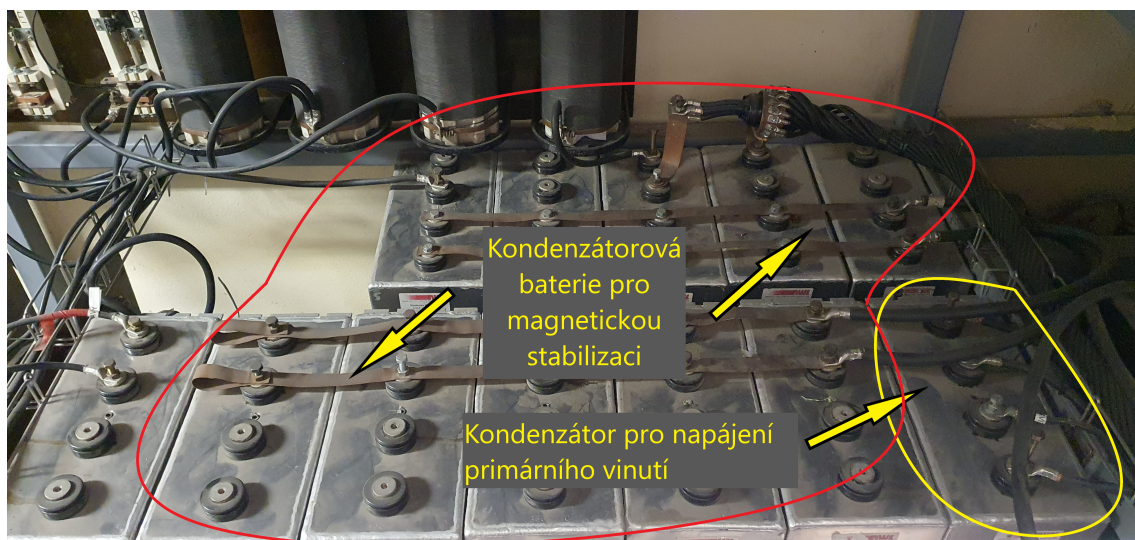
(tj. částice plazmatu nebudou v důsledku přepólování urychlovány opačným směrem, což by mělo za následek selhání výboje). Poté opět dochází k nárůstu proudu na I_{MFPS} přibližně do doby 1050 ms, kde je další význačný bod. Během této doby dochází opět k nárůstu proudu plazmatem přibližně na hodnotu okolo 290 kA. Fáze od doby breakdownu do přibližně 1050 ms je označena jako **ramp-up**.

Po dosažení hodnoty ramp-up dochází k dalšímu nárůstu proudu na I_{MFPS} , ale změna proudu je řádově nižší a navíc má lineární charakter přibližně do doby okolo 1220 ms, kdy dosáhneme maximálního proudu na I_{MFPS} okolo 120 kA. V tomto časovém okně se již proud plazmatem I_p nezvyšuje a je udržován na své předchozí hodnotě okolo 290 kA. Zde dochází k již zmiňovanému průběhu výboje známém jako **flat-top**.

Po dosažení maximální hodnoty proudu v poloidálních cívkách není magnetizační vinutí schopné dodat plazmatu dostatečný magnetický tok, který je dán změnou proudu v tomto vinutí. Dochází ke ztrátě stability proudu plazmatem a k poklesu proudu v poloidálních cívkách a výboj je postupně ukončen. Tuto fázi výboje označujeme jako **ramp-down**.

V případě tokamaku COMPASS se jedná o napájení pomocí setrvačnicků. Potřebný proud v poloidálních cívkách zajišťuje komplikovaný řídicí obvod, který se skládá ze sestavy tyristorů a odporů, které dokáží tvarovat průběh proudu ze setrvačnickového zdroje.

V případě tokamaku **GOLEM** je způsob napájení zcela odlišný. Jedná se o způsob napájení pomocí silné kondenzátorové baterie (viz Obr.2.9), která byla schopna dodat dostatečné množství energie ke klíčovým komponentům. Klíčové komponenty jsou rozděleny do dvou skupin, mezi které patří napájení toroidálních cívek a napájení primárního vinutí navinutého na transformátorovém jádře tokamaku GOLEM.

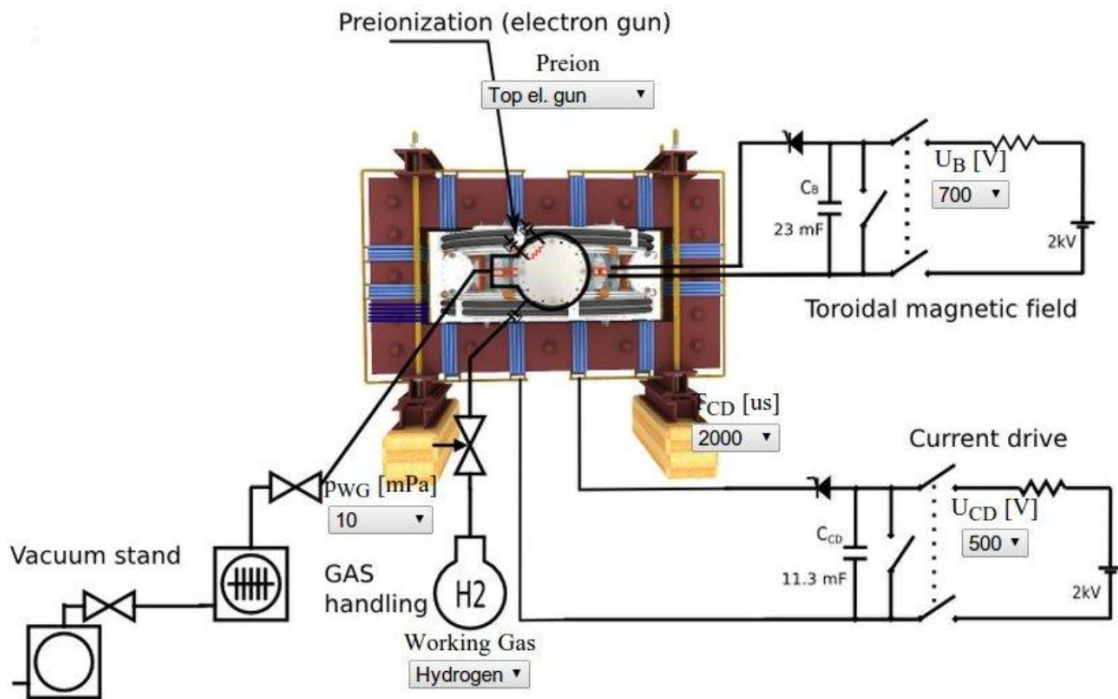


Obrázek 2.9: Foto transformátorové baterie tokamaku GOLEM. Převzato z [26].

Nevýhodou kondenzátorů obecně je jejich nekontrolované vybití, které má zásadní vliv na průběh výboje tokamaku. Křivka vybíjení kondenzátorové baterie je pevně dána parametry RLC obvodu. Mezi tyto zásadní parametry, jak je již patrné

z názvu, bezprostředně patří odpor R , indukčnost L a kapacita C .

V případě tokamaku GOLEM je obvod primárního vinutí (Current drive, viz Obr.2.10) velmi podobný idealizovanému RLC obvodu. Do jisté míry budeme schopni napájecí obvod primárního vinutí tokamaku GOLEM tímto idealizovaným RLC obvodem aproximovat. Pro generování proudu plazmatem se napájecí obvod primárního vinutí skládá z primárních cívek, kondenzátorové baterie, která je spouštěna tyristorem a obvodu pro samotné napájení společně se zkratovacím obvodem. Jediné, co zde chybí avšak bude nutné započítat je celkový odpor vybíjecí části obvodu, který bude třeba zjistit.

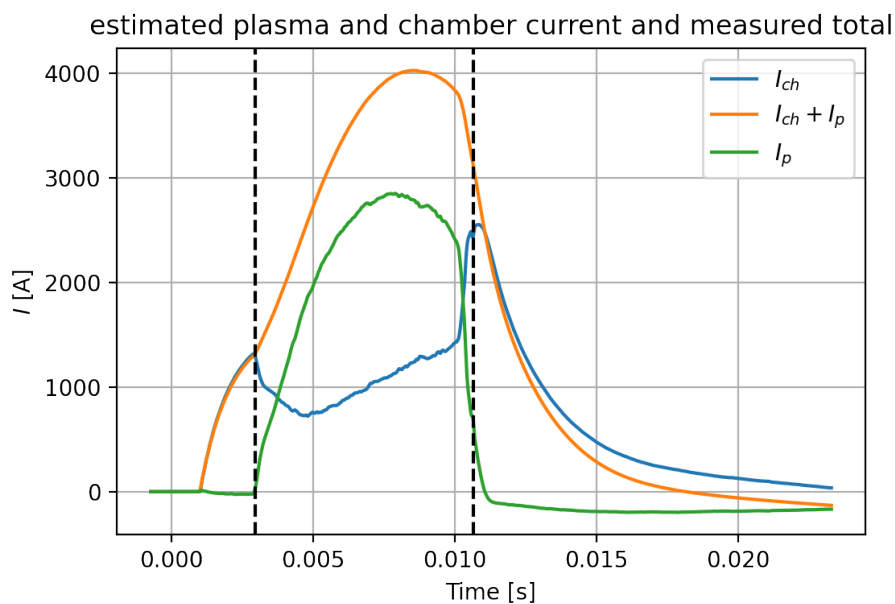


Obrázek 2.10: Uživatelské prostředí Control room tokamaku GOLEM. Převzato a upraveno z [27].

Pro ukázkou aktuálního průběhu proudu I_p plazmatem na tokamaku GOLEM využijeme výboje číslo 42034 dostupného z [28]. Naměřené hodnoty jednotlivých veličin jsou znázorněny na následujícím Obr.2.11.

Ze vzorové ukázky na Obr.2.11 lze vidět, že proud I_p má přibližně sinusový charakter, resp. má tvar první jeho půlvy. Tento specifický průběh je dán vybíjením kondenzátoru do primárního vinutí a následným naindukováním proudu v plazmatu. Čeho si lze také povšimnout je, že část magnetického indukčního toku generovaného primárním vinutím tokamaku se spotřebuje na indukování proudu komorou I_{ch} .

Abychom dosáhli na tokamaku GOLEM podobného průběhu jako například na již zmiňovaném tokamaku COMPASS, je zapotřebí současný indukovaný proud plazmatem I_p vyrovnat na určitý časový okamžik na konstantní hodnotu, tedy dosáhnout **flat-top** konfigurace proudu plazmatem I_p jako je vidět na Obr.2.8.

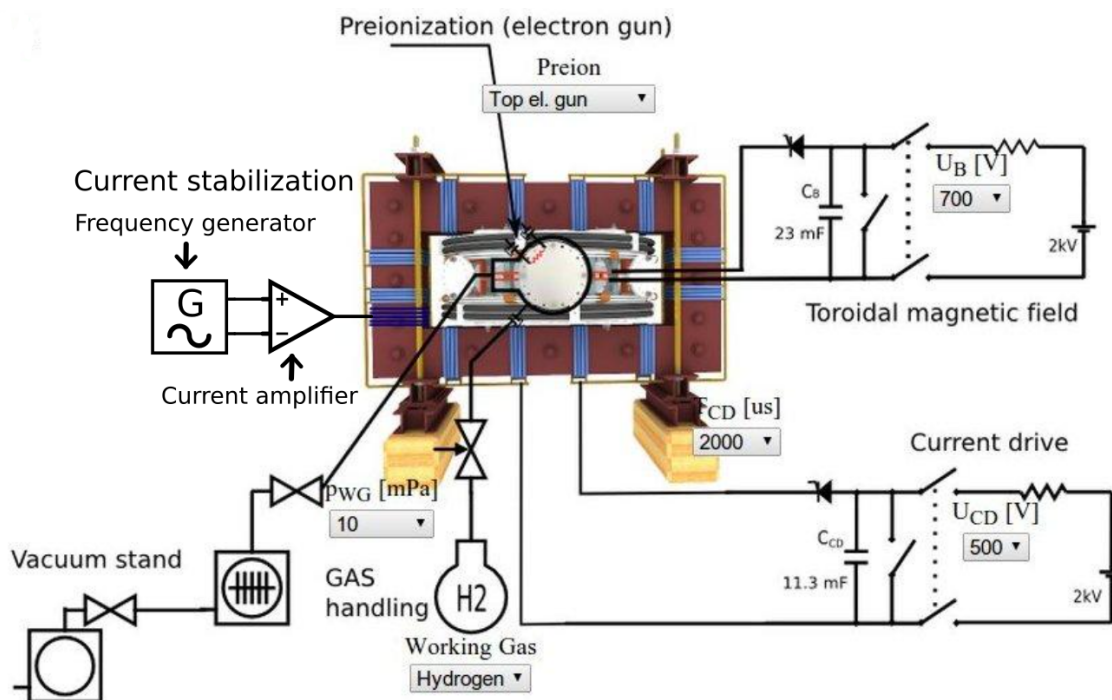


Obrázek 2.11: Ukázka naměřeného proudu protékajícího komorou I_{ch} a proudu plazmatem I_p v závislosti na čase na tokamaku GOLEM z výboje číslo 42437 pro nabíjecí napětí $U_C(0) = 500$ V. Převzato a upraveno z [28].

2.7 Stabilizace proudu plazmatem na tokamaku GOLEM pomocí proudových zesilovačů

Jako nadějný způsob řešení se ukazuje řešení pomocí implementace přídavného obvodu obsahující druhé nezávislé primární vinutí na transformátorové jádro GOLEMa, které by současný vývoj proudu plazmatem byl schopen vyrovnat na požadované hodnoty. U moderních experimentálních tokamaků se takového řešení využívá v podobě vyhlazovacích obvodů pro tvarování plazmatu [24]. Podobného principu bychom chtěli využít na vyhlazení průběhu proudu plazmatem I_p . Tento obvod by byl napájen **proudovým zesilovačem** (viz Obr.2.12), který je schopen zesílit jakýkoli předem definovaný signál, což patří mezi jeho výrazné výhody. Pro předdefinování průběhu bychom využili **frekvenčního generátoru** zapojeného přímo do zesilovače, kterému lze naprogramovat předem definovanou wave-formu podobně jak je tomu například na tokamaku COMPASS v případě předdefinovaného proudu I_{MFPS} z Obr.2.8. Zesilovač tento signál pouze mnohonásobně zesílí a pošle do přídavného vinutí na transformátorovém jádře. Další výhodou je možnost zapojit více takových zesilovačů sériově nebo paralelně (závisí, zda chceme maximalizovat proud nebo napětí) a tak docílit potřebného výkonu. Ukázka zesilovače KEPCO je na obrázku 2.13. Pro naše účely bude pro konstrukci table-top experimentu využito modelu s výkonem 400 W s maximální hodnotou proudu 20 A a s maximální hodnotou napětí 20 V, k nahlédnutí například zde: [29]. Jedná se o bipolární zdroj pracující ve všech čtyřech kvadrantech od amerického výrobce KEPCO, který je těmito typy zdrojů známý [30]. Zesilovač je schopen pracovat ve dvou základních režimech a to: **proudovém**, kdy měníme buď proud a napětí se dopočítá z Ohmova zákona, nebo v **napěťovém**, kdy naopak měníme napětí a proud se obdobným způsobem dopočítá. Dopočítávání z Ohmova zákona je závislé na odporu spotřebiče, který je k zesilovači

připojen v našem případě v podobě přídavného primárního vinutí.



Obrázek 2.12: Uživatelské prostředí Control room tokamaku GOLEM s implementací proudového zesilovače v podobě přídavného primáru na transformátorové jádro tokamaku GOLEM. Převzato a upraveno z [27].

Důležité je zmínit, že se jedná pouze o hypotetický způsob řešení a nikoli o prokázaný koncept, protože na tokamaku COMPASS nepracují s napájením pomocí kondenzátorové baterie. Proto je nutné před samotnou implementací tohoto způsobu řešení na tokamak GOLEM nejdříve dokázat pravdivost a hlavně funkčnost tohoto řešení jiným než přímým implementováním na samotný tokamak, protože se jedná o poměrně finančně nákladný projekt. Toto ověření proběhne pomocí konstrukce na tzv. **table-top experimentu**, který by danou situaci měl do jisté míry simulovat ve zmenšené laboratorní verzi s využitím dostupných laboratorních zařízení a jednoho testovacího proudového zesilovače. Dané měření bude třeba podložit příslušným idealizovaným numerickým řešením rovnic popisujících daný elektrický systém a dojde k porovnání těchto dat. Důvodem je, abychom dokázali předpovídat chování v systému v závislosti na změně parametrů v obvodu nebo poslané wave-formy do zesilovače.

Pokud bude tento způsob řešení úspěšně prohlášen za funkční v table-top verzi, pak poté proběhnou potřebné výpočty pro zakoupení příslušných technologií a následně implementace na samotný tokamak GOLEM.



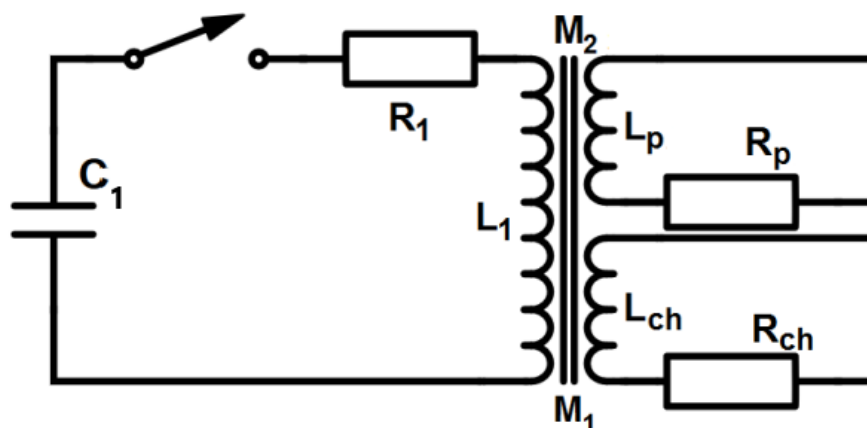
Obrázek 2.13: Foto proudového zesilovače KEPCO, konfigurace 20 V/20 A. Tento zesilovač společně s dalšími mezi sebou propojenými slouží pro stabilizaci polohy plazmatu na tokamaku GOLEM.

Kapitola 3

Table-top experiment stabilizace proudu

3.1 Schéma výboje generování proudu plazmatem na tokamaku GOLEM

Generování proudu plazmatem na tokamaku GOLEM lze popsat následujícím zjednodušujícím elektrickým schématem zobrazeným na Obr.3.1.



Obrázek 3.1: Elektrické schéma řízení výboje na tokamaku GOLEM. Převzato z [31].

Technické uspořádání je tvořeno jedním primárním a dvěma sekundárními obvody. V praxi dochází k rozložení energie z primárního vinutí do jednak indukování proudu plazmatem, ale také se část energie pohltí samotnou komorou tokamaku.

Primární obvod tokamaku je tvořen cívkou o indukčnosti L_1 (říkáme primární vinutí tokamaku), charakteristickým odporem R_1 , spínačem a kondenzátorem (v případě tokamaku Golem kondenzátorovou baterií) o kapacitě C_1 a nabíjen na hodnotu napětí $U_C(0)$. Spínač, který je vyobrazen na obrázku 3.1, je v praxi tvořen tyristorem.

První sekundární obvod vyjadřuje indukčnost plazmatu L_p s charakteristickým odporem plazmatu R_p . Je nutno podotknout, že plazma je tvořeno pouze jedním závitěm na krátko sekundárního vinutí.

Druhý sekundární obvod vyjadřuje indukčnost samotné komory L_{ch} , na kterou primární vinutí také působí a odvádí část svojí energie do této komponenty, která má také svůj odpor R_{ch} .

Transformátorové jádro spojující tyto všechny vinutí navzájem lze reprezentovat vzájemnou indukčností M_1 mezi primárním obvodem a komorou a vzájemnou indukčností M_2 mezi opět primárním obvodem a plazmatem.

Takový systém lze popsat **sadou diferenciálních transformátorových rovnic** plynoucích z Kirchhoffových zákonů ve tvaru:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + U_C - M_1 \frac{dI_{\text{ch}}}{dt} - M_2 \frac{dI_{\text{p}}}{dt} &= 0 \\ R_{\text{ch}} I_{\text{ch}} + L_{\text{ch}} \frac{dI_{\text{ch}}}{dt} + M_1 \frac{dI_1}{dt} &= 0 \\ R_{\text{p}} I_{\text{p}} + L_{\text{p}} \frac{dI_{\text{p}}}{dt} + M_2 \frac{dI_1}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

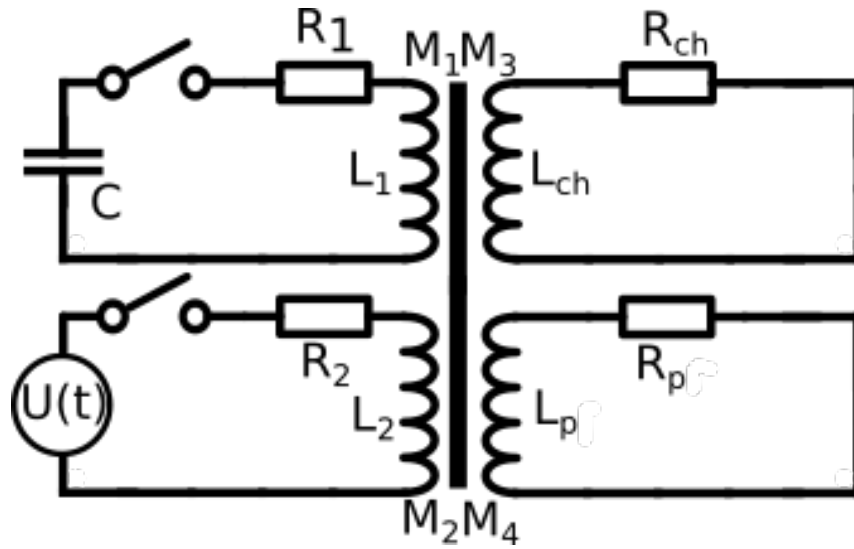
kde I_1 je proud protékající primárním obvodem s kondenzátorovou baterií, I_{ch} je proud indukovaný komorou, I_{p} je proud indukován v plazmatu a U_C je napětí na kondenzátoru. Ve všech případech se jedná o funkce času. Znaménka u vzájemných indukčností můžeme odvodnit jednak z Lenzova zákona a také ze zákona zachování energie. V případě první rovnosti, která reprezentuje primární obvod tokamaku GOLEM, se jedná o úbytek napětí v důsledku rozložení energie do dvou sekundárních obvodů bez zdrojů. V sekundárních obvodech se bude jednat o přírůstky napětí plynoucí z Lenzova zákona a tedy musí mít opačný směr.

Nutné je však zmínit, že výše uvedený systém zanedbává vzájemné působení komory a plazmatu, které by šlo charakterizovat jejich vzájemnou indukčností a také vliv tyristoru (viz 2.10) v obvodu v reálném provozu tokamaku GOLEM, který má taktéž svoje zastoupení při vývoji samotného výboje. Proto nelze zapsat z výrazu (3.1) rovnost, která by ukázala, že součet přírůstků a úbytků napětí je roven pouze napětí na kondenzátoru $U_C(0)$.

Řešením těchto rovnic lze dostat přibližné průběhy proudů I_1 , I_{ch} a I_{p} , které by měly přibližně odpovídat naměřeným hodnotám jako na Obr.2.11.

3.2 Implementace proudového zesilovače do schématu výboje

Budoucí implementace proudového zesilovače do provozu tokamaku GOLEM se plánuje prostřednictvím extra vinutí na transformátorové jádro, které bude mít funkci sekundárního primárního vinutí. Takové schéma by mohlo vypadat jako na Obr.3.2.



Obrázek 3.2: Elektrické schéma řízení výboje na tokamaku GOLEM s přidruženým primárním obvodem obsahující proudový zesilovač.

Na Obr.3.2 je proudový zesilovač reprezentován jako dodatečný zdroj napětí $U(t)$ jako funkce času. Uvedené veličiny jsou stejné jako v případě 3.1, ale je zde navíc obvod s proudovým zesilovačem charakterizovaný indukčností L_2 cívky, celkovým odporem R_2 . Vystupují zde hned čtyři vzájemné indukčnosti. Vzájemnou indukčnost [32] lze definovat vztahem:

$$M = k \cdot \sqrt{L_i L_j}, \quad (3.2)$$

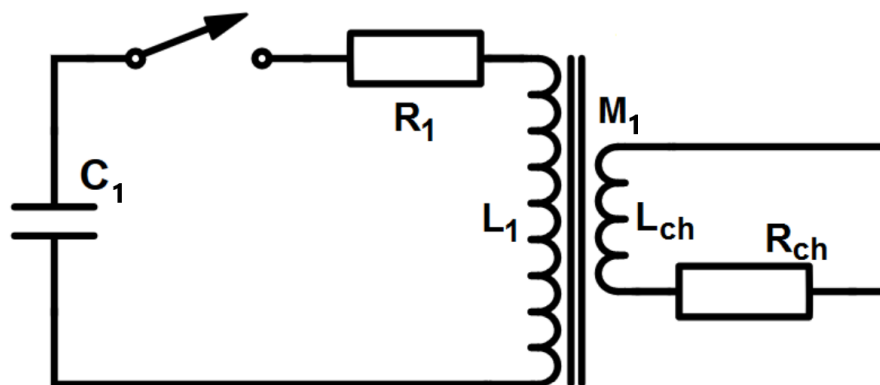
kde k je koeficient vazby, jenž může nabývat hodnot v intervalu $k \in \langle 0, 1 \rangle$ a L_i, L_j jsou indukčnosti cívek, mezi kterými vzájemné působení uvažujeme. V celé práci pro jednoduchost budeme předpokládat stejnou hodnotu koeficientu vazby k , obecně však by se hodnota mohla lišit mezi jednotlivými vinutími. V případě našeho schématu zobrazeného na Obr.3.2 jsou vzájemné indukčnosti rozděleny následovně: M_1 je působení mezi L_1 a L_{ch} , M_2 je působení mezi L_1 a L_p , M_3 je působení mezi L_2 a L_{ch} a M_4 je působení mezi L_2 a L_p . Působení mezi primáry a sekundáry navzájem budou zanedbány, protože sekundár je tvořen pouze dvěma závity nakrátko pro plazma a komoru a vzájemná indukčnost by měla tak zanedbatelně malý vliv na průběh výboje. Příslušné vztahy pro vzájemné indukčnosti by stačilo pouze dosadit do vztahu 3.2.

Pro tento systém budou dané transformátorové rovnice ještě složitější než v (3.1) a proto je zde nutné nejdříve provést zjednodušení a k tomuto poměrně obtížnému

problému se dostat postupně. Toho lze docílit například zjednodušením v podobě **vakuového výboje**, který bude popsán v další sekci.

3.3 Vakuový výboj

Pokud probíhá na tokamaku výboj bez plazmatu (např. tím, že se nenapustí pracovní plyn), konfigurace se nazývá **Vakuový výboj**, kdy se veškerá indukovaná energie uvolněná z kondenzátorové baterie naindukuje pouze do samotné komory. Takové schéma lze vidět na Obr.3.3



Obrázek 3.3: Elektrické schéma pro vakuový výboj tokamaku GOLEM a námět pro tvorbu první části table-top experimentu. Převzato z [31]

Po tomto zjednodušení (viz 3.3) lze dospět ke značně jednodušší soustavě diferenciálních rovnic plynoucích z Kirchhoffových zákonů:

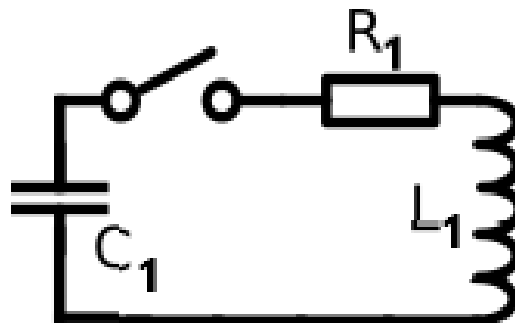
$$\begin{aligned} R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + U_C - M_1 \frac{dI_{ch}}{dt} &= 0 \\ R_{ch} I_{ch} + L_{ch} \frac{dI_{ch}}{dt} + M_1 \frac{dI_1}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde I_1 , I_{ch} a U_C jsou funkce času. Soustava z původně tří rovnic (3.1) se tak redukovala na pouhé dvě rovnice (3.3). Mezi další výhody patří fakt, že není zapotřebí počítat se změnou odporu plazmatu během výboje, tedy všechny veličiny popisující náš systém (3.3) lze považovat za konstanty, což napomůže jak konstrukci table-top experimentu, tak i příslušnému numerickému řešení.

Pro ještě větší zjednodušení a ověření funkčnosti první části konstrukce laboratorního modelu bude volena redukce na pouhý RLC obvod bez transformátorového jádra a bez obvodu reprezentujícího komoru. Tato aproximace je volena z důvodu, že pro samotný RLC obvod bez zdrojů existuje analytické řešení. To je výhodné jednak pro ověření funkčnosti první fáze konstrukce numerického řešení a jednak pro porovnání naměřených dat z laboratorního modelu. Z naměřených dat z laboratorního modelu na základě znalosti analytického řešení lze také dobře odhadnout parametry daného použitého obvodu a udělat tak předpověď v jakých časových mezích se bude laboratorní verze pohybovat, protože veličiny jako perioda, frekvence a amplituda jsou svázány základními parametry daných obvodů [33].

3.4 Sestrojení RLC obvodu v rámci table-top experimentu

Každá fáze konstrukce vždy bude rozdělena do několika částí, mezi které bude vždy patřit příslušné numerické řešení daného elektrického schématu a k němu vždy jeho laboratorní verze reprezentující vždy danou fázi. Následně dojde k porovnání naměřených dat z table-top experimentu s numerickým modelem. V této fázi bude jedna výjimka a to i analytické řešení RLC obvodu, které lze poměrně snadno určit. Tvorba RLC obvodu bude důležitá pro odhadování veličin v obvodech, které lze tímto obvodem aproximovat a také pro ověření funkčnosti numerického modelu RLC. RLC obvod má reprezentovat zjednodušenou verzi primárního obvodu tokamaku GOLEM bez tyristoru. Schéma lze vidět na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Elektrické schéma pro klasický RLC obvod bez zdrojů

3.4.1 Analytické řešení RLC

Pouze v této fázi konstrukce table-top experimentu je možnost nalézt analytické řešení, protože v každé další fázi konstrukce bude nalezení analytického řešení komplikovanější a je možné, že ani neexistuje. Na Obr.3.4 jsou dané součástky zapojeny sériově. Pro takový systém lze najít analytické řešení dostupné na [21] nebo odvozené v příloze. Jednotlivá analytická řešení proudu $I_1(t)$ a napětí $U_C(t)$ jsou ve tvaru:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= -U_C(0)C_1 \frac{\omega_1^2 + \delta_1^2}{\omega_1} \cdot e^{-\delta_1 t} \sin \omega_1 t \\ U_C(t) &= U_C(0) \cdot e^{-\delta_1 t} \cdot \left(\cos \omega_1 t + \frac{\delta_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

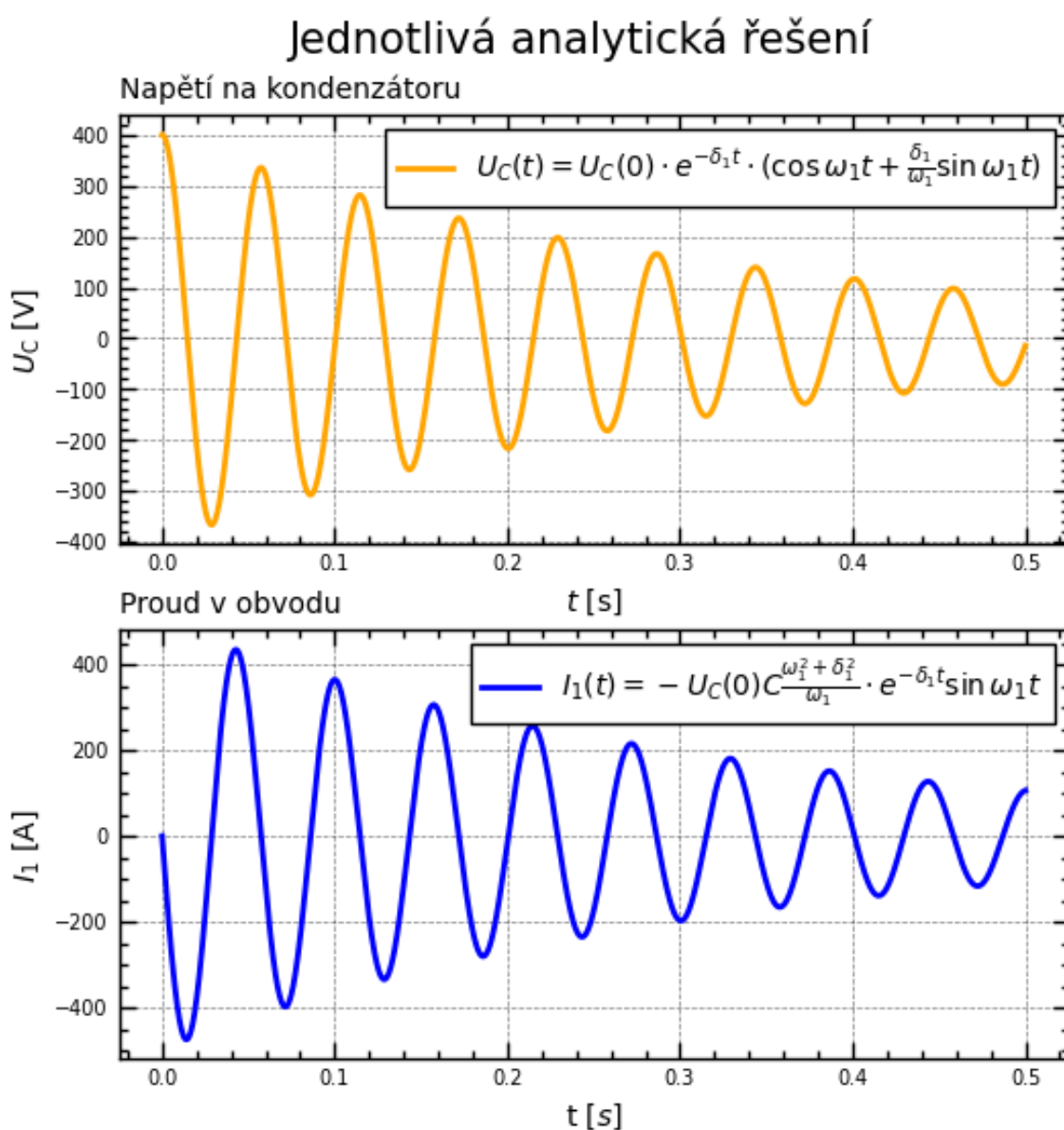
kde veličiny δ je dekrement útlumu, ω_1 úhlová frekvence [33] a související veličina ω_{01} je vlastní frekvence (Thompsonův vztah), které jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{R_1}{2L_1} \\ \omega_{01} &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \\ \omega_1 &= \sqrt{\omega_{01}^2 - \delta_1^2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pro ukázkou bude využito hodnot charakterizujících primární obvod tokamaku GOLEM z [31]. Konkrétní hodnoty primárního obvodu tokamaku GOLEM jsou:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 45 \text{ m}\Omega \\
 L_1 &= 7.35 \text{ mH} \\
 C_1 &= 11.3 \text{ mF} \\
 U_C(0) &= 400 \text{ V.}
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Po dosazení parametrů (3.6) do rovnic (20) a (13) a vykreslení například pomocí Python (vzorový kód [34]) lze dostat jednotlivé průběhy funkcí $U_C(t)$ a $I_1(t)$, které jsou k nahlédnutí na Obr.3.5. Lze si povšimnout, že v obou případech se jedná o specifické harmonické průběhy, což bychom z [21] očekávali.



Obrázek 3.5: Ukázka analytických řešení RLC obvodu $U_C(t)$ a $I_1(t)$.

3.4.2 Numerické řešení RLC

Tato sekce bude zaměřena na numerické modelování obvodu z 3.4. Bude zde vycházeno ze stejných předpokladů, jako v odvození analytického řešení. Hlavním předpokladem bude, že obvod je bez zdrojů a dané součástky jsou zapojeny sériově. Pro takový obvod platí, že celkové napětí je rovno součtu dílčích napětí a popsáno vztahem (2). Nyní lze modifikovat rovnici pro konstrukci numerického modelu, konkrétně pozměním vztahu pro definování napětí na kondenzátoru pomocí funkce náboje $Q(t)$ a tedy pro dílčí napětí bude platit:

$$\begin{aligned} U_R(t) &= R_1 \cdot I_1(t) \\ U_L(t) &= L_1 \cdot \frac{dI_1(t)}{dt} \\ U_C(t) &= \frac{Q_1(t)}{C_1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Po dosazení (3.7) do (2) dostaneme rovnost:

$$R_1 \cdot I_1(t) + L_1 \cdot \frac{dI_1(t)}{dt} + \frac{Q_1(t)}{C_1} = 0 \quad (3.8)$$

Když celá tato rovnost (3.8) ještě bude podělena L_1 a použita definice proudu, která je dána vztahem $I_1 = \frac{dQ_1}{dt}$, tak lze dostat nábojovou rovnici ve tvaru:

$$\frac{d^2Q_1(t)}{dt^2} + R_1 \frac{dQ_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1} Q_1(t) = 0. \quad (3.9)$$

Nyní s využitím vztahů (8) lze převést rovnici (3.9) do elegantnějšího tvaru:

$$\frac{d^2Q_1(t)}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{dQ_1(t)}{dt} + \omega_{01}^2 Q_1(t) = 0. \quad (3.10)$$

Ve výše uvedené rovnici (3.10) se jedná o obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty s nulovou pravou stranou. Nyní je zapotřebí upravenou rovnost (3.10) řešit vhodnou numerickou metodou. Většina numerických metod je šita na míru rovnicím s první derivací. Mezi takové numerické metody můžeme řadit Eulerovu nebo Runge-Kuttovy metody, které vyžadují tvar:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

kde $y(t_0) = y_0$ je okrajová podmínka. Z tohoto důvodu je zapotřebí rovnost (3.10) převést na tvz. **kanonický tvar**, což se dělá pomocí triviální substituce zavedením nové proměnné, která bude obsahovat první derivaci neznámé funkce a tak dojde ke snížení řádu. V našem případě (3.10) by snížení řádu proběhlo následovně:

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \frac{dQ_1(t)}{dt} \\
 \frac{dq(t)}{dt} &= -2\delta_1 q(t) + \omega_{01}^2 Q_1(t) \\
 Q_1(0) &= U_C(0) \cdot C_1 \\
 q(0) &= \frac{dQ_1(0)}{dt} = I_1(0) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

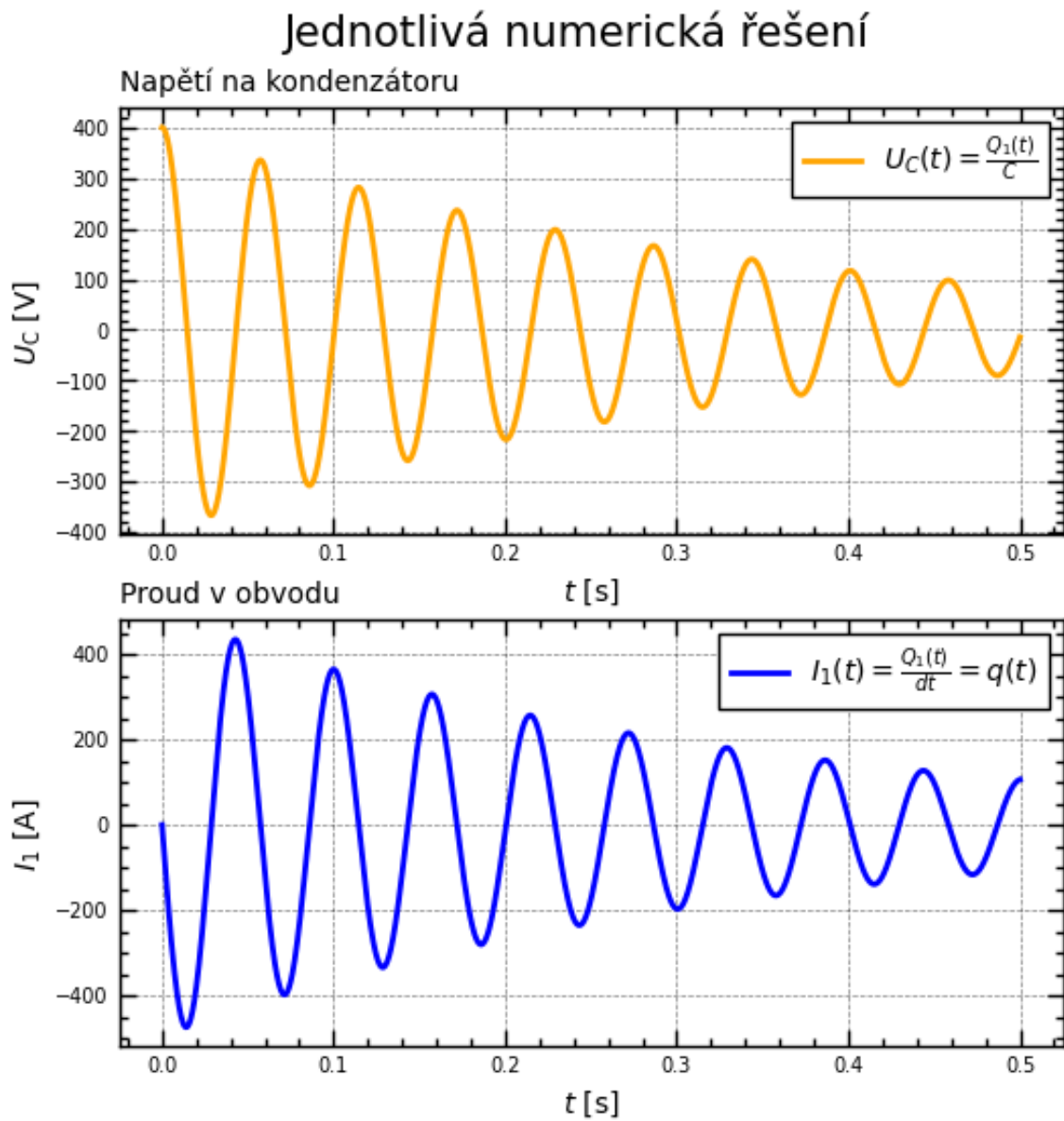
kde $Q_1(0)$ a $q(0)$ jsou příslušné počáteční podmínky. Pro řešení systému rovnic (3.12) bude použita knihovna Sci-Py v programovacím jazyce Python a využita Odeint solver pro diferenciální rovnice. Výstupem modelu v Pythonu budou funkce $q(t)$ a $Q_1(t)$. Hledané funkce lze dostat ze vztahů pro náboj následovně:

$$\begin{aligned}
 I_1(t) &= \frac{Q_1(t)}{dt} = q(t) \\
 U_C(t) &= \frac{Q_1(t)}{C_1}
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

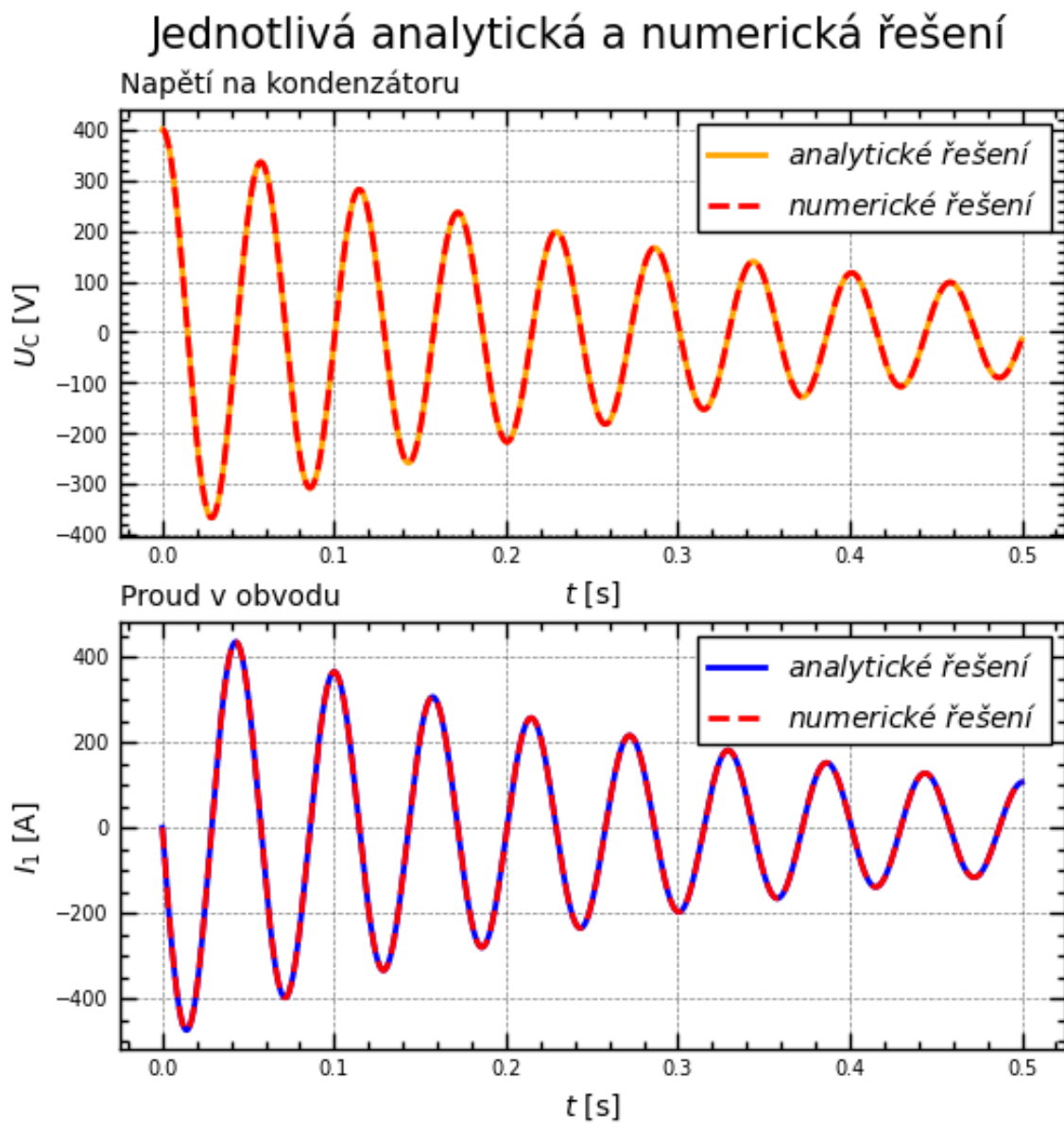
Po zavedení systému rovnic do Pythonu a využití vztahů (3.13) lze dostat následující grafy U_C a $I_1(t)$, které lze vidět na Obr.3.6. Pro vykreslení byly zvoleny totožné parametry (3.6) jako v případě analytického modelu. (vzorový kód [34]).

Porovnání analytického a numerického řešení

Aby byla prokázána správnost numerického řešení 3.6 tak je třeba ho porovnat s analytickým řešením 3.5 pro stejnou volbu parametrů (3.6). Jednotlivá porovnání jsou k nahlédnutí na Obr.3.7 (Vzorový kód [34]). Z Obr.3.7 lze vidět, že analytická a k nim příslušná numerická řešení se dokonale překrývají a lze tedy numerický model považovat za funkční.



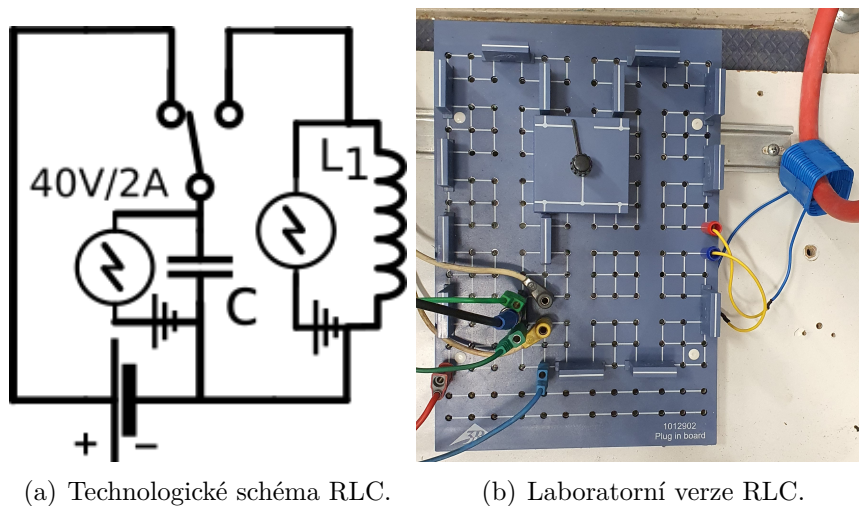
Obrázek 3.6: Ukázka numerických řešení RLC obvodu $U_C(t)$ a $I(t)$.



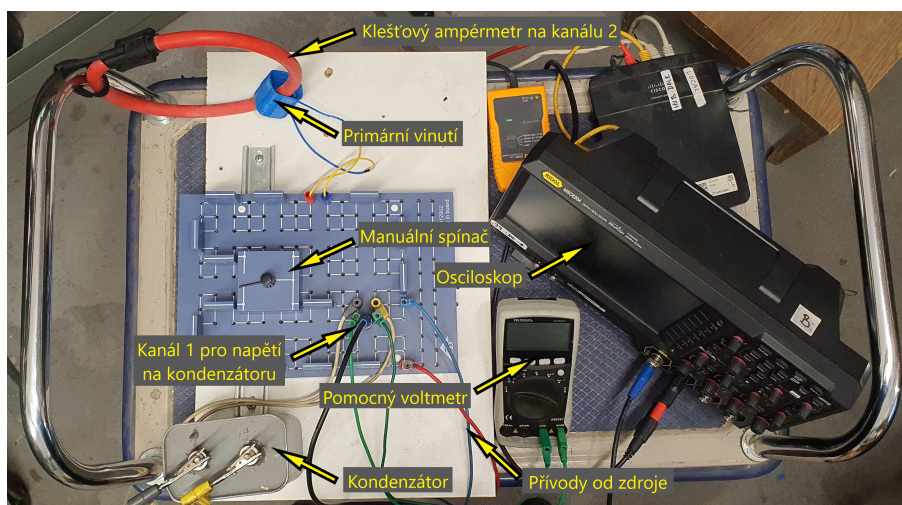
Obrázek 3.7: Srovnání analytického a numerického řešení pro funkce $U_C(t)$ a $I_1(t)$.

3.4.3 Laboratorní verze RLC

První fáze konstrukce table-top experimentu bude zahájena nejjednodušším RLC modelem. K tomu bylo využito elektronické stavebnice Helago, která se ukázala jako nejvhodnější co se přehlednosti týče. Jako spínač bylo využito prozatím manuálního spínače. Jako zdroj bylo využito programovatelného zdroje Rigol DP831A. Nakonec jako simulaci kondenzátorové baterie byl využit kondenzátor o kapacitě $50 \mu\text{F}$ a jako primární vinutí posloužil tenký drát, ze kterého byla namotána cívka o 18 závitů o průřezu cívky odpovídajícímu laboratorní verzi transformátorového jádra, které bude využito v další fázi konstrukce. Vše bylo zaznamenáváno pomocí osciloskopu značky Rigol model MSO5204 a pro měření proudu bylo využito ampérmetru FLUKE i2000. Na Obr.3.8 je porovnání mezi technologickým elektrickým schématem a jeho laboratorní implementací v podobě elektrické stavebnice Helago a dodatečných komponent. Výsledná konstrukce je na Obr.3.9.



Obrázek 3.8: Porovnání technologického schématu a laboratorní verze RLC obvodu. Použité schematické značky z [35].



Obrázek 3.9: Foto první fáze konstrukce table-top experimentu v podobě RLC obvodu.

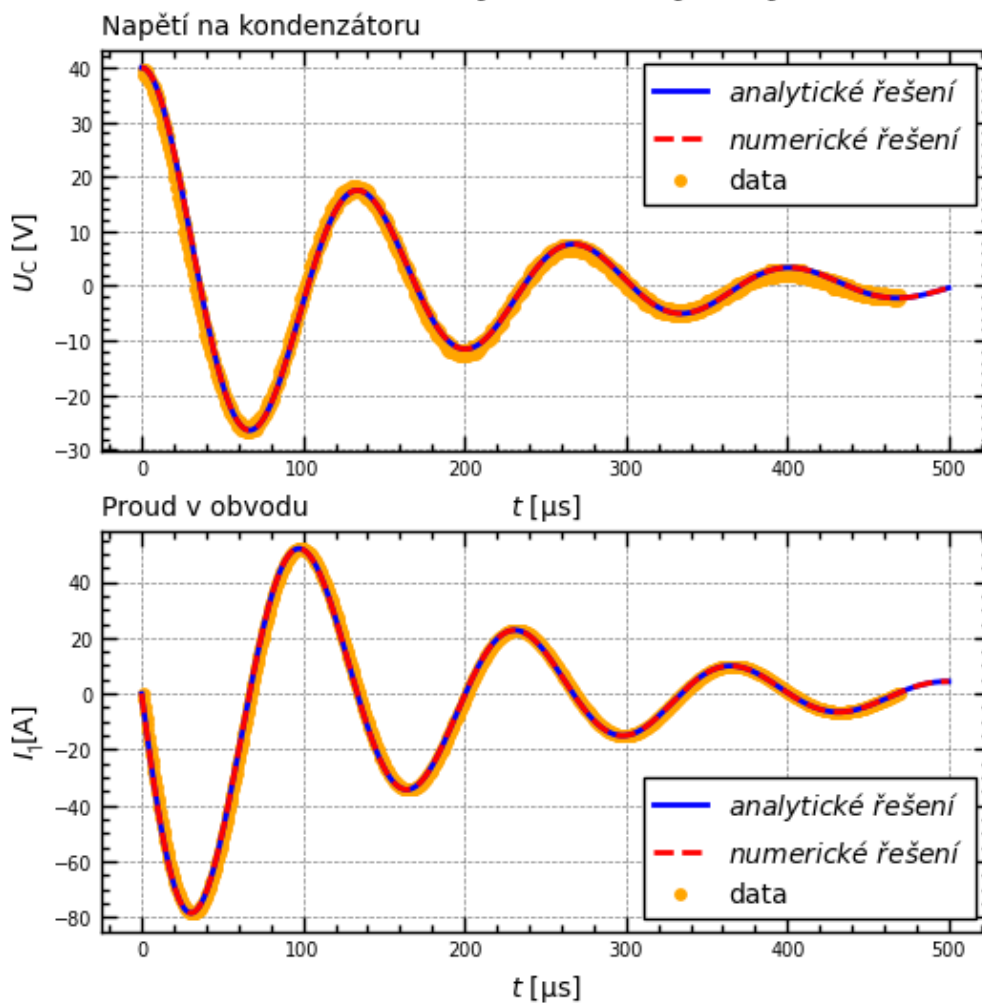
3.4.4 Porovnání Table-top s numerickým modelem

Ze zpracování naměřených dat se lze dozvědět přibližné parametry primárního obvodu, které vyšly:

$$\begin{aligned} R &= 0.11 \, \Omega \\ L &= 8.9 \, \mu\text{H} \\ C &= 50 \, \mu\text{F} \\ U_0 &= 40 \, \text{V}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Pro parametry (3.14) se analytické i numerické řešení navzájem překrývaly společně s naměřenými daty. Výsledné průběhy jsou k nahlédnutí na Obr.3.10 (Vzorový kód [34]).

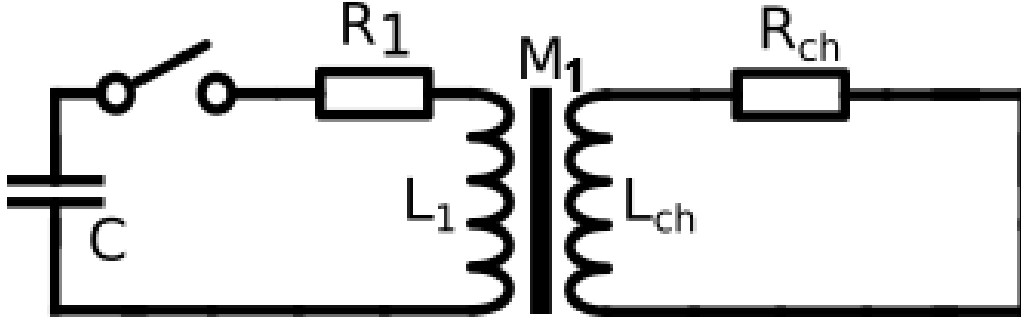
Porovnání dat s numerickým a analytickým řešením RLC



Obrázek 3.10: Porovnání dat RLC z table-top experimentu s numerickým a analytickým řešením.

3.5 Vakuový výboj v rámci table-top experimentu

V této sekci se zaměříme na již zmiňovaný zjednodušující model výboje tokamak GOLEM zvaný vakuový výboj popsany v sekci vakuový výboj. Na Obr.3.11 lze vidět zjednodušené elektrické schéma.



Obrázek 3.11: Zjednodušené schéma generování proudu komorou v rámci vakuového výboje na tokamaku GOLEM.

Ze schématu Obr.3.11 plyne z Kirchhoffových zákonů soustava diferenciálních rovnic (3.15), kterou bude třeba převést na vhodný tvar pro numerické řešení. Soustava pro schéma Obr.3.11 je ve tvaru:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + U_C - M_1 \frac{dI_{ch}}{dt} &= 0 \\ R_{ch} I_{ch} + L_{ch} \frac{dI_{ch}}{dt} + M_1 \frac{dI_1}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.5.1 Numerický model vakuového výboje

Soustava rovnic (3.15) obsahuje hned trojici neznámých funkcí napětí na kondenzátoru $U_C(t)$, proud v primárním vinutí $I_1(t)$ a proud komorou $I_{ch}(t)$ reprezentující sekundární vinutí.

Proto v prvním kroku bude soustava (3.15) upravena pomocí definice proudu $I = \frac{dQ}{dt}$. V primární obvodu bude označen protékající náboj funkcí $Q_1(t)$ a náboj protékající sekundárním obvodem označíme jako $q(t)$.

Podle definice bude zavedeno napětí na kondenzátoru $U_C(t)$, proud primárním obvodem $I_1(t)$ a proud sekundárním obvodem $I_{ch}(t)$ následovně:

$$U_C = \frac{Q_1}{C_1}, \quad I_1 = \frac{dQ_1}{dt}, \quad I_{ch} = \frac{dq}{dt}. \quad (3.16)$$

Po dosazení výrazů (3.16) do soustavy (3.15) a vytknutí indukčností u nejvyšších derivací se nám soustava značně změní do tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_1}{dt^2} - \frac{M_1}{L_1} \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R_1}{L_1} \frac{dQ_1}{dt} + \frac{Q_1}{L_1 C_1} &= 0 \\ \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{M_1}{L_{\text{ch}}} \frac{d^2 Q_1}{dt^2} + \frac{R_{\text{ch}}}{L_{\text{ch}}} \frac{dq}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ze soustavy diferenciálních rovnic (3.17) je patrné, že předchozím krokem byla soustava převedena do dvou diferenciálních rovnic prvního řádu se třemi neznámými funkcemi $U_C(t)$, $I_1(t)$ a $I_{\text{ch}}(t)$ na dvě diferenciální rovnice druhého řádu s neznámými funkcemi $Q_1(t)$ a $q(t)$. Z nově vzniklé soustavy (3.17) si lze povšimnout, že jednotlivé rovnice jsou neznámými funkcemi $Q_1(t)$ a $q(t)$ navzájem provázány, což bude třeba v dalších krocích vyřešit, protože tuto soustavu nelze řešit přímo numerickou metodou a triviální snížení řádu zde není možné jako v sekci s RLC obvodem pro rovnici (3.10). Protože se jedná o soustavu dvou diferenciálních rovnic se dvěma neznámými funkcemi, budou potřeba pro nalezení konkrétního řešení rovnou čtyři počáteční podmínky.

Počáteční podmínky pro neznámé funkce $Q_1(t)$ a $q(t)$ budou ve tvaru:

$$\begin{aligned} Q_1(0) &= C_1 \cdot U_C(0) \\ \dot{Q}_1(0) &= I_1(0) = 0 \\ q(0) &= 0 \\ \dot{q}(0) &= I_{\text{ch}}(0) = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

kde tečka nad funkcí reprezentuje první časovou derivaci nábojové funkce a z definice víme, že se jedná o elektrický proud. Jak již bylo řečeno v předchozích úvahách, daná soustava diferenciálních rovnic je navzájem neznámými funkcemi propojena, což má za následek, že nelze klasickým způsobem soustavu převést na nižší řád. V ideálním případě lze nalézt tzv. **Kanonický tvar** diferenciální rovnice, tj. osamostatnit nejvyšší derivaci od zbytku rovnice. V našem případě by kanonický tvar byl tvořen diferenciální rovnicí druhého řádu a příslušný kanonický tvar by vypadal $y'' = f(x, y, y')$. Pokud takový kanonický tvar lze najít, tak danou rovnici lze pomocí jednoduché substituce:

$$y = w_1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dw_1}{dt} = w_2, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dw_2}{dt}, \quad (3.19)$$

převést na dvě rovnice prvního řádu ve tvaru:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ f(x, w_1, w_2) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Touto jednoduchou redukcí na systém diferenciálních rovnic prvního řádu lze systém řešit běžnými numerickými metodami pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic podobně jako v případě RLC obvodu. Bohužel v našem případě alespoň prozatím tuto redukcí (3.19) nelze provést kvůli již zmíněné provázanosti, tj. hledané funkce $Q_1(t)$ a $q(t)$ vystupují v obou rovnicích společně. Proto nelze najít kanonický tvar (3.20) a bude potřeba danou soustavu ještě upravit.

Tento problém lze vyřešit vhodným zavedením regulární transformace (substituce), která danou soustavu eliminuje od zmiňovaného nedostatku. Takovou substituci lze najít, když v obou rovnicích (3.17) u členů s druhou derivací "vytkneme" tyto derivace následovně:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\left(Q_1 - \frac{M_1}{L_1} q \right)}_w + \frac{R_1}{L_1} \frac{dQ_1}{dt} + \frac{Q_1}{L_1 C_1} &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\left(q + \frac{M_1}{L_{ch}} Q_1 \right)}_w + \frac{R_{ch}}{L_{ch}} \frac{dq}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

kde výrazy v závorkách jsou vhodná volba substituce redukování soustavy, kterou budou označeny novými funkcemi $W(Q_1(t), q(t))$ a $w(Q_1(t), q(t))$, které budou závislé na substituovaných funkcích nábojů $Q_1(t)$ a $q(t)$. Tedy lze psát, že vhodná substituce je ve tvaru:

$$\begin{aligned} W &\equiv Q_1 - \frac{M_1}{L_1} q = Q_1 - Kq \\ w &\equiv q + \frac{M_1}{L_{ch}} Q_1 = q + JQ_1, \end{aligned} \quad (3.22)$$

kde byly označeny $K = \frac{M_1}{L_1}$ a $J = \frac{L_{ch}}{M_1}$ jako pomocné konstanty. K této regulární transformaci je zapotřebí i její inverzní zpětnou transformaci, která bude dosazena do soustavy (3.21). Zpětnou transformaci lze dostat vyřešením soustavy rovnic pro neznámé funkce $Q_1(t)$, $q(t)$ ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & -K \\ J & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ w \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Výše uvedenou soustavu (3.23) lze řešit například Cramerovým pravidlem [36]:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -K \\ J & 1 \end{vmatrix} = 1 + JK, & \Delta_1 &= \begin{vmatrix} W & -K \\ w & 1 \end{vmatrix} = W + Kw, & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & W \\ J & w \end{vmatrix} = w - JW \\ Q_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{W + Kw}{1 + JK}, & q &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{w - JW}{1 + JK}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

kde Δ , Δ_1 a Δ_2 jsou determinanty potřebné pro Cramerovo pravidlo. Zpětná transformace je tedy ve tvaru:

$$Q_1 = \frac{W + Kw}{1 + JK}, \quad q = \frac{w - JW}{1 + JK}. \quad (3.25)$$

Po provedení námi zvolené transformace z (3.25), provedením pár úprav, dosažením za K, J a vyjádřením nejvyšších derivací lze dostat rovnice ve tvaru:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2W}{dt^2} &= -\frac{R_1}{L_1} \frac{1}{1+JK} \frac{dW}{dt} - \frac{R_1}{L_1} \frac{K}{1+JK} \frac{dw}{dt} \\
&\quad - \frac{1}{L_1 C_1} \frac{1}{1+JK} W - \frac{1}{L_1 C_1} \frac{K}{1+JK} w \\
\frac{d^2w}{dt^2} &= -\frac{R_{ch}}{L_{ch}} \frac{1}{1+JK} \frac{dw}{dt} + \frac{R_{ch}}{L_{ch}} \frac{J}{1+JK} \frac{dW}{dt}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Tento tvar (3.21) už lze snadno převést pomocí (3.19) na požadovaný kanonický tvar (3.20) vhodný pro aplikaci příslušné numerické metody. Nechť je zavedena následující substituce:

$$\Omega_1 = W, \quad \Omega_2 = \frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{dW}{dt}, \quad \Omega_3 = w, \quad \Omega_4 = \frac{d\Omega_3}{dt} = \frac{dw}{dt}. \tag{3.27}$$

Po aplikaci (3.27) lze dostat následující soustavu čtyře diferenciálních rovnic prvního řádu, které jsou ve tvaru:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_1}{dt} &= \Omega_2 \\
\frac{d\Omega_2}{dt} &= -\frac{R_1}{L_1} \frac{1}{1+JK} \Omega_2 - \frac{R_1}{L_1} \frac{K}{1+JK} \Omega_4 - \\
&\quad - \frac{1}{L_1 C_1} \frac{1}{1+JK} \Omega_1 - \frac{1}{L_1 C_1} \frac{K}{1+JK} \Omega_3 \\
\frac{d\Omega_3}{dt} &= \Omega_4
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Lze si povšimnout, že v (3.28) se opakují ve více případech stejné výrazy a proto si zavedeme pomocné substituce ve tvaru:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{1+JK} \\
K_2 &= \frac{K}{1+JK} \\
K_3 &= \frac{J}{1+JK} \\
\delta_1 &= \frac{R_1}{2L_1} \\
\delta_{ch} &= \frac{R_{ch}}{2L_{ch}} \\
\omega_{01} &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

kde K_1 , K_2 , K_3 jsou konstanty a δ_1 je dekrement útlumu primárního obvodu, δ_{ch} je dekrement útlumu sekundárního obvodu a ω_{01} je vlastní frekvence primárního obvodu (obdobně jako u RLC obvodu). S použitím (3.29) můžeme (3.28) přepsat a rovnou převést pro přehlednost do maticového tvaru následovně:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \\ \Omega_4(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_{01}^2 K_1 & -2\delta_1 K_1 & -\omega_{01}^2 K_2 & -2\delta_1 K_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\delta_{ch} K_3 & 0 & -2\delta_{ch} K_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \\ \Omega_4(t) \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Nyní už jen zbývá stanovit počáteční podmínky pro (3.30) v řeči nových proměnných, které budou ve tvaru:

$$\vec{\Omega}(0) = \begin{pmatrix} \Omega_1(0) \\ \Omega_2(0) \\ \Omega_3(0) \\ \Omega_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1(0) - Kq(0) \\ I_1(0) - KI_{ch}(0) \\ q(0) + JQ_1(0) \\ I_{ch}(0) + JI_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 U_C(0) \\ 0 \\ JC_1 U_C(0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Pro řešení soustavy rovnic (3.30) byla použita opět knihovna SciPy a funkce Odeint pro nalezení konkrétních tvarů řešení pro $\vec{\Omega}(0)$ (Vzorový kód [37]). Nyní už zbývá pouze danou soustavu převést zpět do původních proměnných $Q_1(t)$ a $q(t)$ a to za pomoci již připravené (3.25) zpětné transformace souřadnic a vyřešením příslušné soustavy. Obdobně jako v (3.23) dostaneme:

$$\begin{aligned} W = \Omega_1 = Q_1 - Kq, \quad K &= \frac{M_1}{L_1} \\ w = \Omega_3 = q + JQ_1, \quad J &= \frac{M_1}{L_{ch}} \\ Q_1 = \frac{\Omega_1 + K\Omega_3}{1 + JK}, \quad q &= \frac{\Omega_3 - J\Omega_1}{1 + JK}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Po aplikaci zpětné transformace (3.32) v předchozím kroku už zbývá pouze zapsat výsledné tvary řešení našich hledaných fyzikálních funkcí, konkrétně výslednou funkci vybíjení kondenzátoru $U_C(t)$, proud protékající tímto primárním obvodem $I_1(t)$ a nakonec indukovaný proud protékající sekundárním obvodem $I_{ch}(t)$. Využijme zde definice daných veličin (3.16) a zapíšeme je pomocí naiterovaných řešení z (3.27). Výsledná řešení jsou ve tvaru:

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \frac{Q_1(t)}{C} = \frac{1}{C} \frac{1}{1 + JK} \Omega_1(t) + \frac{1}{C} \frac{K}{1 + JK} \Omega_3(t) \\ I_1(t) &= \frac{dQ_1}{dt} = \frac{1}{1 + JK} \frac{d\Omega_1(t)}{dt} + \frac{K}{1 + JK} \frac{d\Omega_3(t)}{dt} = \\ &= \frac{1}{1 + JK} \Omega_2(t) + \frac{K}{1 + JK} \Omega_4(t) \\ I_{ch}(t) &= \frac{dq}{dt} = \frac{1}{1 + JK} \frac{d\Omega_3(t)}{dt} - \frac{J}{1 + JK} \frac{d\Omega_1(t)}{dt} = \\ &= \frac{1}{1 + JK} \Omega_4(t) - \frac{J}{1 + JK} \Omega_2(t). \end{aligned} \quad (3.33)$$

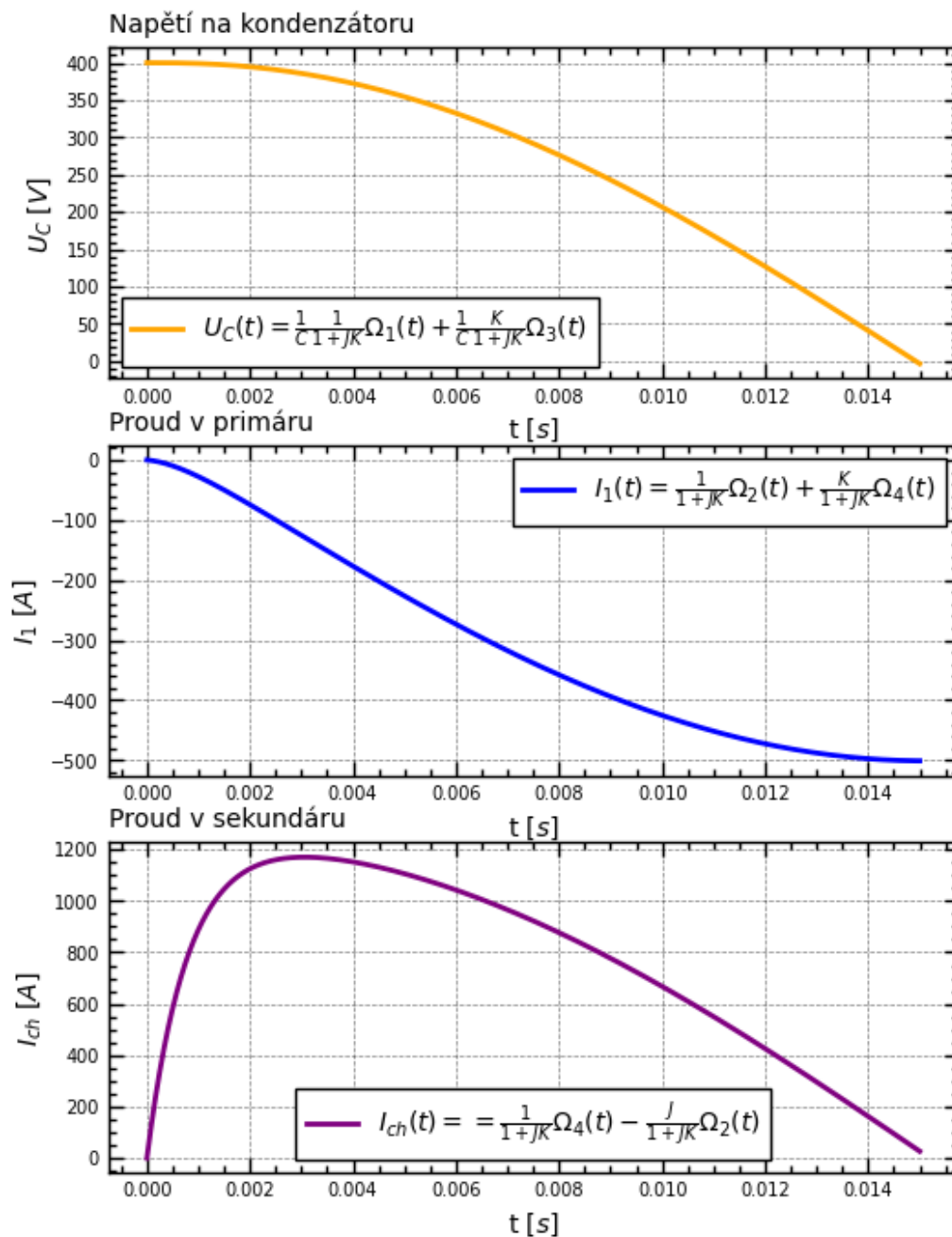
Pro vykreslení konkrétních řešení (3.33) je využito pro ukázkou parametrů z [31] nebo [28] tokamaku GOLEM:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 45 \text{ m}\Omega \\
 L_1 &= 7.35 \text{ mH} \\
 C_1 &= 11.3 \text{ mF} \\
 U_C(0) &= 400 \text{ V} \\
 R_{\text{ch}} &= 9.7 \text{ m}\Omega \\
 L_{\text{ch}} &= 20 \text{ }\mu\text{H} \\
 M_1 &= 0.22 \text{ mH},
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

kde první sada veličin reprezentuje parametry primárního obvodu, druhá sada reprezentuje parametry komory a poslední veličina M_1 reprezentuje vzájemnou indukčnost mezi těmito obvody. U vzájemné indukčnosti M_1 je třeba podotknout, že se nejedná o konstantu, která vznikla použitím vztahu (3.2), protože hodnoty proudu neodpovídaly realitě a o tomto problému s využitím vztahu (3.2) je již napsáno v práci [31], který danou problematiku popisuje na straně 6 a 7, kde danou hodnotu M_1 získal fitováním pomocí metody nejmenších čtverců, protože zjistil, že aby model fungoval spolehlivě, tak by musela být konstanta k větší než jedna, což by bylo v rozporu s definicí tohoto vztahu. Nekorektnost vztahu (3.2) může být způsobena dalšími faktory, které nejsou do zjednodušeného modelu zavedeny jako například vliv tyristoru v obvodu a další. Pro volbu těchto parametrů lze dostat z Pythonu následující průběhy veličin $U_C(t)$, $I_1(t)$ a $I_{\text{ch}}(t)$, k nahlédnutí na Obr.3.12.

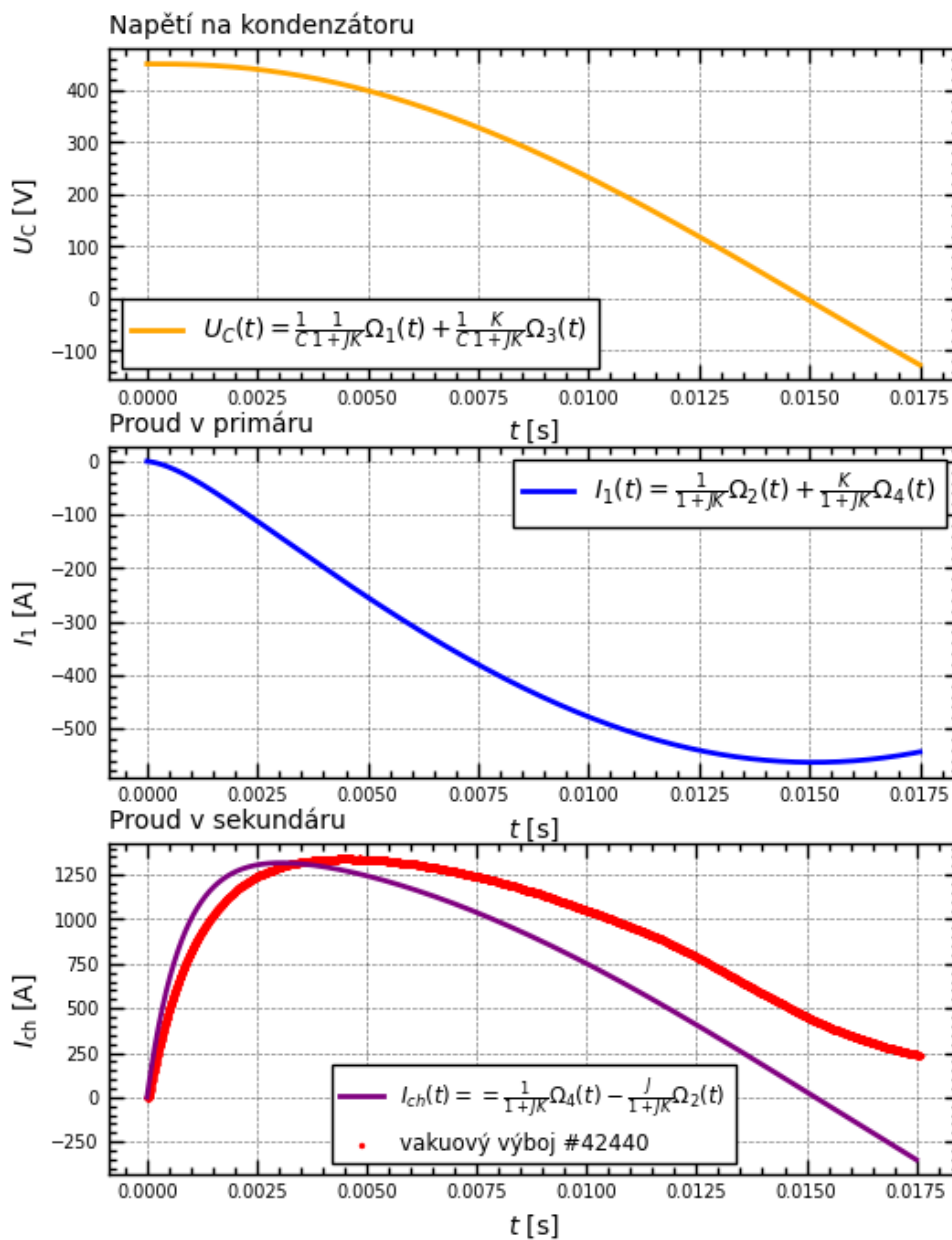
Nyní zbývá ověřit, zda model v rozumné míře simuluje generování proudu v komoře. Pro tyto účely bude využito vakuového výboje číslo 42440 z GOLEM databáze. Na Obr.3.13 je porovnání numerického modelu s naměřenými daty [38] z tokamaku GOLEM. Z grafu Obr.3.13 je patrné, že numerická simulace ne zcela reprezentuje naměřená data, ale co se hodnoty proudu týče, tak řádově odpovídá reálným hodnotám. Je nutné říci, že numerický model je značně idealizovaný a proto ne zcela dobře reprezentuje naměřená data. Mezi faktory, které by na odlišnosti řešení mohly mít vliv, bychom mohli řadit vliv tyristoru na průběh výboje a také na netriviální vlastnosti proudění magnetického indukčního toku kovovým transformátorovým jádrem tokamaku GOLEM. Přesto lze říci, že numerický model alespoň řádově odpovídá realitě.

Jednotlivá Numerická řešení



Obrázek 3.12: Ukázka numerických řešení vakuového výboje tokamaku GOLEM pro $U_C(t)$, $I_1(t)$ a $I_{ch}(t)$.

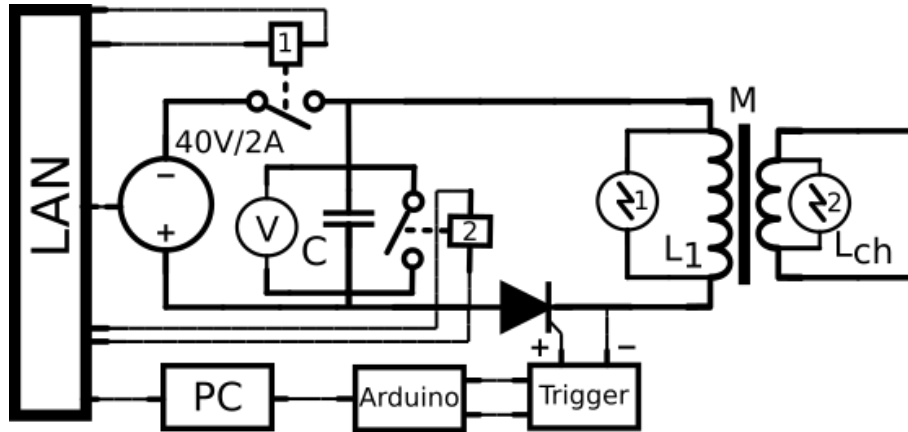
Porovnání numerického řešení s vakuovým výbojem



Obrázek 3.13: Porovnání numerického modelu s daty vakuového výboje na tokamaku GOLEM výboje číslo 42440 s nabíjecím napětím $U_C(0) = 450$ V

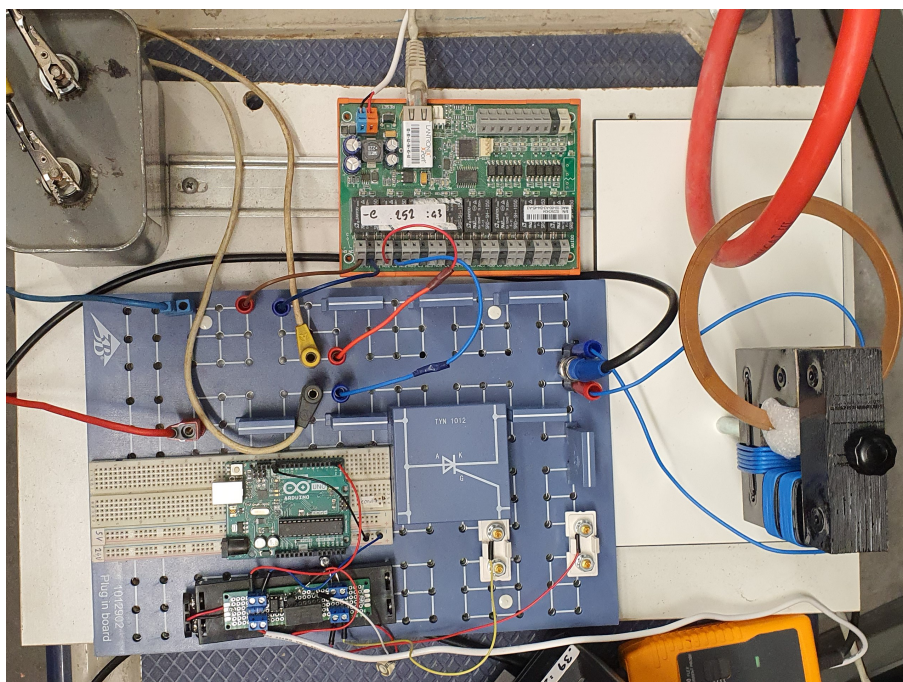
3.5.2 Laboratorní verze vakuového výboje

Nyní bude opět o kousek přiblíženo k zapojení tokamaku GOLEM a to implementací tyristoru do obvodu, který bude spouštěn pomocí Arduina. Na Obr.3.14 lze vidět technologické schéma zapojení daných komponent.



Obrázek 3.14: Technologické schéma zapojení vakuového výboje v rámci table-top experimentu. Použité schematické značky z [35].

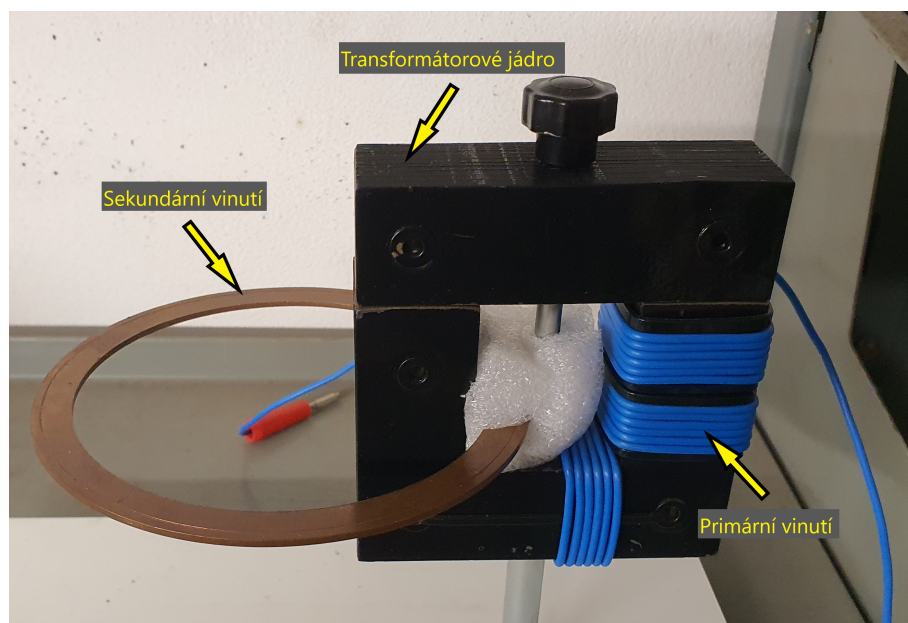
Z Obr.3.14 lze vidět, že všechny komponenty jako zdroj, pomocná relátka, tyristor jsou ovládány prostřednictvím dálkového ovládání přes internet obdobně jako tokamak GOLEM, což vede k jisté automatizaci. Co už není patrné z obrázku je fakt, že i osciloskop je též ovládám dálkově. Relátka 1 slouží k oddělení zdroje od vybíjení kondenzátoru a relátka 2 slouží jako zkratovací obvod pro vybití zbytkové energie z kondenzátoru. První kanál osciloskopu zaznamenává vybíjení kondenzátoru. Druhý kanál zaznamenává též vybíjení kondenzátoru do cívky, tento kanál slouží spíše jako kontrola, že vše funguje jak má a nedochází v obvodu k nějakému zkratu. Třetí kanál zaznamenává pomocí klešťového ampérmetru proud v simulované komoře. Zdroj byl nabíjen na maximálně 40 V/2 A. Počítač sloužil jednak k ovládání celé sestavy, ale jednak jako spouštěč programu do arduina, které sloužilo k vysílání krátkého napěťového signálu do triggeru. Trigger v obvodu slouží jako galvanické oddělení od silové části obvodu s kondenzátorem pomocí fotorezistoru. Signál z arduina projde triggerem dále k tyristoru, který tak krátkým napěťovým impulsem otevře tyristor a dojde k vybití kondenzátoru a propuštění pouze první půlvlny napětí z kondenzátoru. To je důležité z hlediska udržení plazmatu v komoře, protože aby plazma bylo v čase stabilní, tak nesmíme v průběhu výboje používat střídavý proud. To je z důvodu, že by došlo k otočení směru urychlení částic v komoře a v tomto okamžiku by plazmatický prstenec byl destabilizován a došlo by k zániku plazmatu v komoře tokamaku. Pro porovnání s technologickým schématem z Obr.3.14 je k dispozici i jeho laboratorní implementace na Obr.3.15.



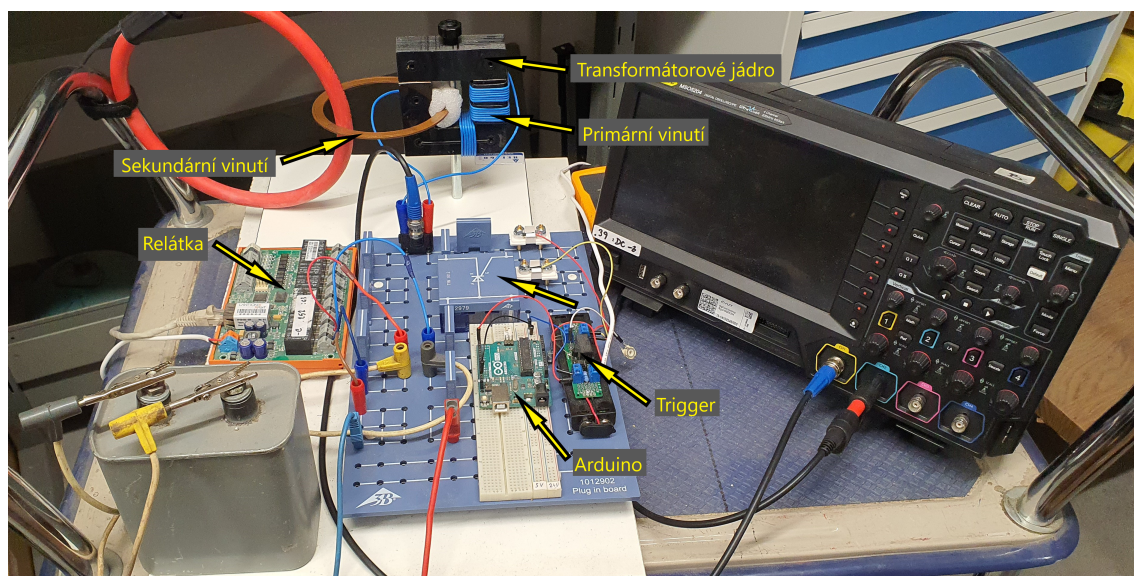
Obrázek 3.15: Laboratorní zapojení vakuového výboje v rámci table-top experimentu.

Jako simulování transformátorového jádra bylo využito laboratorní verze transformátorového jádra od značky Helago. Primár byl sestaven z namotaného drátu o 3x šesti závitech rozmístěných podobně jako na tokamaku GOLEM a jako sekundární vinutí nám posloužil měděný těsnící kroužek jako simulování komory tokamaku. Detailní popis je na Obr.3.16. Popis použitých komponent ve druhé fázi table-top experimentu je na Obr.3.17, kde jsou popsány komponenty, které byly použity navíc oproti RLC obvodu.

Po úspěšném zprovoznění tyristoru v obvodu se poměrně znatelně změnilo časové okno table-top experimentu. V RLC obvodu (viz. 3.10) během prvních 250 mikrosekund byly zaznamenány přibližně dvě celé periody, přičemž v obvodu s tyristorem byla během stejného času propuštěna pouze první půlperioda kosinu, který je charakteristický pro vybití kondenzátoru. Z toho plyne, že se parametry obvodu musely značně změnit, protože parametry obvodu jako odpor, indukčnost a kapacita mají přímý vliv na průběh proudu a napětí v obvodu [33]. Z toho důvodu bylo nutné nalézt opětovně parametry primárního obvodu s tyristorem a následně zjistit parametry sekundárního obvodu. Pro nalezení odhadu parametrů primárního obvodu bylo využito aproximace primárního vinutí analytickým řešením RLC obvodu, kde napětí na kondenzátoru a kapacita kondenzátoru byly brány jako pevné konstanty. Vykreslená data jsou k nahlédnutí na Obr.3.18.



Obrázek 3.16: Laboratorní transformátorové jádro table-top experimentu.



Obrázek 3.17: Popis použitých komponent vakuového výboje v rámci table-top experimentu.

Z obrázku 3.18 si lze povšimnout, že analytické řešení RLC obvodu poměrně dobře aproximuje napětí na kondenzátoru. Parametry obvodu pro primární vinutí po této aproximaci vyšly:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0.5 \Omega \\ L_1 &= 89 \mu\text{H} \\ C_1 &= 50 \mu\text{F} \\ U_C(0) &= 28 \text{V}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

kde napětí bylo sice nabíjeno na 30 Voltů, ale je nutné zmínit, že mezi odpojením zdroje a sepnutím tyristoru proběhla lehká latence, která způsobila vybití kondenzátoru před sepnutím tyristoru přibližně o 2 Volty a proto je ve (3.35) uvedeno 28 Voltů. Čeho si lze dále povšimnout, že v obvodu při použití tyristoru došlo k navýšení odporu a také k navýšení indukčnosti. Tento fakt dává smysl, protože navýšení indukčnosti způsobuje prodloužení periody v obvodu. Použitý kód je k dispozici [37].

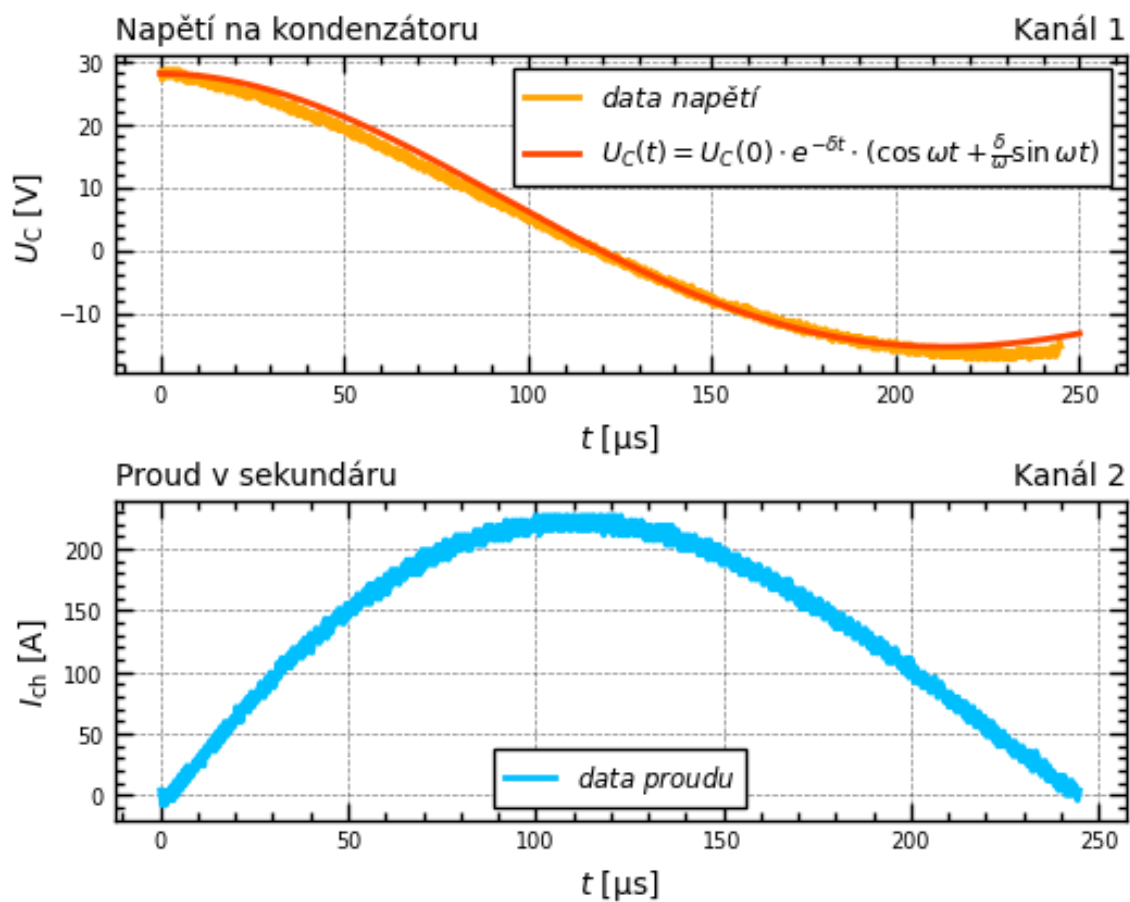
Pro zjištění odporu měděného prstence bylo využito přístroje určenému k měření odporů a také indukčností. Pro měděný prsteneček vyšly parametry:

$$\begin{aligned} R_{\text{ch}} &= 0.2 \text{m}\Omega \\ L_{\text{ch}} &= 0.13 \mu\text{H}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

kde hodnotu odporu lze považovat za správnou, protože byla měřena ještě nezávisle jiným měřicím přístrojem určeným na měření odporu. Co se indukčnosti týče, pro porovnání bylo využito ještě teoretického vzorce pro vlastní indukčnost kruhové smyčky ze [21] ze strany 192:

$$L = \mu_0 r \left(\ln \left(\frac{8r}{R} \right) - \frac{7}{4} \right), \quad (3.37)$$

kde R je vzdálenost mezikružů a r je poloměr smyčky. Pro měděný kroužek jsou tyto hodnoty rovny:



Obrázek 3.18: Ukázka naměřených dat table-top experimentu a také proložení dat napětí na kondenzátoru přibližným analytickým řešením RLC obvodu. Kondenzátor byl nabíjen na 30 V.

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ cm} \\ r &= 5 \text{ cm.} \end{aligned} \tag{3.38}$$

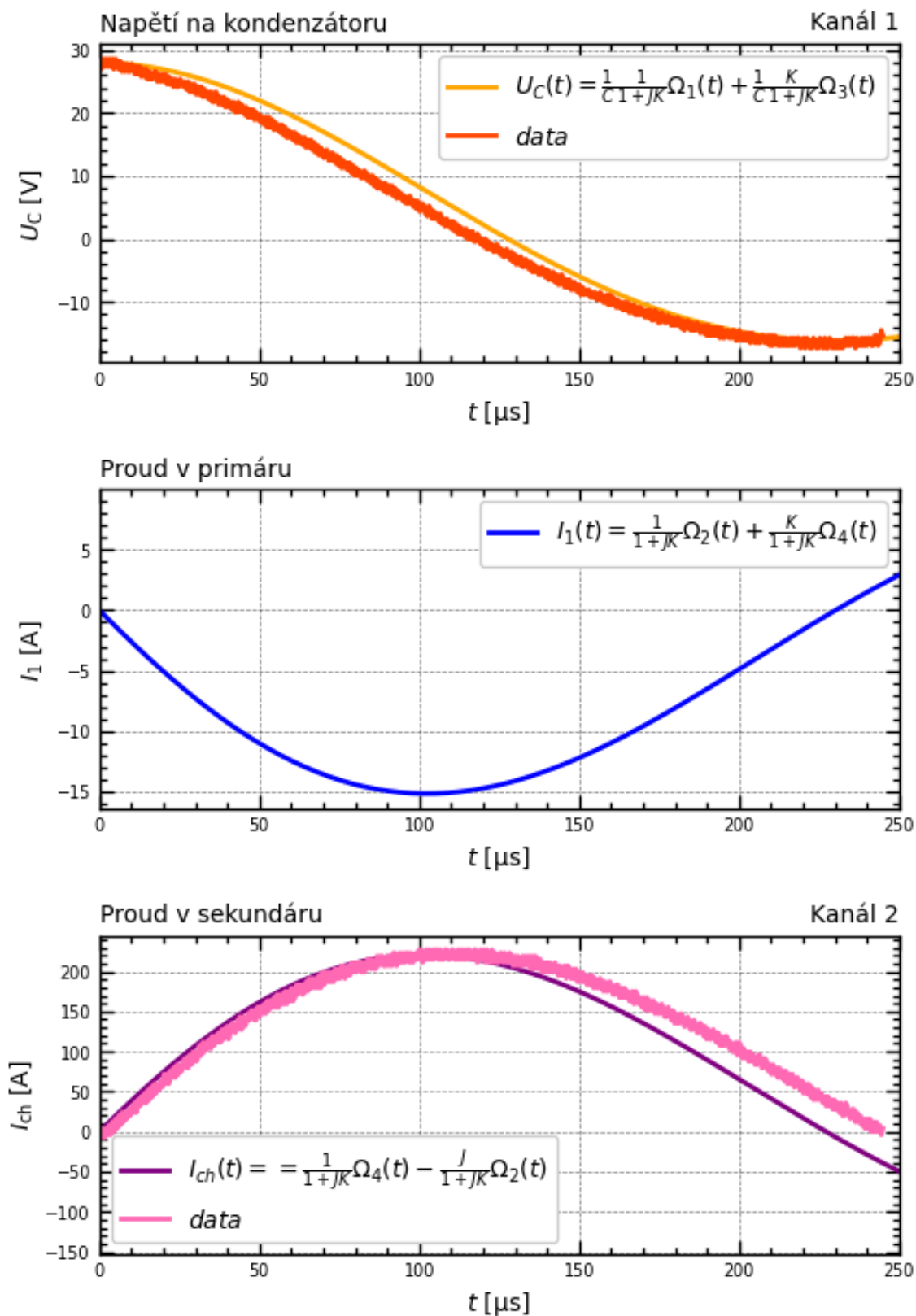
Pro parametry (3.38) a využití vztahu (3.37) vychází vlastní indukčnost L_{ch} měděného prstence:

$$L_{\text{ch}} = 1.22 \text{ } \mu\text{H.} \tag{3.39}$$

Řádově se indukčnosti změřené jak experimentálně tak teoreticky shodují. Bohužel pro zjištěné veličiny (3.35), (3.36) a (3.39) a využití definice vzájemné indukčnosti ze vztahu (3.2) vychází numerické řešení ne zcela ve shodě s experimentem a proto bylo nutné parametry ručně lehce upravit, protože stejně jako v případě vzájemné indukčnosti tokamaku GOLEM definiční vztah (3.2) nezafungoval. Po úpravě parametrů sekundárního obvodu a vzájemné indukčnosti M_1 na:

$$\begin{aligned} R_{\text{ch}} &= 0.015 \text{ m}\Omega \\ L_{\text{ch}} &= 0.07 \text{ } \mu\text{H} \\ M_1 &= 1 \text{ } \mu\text{H,} \end{aligned} \tag{3.40}$$

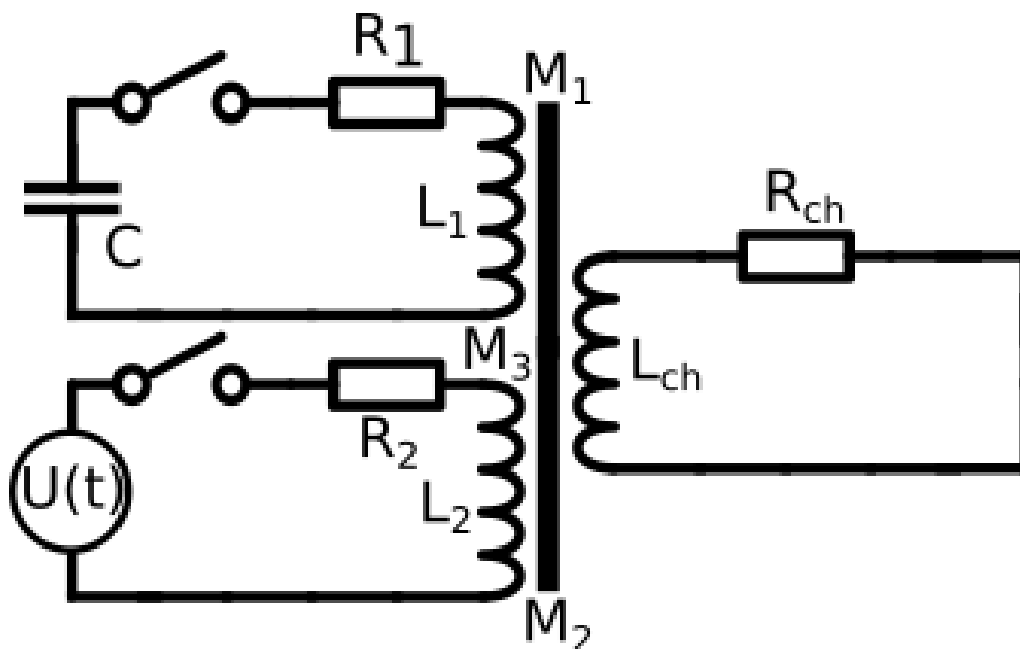
vychází již numerické řešení velmi dobře aproximující naměřená data, který je na obrázku 3.19.



Obrázek 3.19: Porovnání dat z table-top experimentu s numerickým modelem pro parametry (3.35) a (3.40).

3.6 Vakuový výboj s přídavným primárem v rámci table-top experimentu

V této finální fázi bude tvořen model vakuového výboje, kdy bude přidán ještě jeden přídavný primární obvod s proudovým zesilovačem reprezentovaným jako zdroj napětí. Takový obvod lze reprezentovat následujícím zjednodušujícím elektrickým schématem na Obr.3.20.



Obrázek 3.20: Elektrické schéma vakuového výboje s přídavným primárním vinutím.

Na Obr.3.20 je oproti předchozí fázi konstrukce přídavné primární vinutí s odporem R_2 , indukčností L_2 a zdrojem napětí $U(t)$ reprezentující výstup z proudového zesilovače. Navíc zde budou vystupovat dodatečné vzájemné indukčnosti M_1 , M_2 a M_3 , které jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned} M_1 &= k \cdot \sqrt{L_1 L_{ch}} \\ M_2 &= k \cdot \sqrt{L_2 L_{ch}} \\ M_3 &= k \cdot \sqrt{L_1 L_2}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

kde M_1 je vzájemná indukčnost mezi primárem s kondenzátorem a komorou, M_2 je vzájemná indukčnost mezi primárem se zesilovačem a komorou a M_3 je vzájemná indukčnost mezi primáry navzájem. Schéma 3.20 lze popsat následujícím systémem diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}
L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + U_C - M_1 \frac{dI_{ch}}{dt} - M_3 \frac{dI_2}{dt} &= 0 \\
L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 - M_2 \frac{dI_{ch}}{dt} + M_3 \frac{dI_1}{dt} &= U(t) \\
L_{ch} \frac{dI_{ch}}{dt} + R_{ch} I_{ch} + M_1 \frac{dI_1}{dt} + M_2 \frac{dI_2}{dt} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

kde $I_1(t)$ je proud v primárním vinutí s kondenzátorem, $I_2(t)$ je proud v primárním vinutí se zesilovačem, $I_{ch}(t)$ je proud komorou reprezentující sekundární vinutí a $U_C(t)$ je napětí na kondenzátoru.

3.6.1 Numerický model vakuového výboje s přídavným primárem

Nyní je zapotřebí sestavit příslušný numerický model popisující systém rovnic z (3.42), ale nejdříve je třeba udělat opět lehké zjednodušení a systém bude napočítán prozatím bez působení zesilovače, který bude dán rovnicemi:

$$\begin{aligned}
L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + U_C - M_1 \frac{dI_{ch}}{dt} - M_3 \frac{dI_2}{dt} &= 0 \\
L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 - M_2 \frac{dI_{ch}}{dt} + M_3 \frac{dI_1}{dt} &= 0 \\
L_{ch} \frac{dI_{ch}}{dt} + R_{ch} I_{ch} + M_1 \frac{dI_1}{dt} + M_2 \frac{dI_2}{dt} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Korektnost rovnic (3.43) bohužel nelze podložit konkrétním zdrojem, protože žádný relevantní zdroj nebyl k nalezení. Taktika sestavení výše uvedených rovnic byla na základě výsledků z minulého modelu, kde se jednalo o antisymetrickou matici indukčností (3.15) a stejný postup byl využit u sestavení rovnic (3.43). Během odvozování mateřských rovnic byly otestovány také jiné konfigurace pouze s všemi kladnými M_i a se všemi zápornými M_i a v obou případech se jednalo o divergentní řešení v rámci výpočtu pomocí Odeint v Pythonu. Jediná konfigurace, která spolehlivě fungovala a dostávali jsme výsledky jako u jednoduššího vakuového výboje byla právě v případě antisymetrické varianty matice indukčností, která je popsána v (3.48). Jediný relevantní materiál, který se alespoň trochu zabýval obdobným tématem byl [39], kde se obdobná matice indukčností nachází v poměrně složitém modelu transformátoru. Pro vyzkoušení různých konfigurací matice indukčností je k nahlédnutí ve vzorovém kódu [40].

Pro vyřešení soustavy (3.43) numericky bude zapotřebí převedení soustavy na kanonický tvar obdobně jako u vakuového výboje. Stejně jako u předchozí soustavy rovnic (3.15) z vakuového výboje bude třeba vyřešit potíž s provázaností nejvyšších derivací a také snížit počet neznámých ze čtyřech neznámých funkcí $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_{ch}(t)$, $U_C(t)$ na tři nábojové rovnice skrze vztahy:

$$I_1 = \frac{dQ_1}{dt}, \quad I_2 = \frac{dQ_2}{dt}, \quad I_{ch} = \frac{dq}{dt}, \quad U_C = \frac{Q_1}{C_1}, \tag{3.44}$$

kde $Q_1(t)$ je funkce náboje s primárem s kondenzátorem, $Q_2(t)$ je funkce náboje se zesilovačem a $q(t)$ je funkce náboje protékajícího komorou. Když do rovnice (3.43) dosadíme (3.44) dostaneme soustavu pouze v řeči funkcí $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $q(t)$ ve tvaru:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d^2 Q_1}{dt^2} + R_1 \frac{dQ_1}{dt} + \frac{Q_1}{C_1} - M_1 \frac{d^2 q}{dt^2} - M_3 \frac{d^2 Q_2}{dt^2} &= 0 \\ L_2 \frac{d^2 Q_2}{dt^2} + R_2 \frac{dQ_2}{dt} - M_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + M_3 \frac{d^2 Q_1}{dt^2} &= 0 \\ L_{\text{ch}} \frac{d^2 q}{dt^2} + R_{\text{ch}} \frac{dq}{dt} + M_1 \frac{d^2 Q_1}{dt^2} + M_2 \frac{d^2 Q_2}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Výše uvedená soustava má počáteční podmínky:

$$\begin{aligned} Q_1(0) &= C_1 \cdot U_C(0) \\ \dot{Q}_1(0) &= I_1(0) = 0 \\ Q_2(0) &= 0 \\ \dot{Q}_2(0) &= I_2(0) = 0 \\ q(0) &= 0 \\ \dot{q}(0) &= I_{\text{ch}}(0) = 0, \end{aligned} \quad (3.46)$$

kde tečkované veličiny reprezentují časové derivace. V převedené nábojové soustavě (3.45) budou "vytknuty" druhé derivace a bude zavedena substituce podobně jako u vakuového výboje:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{(L_1 Q_1 - M_3 Q_2 - M_1 q)}_X + R_1 \frac{dQ_1}{dt} + \frac{Q_1}{C_1} &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{(M_3 Q_1 + L_2 Q_2 - M_2 q)}_Y + R_2 \frac{dQ_2}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{(M_1 Q_1 + M_2 Q_2 - L_{\text{ch}} q)}_Z + R_{\text{ch}} \frac{dq}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (3.47)$$

kde X , Y , Z je vhodná substituce, kterou je třeba zavést na převedení soustavy na kanonický tvar. Tedy pomocná substituce bude ve tvaru:

$$\begin{aligned} X &= L_1 Q_1 - M_3 Q_2 - M_1 q \\ Y &= M_3 Q_1 + L_2 Q_2 - M_2 q \\ Z &= M_1 Q_1 + M_2 Q_2 - L_{\text{ch}} q. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ze substituce (3.48) je třeba ještě napočítat zpětnou substituci potřebnou pro dosazení do (3.47). Zpětnou substituci lze získat vyřešením následující lineární soustavy soustavy:

$$\begin{pmatrix} L_1 & -M_3 & -M_1 \\ M_3 & L_2 & -M_2 \\ M_1 & M_2 & L_{\text{ch}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Soustavu (3.49) lze vyřešit za pomoci například Cramerova pravidla [36] a nikoli běžnou metodou řešení lineárních soustav rovnic, protože vektor pravé strany je sada funkcí. Pro aplikaci Cramerova pravidla je třeba napočítat:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} L_1 & -M_3 & -M_1 \\ M_3 & L_2 & -M_2 \\ M_1 & M_2 & L_{\text{ch}} \end{vmatrix} \\
\Delta_1 &= \begin{vmatrix} X & -M_3 & -M_1 \\ Y & L_2 & -M_2 \\ Z & M_2 & L_{\text{ch}} \end{vmatrix} \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} L_1 & X & -M_1 \\ M_3 & Y & -M_2 \\ M_1 & Z & L_{\text{ch}} \end{vmatrix} \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} L_1 & -M_3 & X \\ M_3 & L_2 & Y \\ M_1 & M_2 & Z \end{vmatrix},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

kde Δ , Δ_1 , Δ_2 a Δ_3 jsou pomocné determinanty pro výpočet neznámých funkcí Q_1 , Q_2 a q . První determinant Δ je determinant pouze číselné matice, což lze v Pythonu napočítat příslušnou funkcí. Ostatní determinanty Δ_1 , Δ_2 a Δ_3 je zapotřebí ještě více rozepsat, protože obsahují neznámé funkce X , Y a Z . Proto pro vyřešení determinantů bude vhodné použít rozvoje determinantu podle sloupce s pomocnými funkcemi X , Y , Z abychom odseparovali neznámé funkce od ostatních konstant. Takový rozvoj bude vypadat:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \begin{vmatrix} X & -M_3 & -M_1 \\ Y & L_2 & -M_2 \\ Z & M_2 & L_{\text{ch}} \end{vmatrix} = \\
&= (-1)^{1+1} X \underbrace{\begin{vmatrix} L_2 & -M_2 \\ M_2 & L_{\text{ch}} \end{vmatrix}}_{d_1} + (-1)^{2+1} Y \underbrace{\begin{vmatrix} -M_3 & -M_1 \\ M_2 & L_{\text{ch}} \end{vmatrix}}_{d_2} + (-1)^{3+1} Z \underbrace{\begin{vmatrix} -M_3 & -M_1 \\ L_2 & -M_2 \end{vmatrix}}_{d_3} \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} L_1 & X & -M_1 \\ M_3 & Y & -M_2 \\ M_1 & Z & L_{\text{ch}} \end{vmatrix} = \\
&= (-1)^{1+2} X \underbrace{\begin{vmatrix} M_3 & -M_2 \\ M_1 & L_{\text{ch}} \end{vmatrix}}_{d_4} + (-1)^{2+2} Y \underbrace{\begin{vmatrix} L_1 & -M_1 \\ M_1 & L_{\text{ch}} \end{vmatrix}}_{d_5} + (-1)^{3+2} Z \underbrace{\begin{vmatrix} L_1 & -M_1 \\ M_3 & -M_2 \end{vmatrix}}_{d_6} \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} L_1 & -M_3 & X \\ M_3 & L_2 & Y \\ M_1 & M_2 & Z \end{vmatrix} = \\
&= (-1)^{1+3} X \underbrace{\begin{vmatrix} M_3 & L_2 \\ M_1 & M_2 \end{vmatrix}}_{d_7} + (-1)^{2+3} Y \underbrace{\begin{vmatrix} L_1 & -M_3 \\ M_1 & M_2 \end{vmatrix}}_{d_8} + (-1)^{3+3} Z \underbrace{\begin{vmatrix} L_1 & -M_3 \\ M_3 & L_2 \end{vmatrix}}_{d_9},
\end{aligned} \tag{3.51}$$

kde d_i pro $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ jsou již pouze číselné determinanty, které lze už spočítat pomocí funkce v Pythonu. Nyní už z Cramerova pravidla lze napočítat tvary funkcí Q_1 , Q_2 a q následovně:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \underbrace{\frac{d_1}{\Delta}}_{D_1} X - \underbrace{\frac{d_2}{\Delta}}_{D_2} Y + \underbrace{\frac{d_3}{\Delta}}_{D_3} Z \\ Q_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\underbrace{\frac{d_4}{\Delta}}_{D_4} X + \underbrace{\frac{d_5}{\Delta}}_{D_5} Y - \underbrace{\frac{d_6}{\Delta}}_{D_6} Z \\ q &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = \underbrace{\frac{d_7}{\Delta}}_{D_7} X - \underbrace{\frac{d_8}{\Delta}}_{D_8} Y + \underbrace{\frac{d_9}{\Delta}}_{D_9} Z, \end{aligned} \quad (3.52)$$

kde D_i pro $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ je pomocné zjednodušující označení. Nyní substituci (3.48) a (3.52) je třeba dosadit do (3.47) a lze dostat:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} + R_1 \cdot \left(D_1 \frac{dX}{dt} - D_2 \frac{dY}{dt} + D_3 \frac{dZ}{dt} \right) + \frac{1}{C} \cdot (D_1 X - D_2 Y + D_3 Z) &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + R_2 \cdot \left(-D_4 \frac{dX}{dt} + D_5 \frac{dY}{dt} - D_6 \frac{dZ}{dt} \right) &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} + R_{\text{ch}} \cdot \left(D_7 \frac{dX}{dt} - D_8 \frac{dY}{dt} + D_9 \frac{dZ}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Podobně jako u vakuového výboje zavedeme sadu substitucí, která sníží řád soustavy diferenciálních rovnic. Substitute bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= X, \quad \Omega_2 = \frac{dX}{dt} = \frac{d\Omega_1}{dt} \\ \Omega_3 &= Y, \quad \Omega_4 = \frac{dY}{dt} = \frac{d\Omega_3}{dt} \\ \Omega_5 &= Z, \quad \Omega_6 = \frac{dZ}{dt} = \frac{d\Omega_5}{dt}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Výše uvedené vztahy (3.54) do soustavy (3.53) a dostaneme soustavu rovnic, která je již vhodná pro aplikaci funkce Odeint k knihovny SciPy a bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_1}{dt} &= \Omega_2 \\
\frac{d\Omega_2}{dt} &= -R_1 \cdot (D_1\Omega_2 - D_2\Omega_4 + D_3\Omega_6) - \frac{1}{C_1} \cdot (D_1\Omega_1 - D_2\Omega_3 + D_3\Omega_5) \\
\frac{d\Omega_3}{dt} &= \Omega_4 \\
\frac{d\Omega_4}{dt} &= -R_2 \cdot (-D_4\Omega_2 + D_5\Omega_4 - D_6\Omega_6) \\
\frac{d\Omega_5}{dt} &= \Omega_6 \\
\frac{d\Omega_6}{dt} &= -R_{ch} \cdot (D_7\Omega_2 - D_8\Omega_4 + D_9\Omega_6).
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Lze také zapsat v maticové podobě:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \\ \Omega_4(t) \\ \Omega_5(t) \\ \Omega_6(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{D_1}{C_1} & -R_1 D_1 & \frac{D_2}{C_1} & R_1 D_2 & -\frac{D_3}{C_1} & -R_1 D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 D_4 & 0 & -R_2 D_5 & 0 & R_2 D_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -R_{ch} D_7 & 0 & R_{ch} D_8 & 0 & -R_{ch} D_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \\ \Omega_4(t) \\ \Omega_5(t) \\ \Omega_6(t) \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

Výše uvedenou soustavu (3.56) budeme řešit pro počáteční podmínky (3.46) v řeči pomocných proměnných, které jsou rovny:

$$\vec{\Omega}(0) = \begin{pmatrix} \Omega_1(0) \\ \Omega_2(0) \\ \Omega_3(0) \\ \Omega_4(0) \\ \Omega_5(0) \\ \Omega_6(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \dot{Q}_1(0) - M_3 \dot{Q}_2(0) - M_1 \dot{q}(0) \\ L_1 \dot{Q}_1(0) - M_3 \dot{Q}_2(0) - M_1 \dot{q}(0) \\ M_3 \dot{Q}_1(0) + L_2 \dot{Q}_2(0) - M_2 \dot{q}(0) \\ M_3 \dot{Q}_1(0) + L_2 \dot{Q}_2(0) - M_2 \dot{q}(0) \\ M_1 \dot{Q}_1(0) + M_2 \dot{Q}_2(0) + L_{ch} \dot{q}(0) \\ M_1 \dot{Q}_1(0) + M_2 \dot{Q}_2(0) + L_{ch} \dot{q}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 C_1 U_C(0) \\ 0 \\ M_3 C_1 U_C(0) \\ 0 \\ M_1 C_1 U_C(0) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.57}$$

S použitím (3.55) a počátečních podmínek (3.57) lze dostat pomocí funkce Odeint konkrétní průběhy funkcí Ω_i pro $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ze kterých lze reprodukovat hledaná fyzikální řešení. Pro jednotlivá nábojová řešení platí:

$$\begin{aligned}
Q_1(t) &= D_1\Omega_1(t) - D_2\Omega_3(t) + D_3\Omega_5(t) \\
Q_2(t) &= -D_4\Omega_1(t) - D_5\Omega_3(t) + D_6\Omega_5(t) \\
q(t) &= D_7\Omega_1(t) - D_8\Omega_3(t) + D_9\Omega_5(t).
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Z definice (3.44) bude spočítáno vybíjecí napětí na kondenzátoru $U_C(t)$ a jednotlivá proudová řešení $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_{ch}(t)$ následovně:

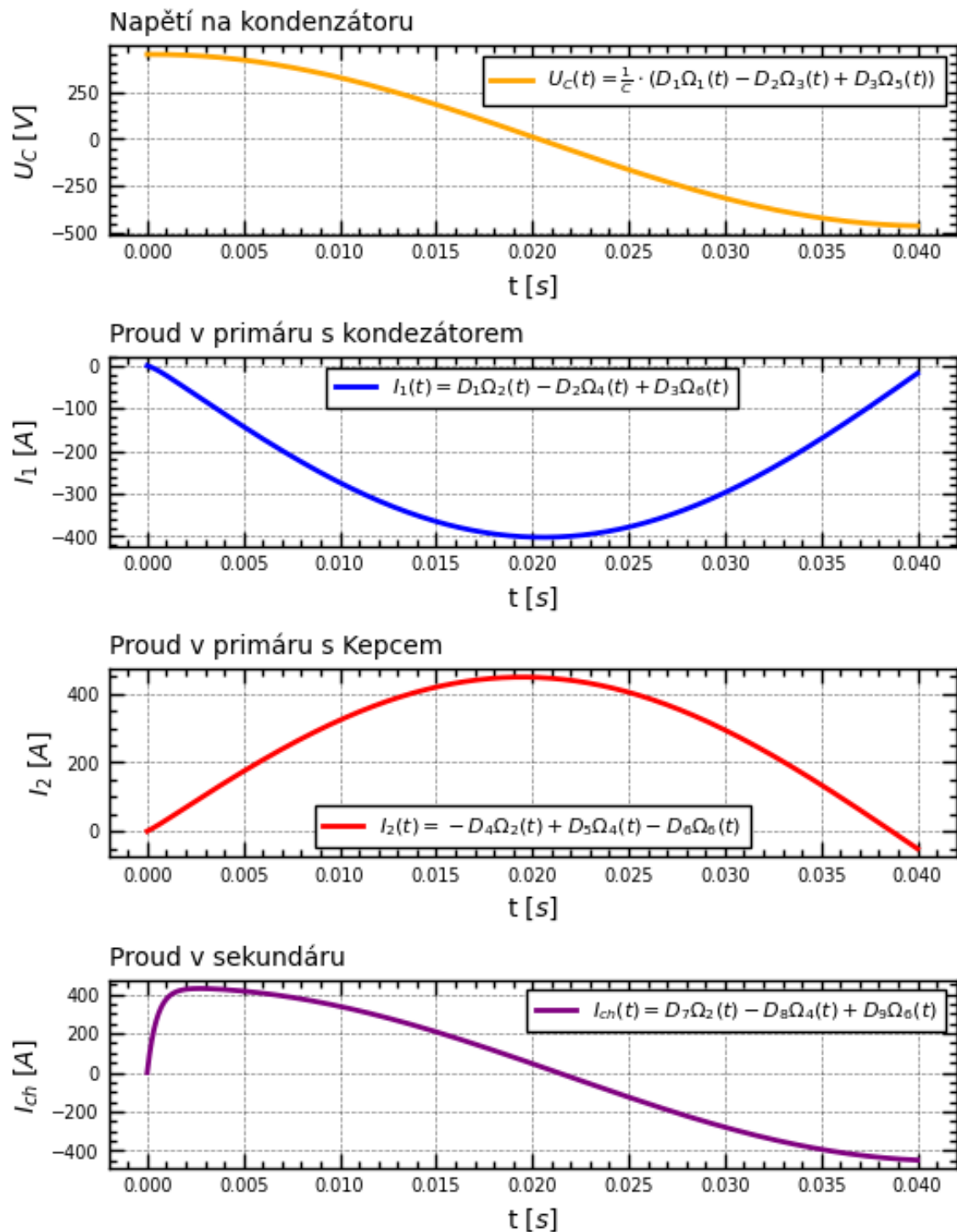
$$\begin{aligned}
U_C(t) &= \frac{Q_1(t)}{C_1} = \frac{1}{C_1} \cdot (D_1\Omega_1(t) - D_2\Omega_3(t) + D_3\Omega_5(t)) \\
I_1(t) &= \dot{Q}_1(t) = D_1\dot{\Omega}_1(t) - D_2\dot{\Omega}_3(t) + D_3\dot{\Omega}_5(t) = \\
&= D_1\Omega_2(t) - D_2\Omega_4(t) + D_3\Omega_6(t) \\
I_2(t) &= \dot{Q}_2(t) = -D_4\Omega_1(t) + D_5\Omega_3(t) - D_6\Omega_5(t) = \\
&= -D_4\Omega_2(t) + D_5\Omega_4(t) - D_6\Omega_6(t) \\
I_{ch}(t) &= \dot{q}(t) = D_7\dot{\Omega}_1(t) - D_8\dot{\Omega}_3(t) + D_9\dot{\Omega}_5(t) = \\
&= D_7\Omega_2(t) - D_8\Omega_4(t) + D_9\Omega_6(t).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Pro ukázkou bude využito známých parametrů GOLEMa a u vzájemných indukčností bylo užito vztahu (3.2), i když je velmi pravděpodobné, že ani zde nelze považovat za korektní hodnoty a také pro první ukázkou jsou hodnoty odporu a indukčnosti voleny v podobných řádech jako je primární vinutí tokamaku GOLEM, protože přesné hodnoty budou uvedeny po konkrétní implementaci v dalších kapitolách. Obrázek 3.21 je pouze ilustrací funkčnosti modelu. Pro první ukázkou bylo využito následujících parametrů:

$$\begin{aligned}
R_1 &= 45 \text{ m}\Omega \\
L_1 &= 7.35 \text{ mH} \\
C_1 &= 11.3 \text{ mF} \\
U_C(0) &= 450 \text{ V} \\
R_2 &= 30 \text{ m}\Omega \\
L_2 &= 5 \text{ mH} \\
R_{ch} &= 9.7 \text{ m}\Omega \\
L_{ch} &= 1 \text{ }\mu\text{H} \\
M_1 &= 0.22 \text{ mH} \\
M_2 &= k \cdot \sqrt{L_2 \cdot L_{ch}} \\
M_3 &= k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Z grafu Obr.3.21 si lze povšimnout, že ve srovnání s grafem Obr.3.13, který reprezentuje porovnání s vakuovým výbojem tokamaku GOLEM, je zde znatelný úbytek proudu komorou v důsledku přidání indukčnosti do obvodu v podobě přídatného vinutí. Sice nejsou k dispozici zcela přesné hodnoty daných veličin, ale je zřejmé, že i bez stabilizace se na cílce propojené se zesilovačem bude indukovat proud. Toto pozorování bude třeba vzít v potaz do budoucí implementace, protože by zesilovač jednak nemusel mít v důsledku vysoké indukčnosti dostatečný výkon, ale jednak by mohlo dojít k poškození zesilovače. Pro budoucí implementaci bude zapotřebí zvážit ideální počet závitů šitý na míru sestavě zesilovačů a také vhodně navolit odpor volbou vhodného vodiče.

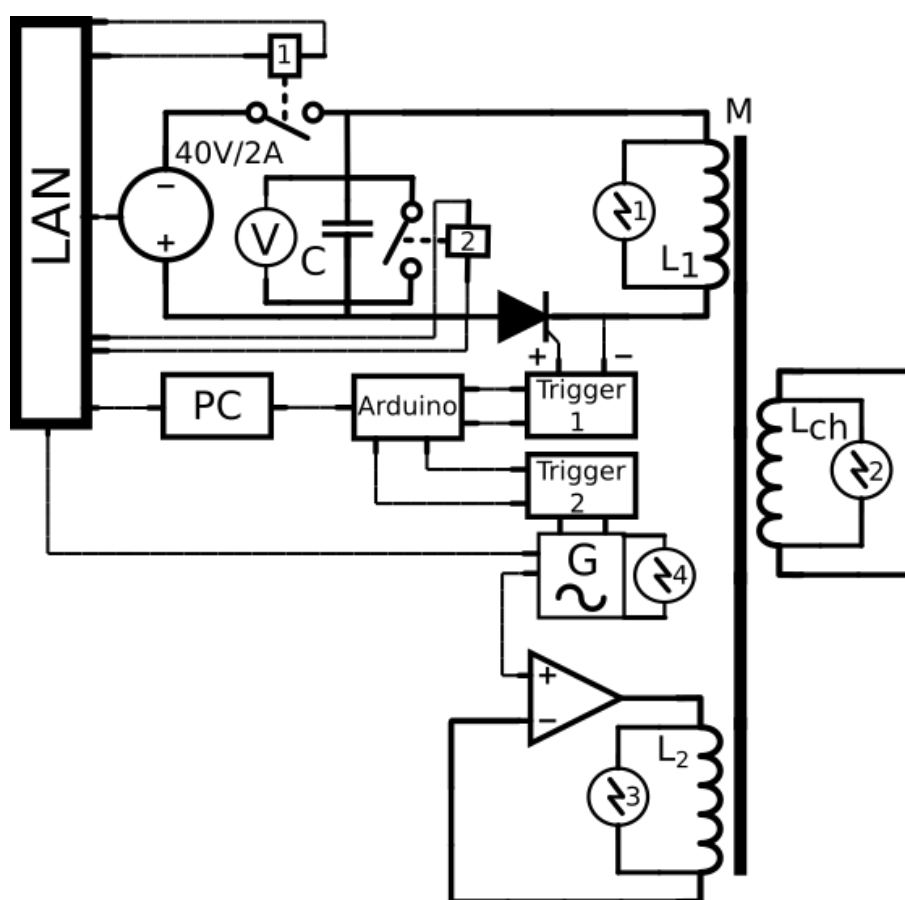
Jednotlivá Numerická řešení



Obrázek 3.21: Ukázka numerického řešení s přídavným primárem s použitím parametrů (3.60) bez stabilizace.

3.6.2 Laboratorní verze vakuového výboje s přídavným primárem

Obdobně jako u předchozích fází konstrukce zde došlo opět k implementaci nových komponent. Technologické schéma konstrukce je na obrázku 3.22. Jedná se už o poměrně komplexní systém, kde oproti předchozí části přibylo nové primární vinutí pro stabilizaci proudu v komoře. Jako zdroj je použito zesilovače KEPCO, který zesílí předdefinovaný signál z připojeného frekvenčního generátoru. Frekvenční generátor je trigrován obdobně jako tyristor pomocí druhého triggeru pro galvanické oddělení od silové části obvodu a napěťový impuls je generován opět arduinem. Díky propojení s arduinem jsme schopni poměrně snadno zesynchronizovat sepnutí tyristoru a sepnutí frekvenčního generátoru.

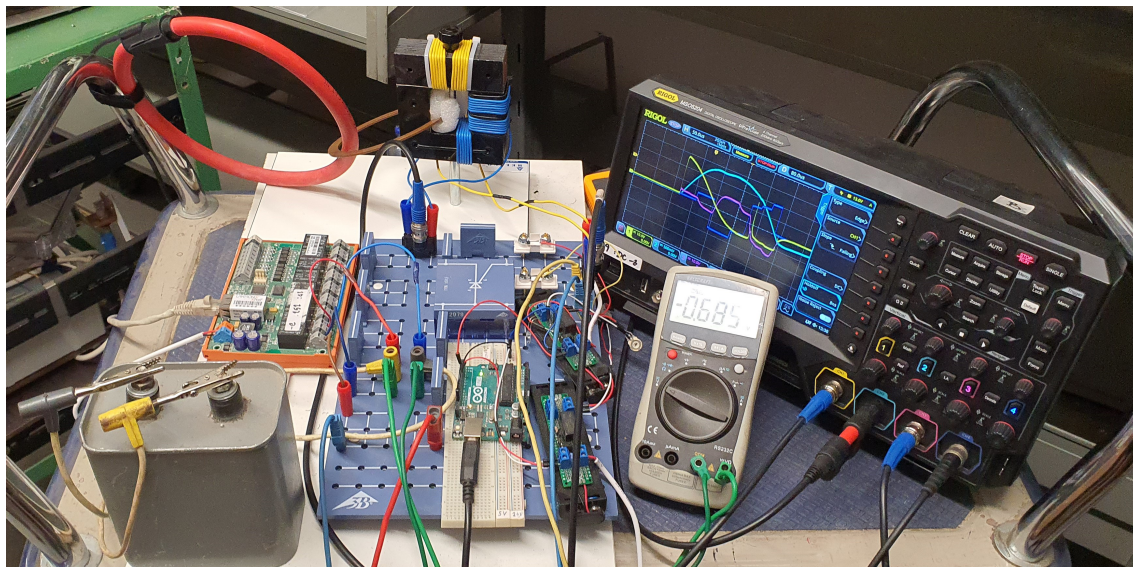


Obrázek 3.22: Technologické schéma zapojení finální verze table-top experimentu. Použité schematické značky z [35].

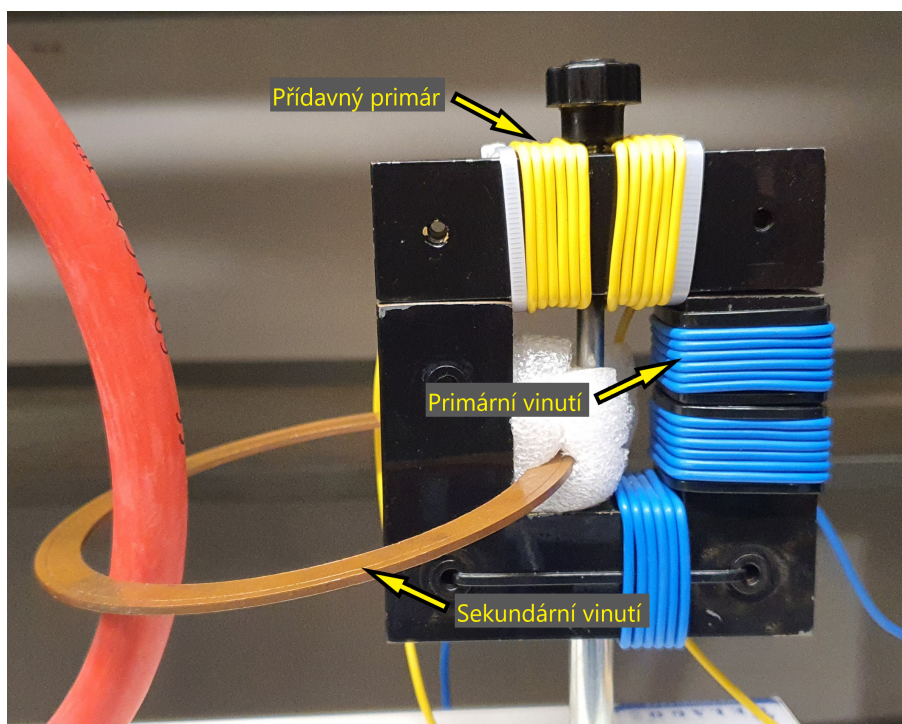
Sběr dat probíhá tentokrát ze všech čtyř kanálů osciloskopu. Na kanále 1 se zaznamenává napětí na kondenzátoru, na kanále 2 se zaznamenává proud simulovanou komorou, na kanále 3 je napětí na přídavném primáru a na kanále 4 je vygenerovaná wave-forma z frekvenčního generátoru. Na Obr.3.23 je pro porovnání s Obr.3.22 laboratorní implementace.

V této fázi, jak již bylo řečeno, došlo k navinutí přídavného primárního vinutí na laboratorní transformátorové jádro. Bylo zde navinuto 2x po šesti závitech. Tento

počet byl zvolen z důvodu místa na transformátorovém jádře. Modifikované transformátorové jádro je k nahlédnutí na Obr.3.24 včetně popisu jednotlivých částí.



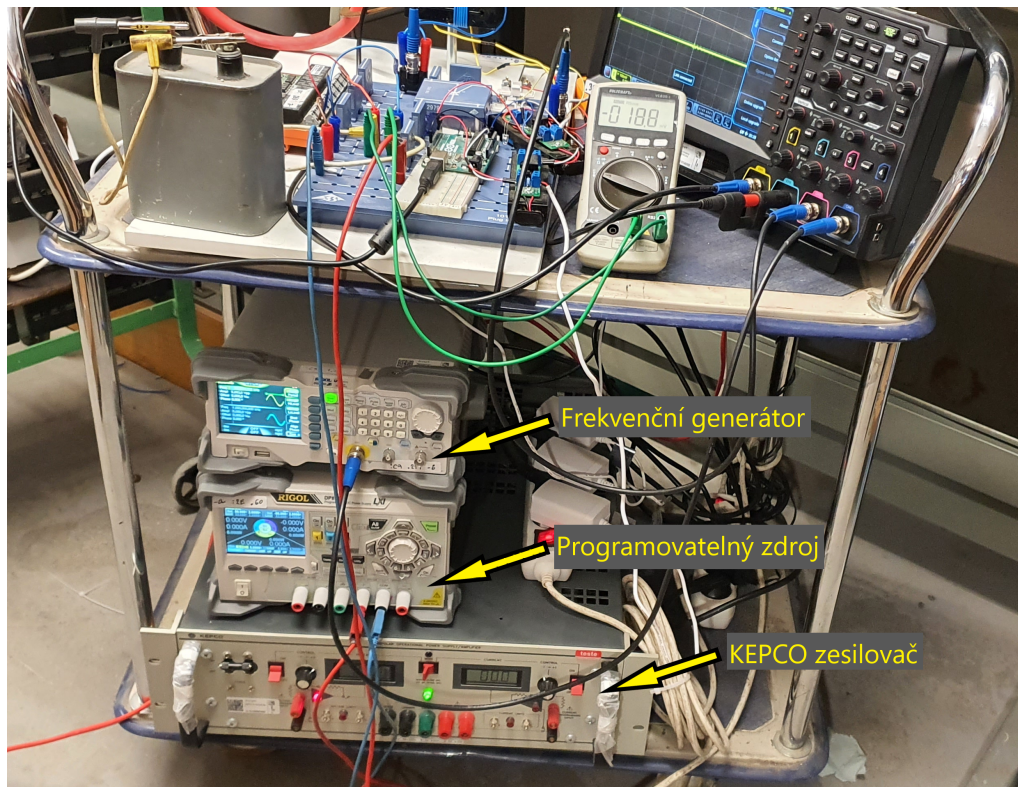
Obrázek 3.23: Laboratorní zapojení finální verze table-top experimentu.



Obrázek 3.24: Laboratorní verze transformátorového jádra table-top experimentu.

Na Obr.3.25 je detailnější pohled na celou sestavu 3. a finální fáze konstrukce table-top experimentu.

Po zprovoznění celé sestavy došlo ke zkoušení různých konfigurací wave-forem poslaných z frekvenčního generátoru do KEPCO zesilovače a hledání vhodné konfigurace, která by dokázala udržet proud na měděném prstýnku na konstantní hodnotě. Takovou konfiguraci se podařilo najít a je k nahlédnutí na Obr.3.26. Zesilovač byl nastaven do napětového módu, protože původní motivací bylo porovnat numerický model s naměřenými daty a pro funkci napětí by bylo porovnání jednodušší z důvodu povahy rovnic (3.42), kde na pravé straně druhé rovnice stojí funkce napětí. Avšak z důvodu neznalosti potřebných parametrů jako jsou vzájemné indukčnosti není možné porovnání provést v table-top verzi. Proto lze v grafu Obr.3.26 vidět v posledním grafu výstup ze zesilovače KEPCO v podobě napětového signálu. Lze si také povšimnout, že ve fázi bez stabilizace se na přídavném vinutí naindukuje napětí v druhém grafu, které odpovídá přibližně třetině napětí vybitého z kondenzátoru z grafu 1. Tento jev odpovídá predikcím z numerického modelu. Pro budoucí implementaci na tokamak GOLEM bude nutné tento fakt vzít v úvahu. Buďto otestovat jakou míru naindukované energie je schopno KEPCO snést aniž by došlo k jeho poškození, nebo zvážit použití nějaké polovodičové součástky pro kompenzaci naindukované energie. V případě table-top bylo využito ovlivnění již naindukované energie v přídavném vinutí pomocí výstupu ze zesilovače KEPCO, které se "opíralo" do této naindukované energie s cílem stabilizovat průběh proudu v měděném prstenci, který lze vidět na druhém grafu. Z druhého grafu si lze také povšimnout, že proud měděným prstýnkem se v módu se stabilizací udržuje na přibližně konstantní hodnotě přibližně 140 Ampér při zachování napětí na kondenzátoru. Výsledný proud měděným prstýnkem by mohl lépe opisovat danou konstantní hodnotu proudu, kdyby stabilizační křivka ze čtvrtého grafu byla jednak jemnější a jednak měla méně hran, které způsobují



Obrázek 3.25: Celá laboratorní sestava finální verze table-top experimentu.

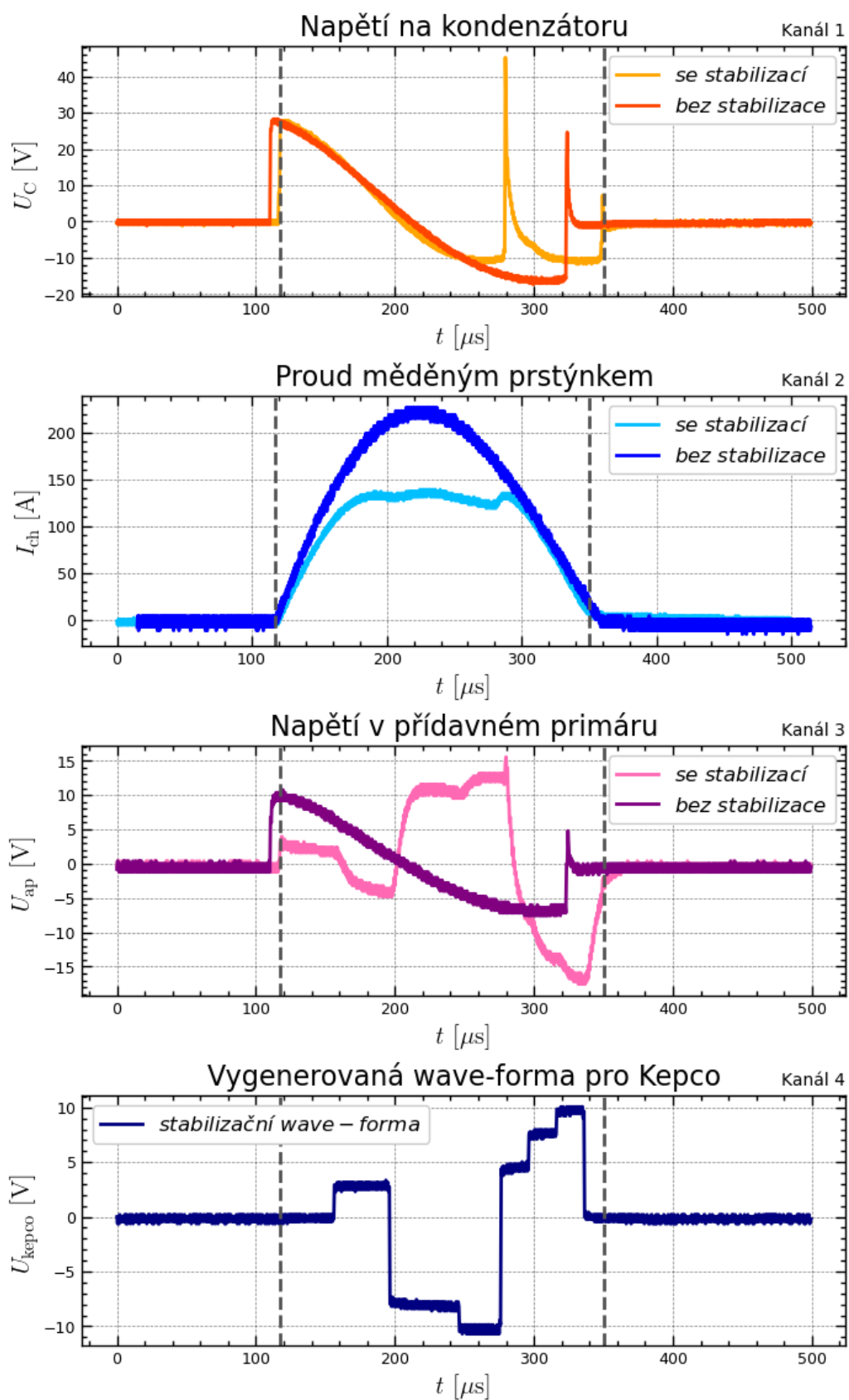
nestability.

V případě table-top experimentu bylo využito napětového režimu. KEPCO zesilovač byl schopen ovlivnit celkový proud v měděném prstenci změnou napětí, protože platí základní vzorec pro transformátory [41]:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}, \quad (3.61)$$

kde $N_{1,2}$ je poměr počtu závitů, $U_{1,2}$ je poměr vstupního a výstupního napětí a $I_{1,2}$ jsou poměry vstupního a výstupního proudu, který se z spočítá z poměru napětí a využití Ohmova zákona. Z toho plyne, že ovlivnění výsledného proudu v měděném prstýnku lze provést oběma režimy zesilovače KEPCO.

Co se porovnání s numerickým modelem týče, tak z časové náročnosti odhadu vzájemných indukčností a zjištění odporu a indukčnosti přídavného primárního vinutí (obdobně jako v předchozí fázi konstrukce) nebylo již možné porovnání provést. To bohužel platí i pro porovnání s výsledkem nalezení flat-top konfigurace v laboratorní verzi, kdy je zapotřebí taktéž znalost těchto veličin. Vzorový kód pro úpravu dat z experimentu a vykreslení řešení je k nahlédnutí [40]. Odkaz na vzorový kód obsahuje mimo jiné také první verzi programu pro definování napětového signálu, který má reprezentovat výstup ze zesilovače. Je zde ukázka jak definování napětového signálu ovlivňuje výsledný tvar proudu komorou.



Obrázek 3.26: Porovnání dat z finální verze table-top experimentu bez stabilizace a se stabilizací.

Kapitola 4

Specifikace implementace zesilovače KEPCO do provozu tokamaku GOLEM

4.1 Odhad parametrů pro soustavu zesilovačů KEPCO

Tato podkapitola je zaměřena na optimalizaci přídavného primárního vinutí transformátoru pro tokamak GOLEM. Hlavním úkolem bude určit charakteristiky vodiče a kolik závitů navinout na transformátorové jádro tokamaku. Každý zesilovač značky KEPCO má různé hodnoty maximálního napětí a proudu [29], čímž je limitovaný maximální výkon, který činí vždy 400 Wattů. Podle výrobce lze sériově nebo paralelně zapojit maximálně 5 takových zesilovačů.

Soustavu zesilovačů chceme použít jako zdroj, který bude napájet přídavné primární vinutí na jádru transformátoru tokamaku GOLEM. Aby bylo dosaženo nejlepších výsledků co se indukovaného proudu týče, který by měl ovlivnit výsledný proud protékající plazmatem, je zapotřebí maximalizovat proud v tomto vedení a toho lze docílit paralelně.

Na stránkách výrobce KEPCA jsou uvedeny jednotlivé parametry různých typů zesilovačů [29]. Výběr bude redukován pouze na ten, který disponuje maximálním dosažitelným proudem a to konkrétně 20 A/20 V a bude třeba předpokládat maximální dosažitelný výkon, tedy pro zapojení 5 těchto zesilovačů paralelně.

Pro paralelní zapojení se zachovává hodnota napětí v našem případě $U = 20$ V a naopak proudy jednotlivých zesilovačů se sčítají jako $I = 5 \cdot 20$ A = 100 A a výsledný celkový výkon je pak $P = U \cdot I = 20 \cdot 100 = 2$ kW.

Aby zesilovače mohly dosáhnout takového maximálního výkonu, je zapotřebí doladit výsledný odpor primárního vinutí tak, aby mohly využít plného potenciálu soustavy KEPCO. Pro hrubý odhad požadovaného odporu R_{poz} pro maximální zatížení soustavy zesilovačů lze využít klasického Ohmova zákona:

$$R_{\text{poz}} = \frac{U}{I} = \frac{20 \text{ V}}{100 \text{ A}} = 0.2 \Omega \quad (4.1)$$

Soustava zesilovačů, jak již bylo řečeno, bude sloužit jako napájení přídavného

primárního vinutí transformátoru, které bude ovlivňovat výsledný průběh proudu plazmatem. Pro výrobu takového nového primárního vinutí bude zapotřebí dostatečně dlouhý vodič, který by zároveň neměl přesáhnout hodnotu výše uvedeného odporu. aby bylo možno využít plného potenciálu soustavy zesilovačů. Pro tyto účely lze využít vzorce pro výpočet odporu přídatného vinutí R_2 na základě geometrie [21] a použitého materiálu ve vodiči:

$$R_2 = \rho \frac{l}{S}, \quad (4.2)$$

kde ρ je měrný elektrický odpor, l je délka vodiče a S je průřez vodiče. Odpor R_2 by měl být ideálně roven požadovanému odporu R_{poz} pro využití plného výkonu soustavy KEPCO. Pro určení potřebných parametrů a volby materiálu musíme vytvořit funkci, která bude jistě závislá na počtu závitů, které zvýší celkovou délku vodiče, ale také celkovou indukčnost. V následujících výpočtech bude třeba si uvést známé parametry pro transformátorové jádro tokamaku GOLEM a zavést je přímo do našich výpočtů. Transformátorové jádro tokamaku GOLEM má obdélníkový průřez stranách délky:

$$\begin{aligned} a &= 33 \text{ cm} \\ b &= 25.5 \text{ cm.} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aby byl naindukován dostatečně silný proud pomocí proudových zesilovačů ovlivňující průběh proudu plazmatem, bude zapotřebí navinout dostatečné množství závitů na transformátorové jádro a zároveň tento počet závitů navolit tak, aby soustava zesilovačů nemusela kompenzovat příliš velké naindukované napětí, které by mohlo být pro zesilovače nebezpečné. S počtem závitů souvisí vlastní indukčnost a také vzájemná indukčnost jednak mezi jednotlivými primárními vinutími, tak i mezi komorou a později i plazmatem samotným. Pro výpočet vlastní indukčnosti [21] můžeme využít následujícího jednoduchého vzorce:

$$L = \mu N^2 \frac{l_c}{S_c}, \quad (4.4)$$

kde μ je permeabilita prostředí, N je počet závitů, l_c je délka cívky a S_c průřez cívky. Nyní uděláme odhad výsledné indukčnosti přídatného primárního obvodu pomocí výše uvedeného vzorce v závislosti na volbě závitů. Nejdříve však je třeba udělat odhad délky vodiče kalibrovaný na výše uvedený odpor (4.1) v závislosti na volbě průměru a jako materiál budeme uvažovat dostupnou měď. V následujícím odkaze [42] jsou uvedeny běžně dostupné průměry silových vodičů. Jako měrný odpor bude využita konstanta dostupná ze stránek [43] a také se dá zde dočíst o různých typech silových vodičů. Pro výpočet celkového odporu soustavy s přídatným primárem, bude zapotřebí zavést zjistit jak dlouhý vodič bude potřeba použít, což lze zjistit vyjádřením ze vztahu 4.2:

$$l = \frac{R_2 \cdot S}{\rho}. \quad (4.5)$$

Pro volbu parametrů:

$$\begin{aligned} R_2 &= 0.2 \Omega \\ S &= 6 \text{ mm}^2 \\ \rho &= \rho_{\text{CU}} = 0.0178 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

vychází dosazením do vztahu (4.5) výsledná délka vodiče:

$$l = 67.4 \text{ m.} \quad (4.7)$$

Nyní je třeba spočítat kolik závitů přibližně z délky (4.7) lze realizovat. Když odečteme od celkové délky délku vodiče potřebnou pro vedení do kondenzátorovny přibližně o velikosti $l_V = 20 \text{ m}$ a faktu, že zbylý vodič bude opisovat přibližně obdélník z (4.3), tak z takové délky vodiče lze navinout přibližně:

$$N = \frac{l - l_V}{2 \cdot (a + b)} = 37,1 \sim 40 \text{ závitů.}$$

Výše uvedený průřez (4.6) byl použit z důvodu srovnatelného počtu závitů jako je v současné době na tokamaku GOLEM (Ukázkový kód [44]). Co by však bylo zapotřebí je otestovat jak zesilovače reagují na zvyšující se indukčnost instalovaného vinutí, protože srovnatelný počet závitů není relevantní důvod a bohužel se nedalo v příručce pro použité zesilovače zjistit kolik naindukované energie v důsledku působení vybíjení kondenzátorem je KEPCO schopno kompenzovat aniž by došlo k jeho poškození. Tato naindukovaná energie stoupá právě s počtem závitů.

Avšak s použitím rovnice (4.4) a napočítaných hodnot potřebných pro dosazení vycházely hodnoty indukčnosti v řádech jednotek Henry, konkrétně $H = 8.2 \text{ H}$, což nelze brát jako relevantní hodnotu indukčnosti. K tomuto závěru lze dojít s porovnáním indukčnosti z tokamaku GOLEM primárního vinutí, která je experimentálně naměřena $L_1 = 7.35 \text{ mH}$ a vypočítaná indukčnost je zcela mimo tyto řády ačkoli by měla vycházet v podobných řádech, protože na tokamaku GOLEM je navinuté srovnatelné množství závitů (48 závitů). Je možné, že výše uvedený vzorec (4.4) nelze použít pro výpočet vlastní indukčnosti nebo je zapotřebí daný výpočet příslušně modifikovat.

4.2 Odhad parametrů pro jeden zesilovač KEPCO

Pro experimenty na tokamaku GOLEM bylo využito pouze jednoho zesilovače KEPCO s charakteristikami $20 \text{ V}/20 \text{ A}$. Z Ohmova zákona ideální odpor R_{poz} vodiče:

$$R_{\text{poz}} = \frac{U}{I} = \frac{20}{20} = 1 \Omega. \quad (4.8)$$

Pro ideální odpor (4.8) vychází obdobně jako u předchozí kapitoly pro všechny možné průměry vysoký počet závitů, který se pohyboval v průměru okolo sto a více závitů (ukázkový kód [44]). Proto bylo zapotřebí zvážit, zda se KEPCO bude provozovat na maximální výkon a bude tak třeba snížit maximální použitelné napětí z důvodu použití zesilovače v proudovém režimu pro využití celého rozsahu proudu. Provoz zesilovače se počítá v tomto režimu, protože změna proudu způsobí změnu výsledného proudu v komoře.

Pro první otestování provozu zesilovače na tokamaku GOLEM bylo využito dostupného vodiče o průměru 10 mm^2 obdobného jako je na polohovou stabilizaci. Na provoz alespoň 1 V a 20 A vychází délka vodiče přibližně $l = 30 \text{ m}$ a když odečteme vedení přibližně $l_V = 2 \text{ m}$ tak ze zbyvajících délky vodiče lze navinout přibližně 20

závitů. Výpočet je obdobný jako v předchozí podkapitole. Tato konfigurace byla volena z důvodu rozumného počtu závitů pro první testy. Na část transformátorového jádra tokamaku GOLEM bylo namotáno 16 testovacích závitů z důvodu místa na této části transformátorového jádra. Pro takovou volbu parametrů vychází odpor vodiče:

$$R_2 = 0.05 \Omega, \tag{4.9}$$

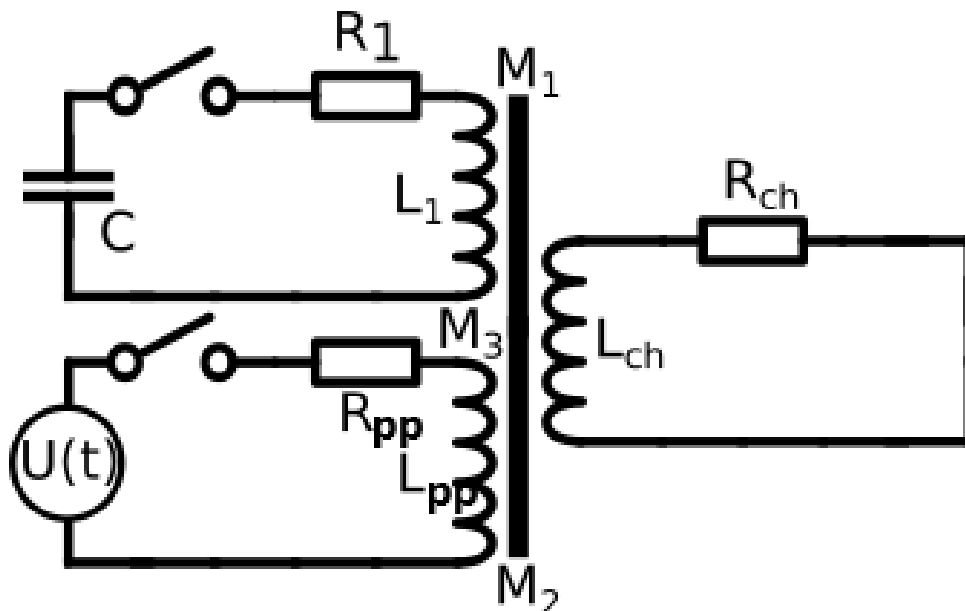
který také odpovídá přibližně celkovému odporu naší větve se přídavným primárem, když zanedbáme odpor zdroje v podobě proudového zesilovače. V další kapitole bude popsána aplikace takto zvoleného vodiče na transformátorové jádro tokamaku GOLEM a uvedení do provozu v podobě přídavného primárního vinutí napájeného jedním zesilovačem KEPCO.

Kapitola 5

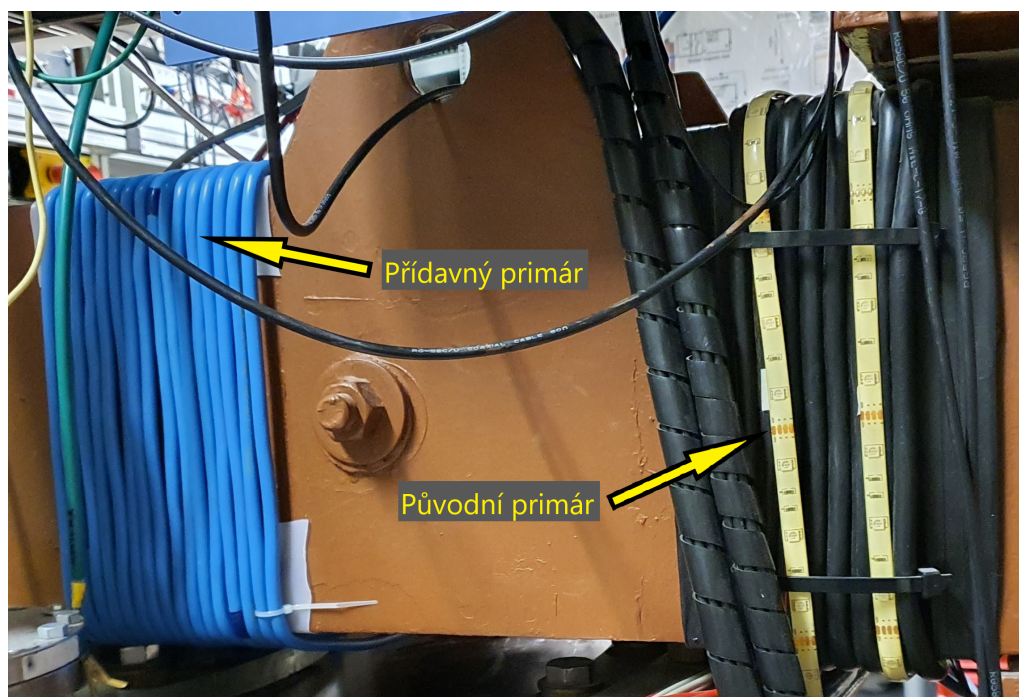
Aplikace zesilovače KEPCO do provozu tokamak GOLEM

5.1 Implementace přidavného primárního vinutí na tokamak GOLEM

Z předchozí kapitoly byl napočítán počet závitů na první testovací provoz s využitím dostupného vodiče o průměru 10 mm^2 . Na tokamakové jádro se z vybraného vodiče vešlo navinout 16 závitů, což se alespoň blíží predikovaným 20 závitům kalibrovaným na napětí maximálně 1 Volt a maximální rozsah proudu 20 Ampér. Elektrické schéma je na obrázku 5.1. Na obrázku 5.1 je v přidavném primárním vinutí o indukčnosti L_{pp} a celkovém odporu R_{pp} , kde je důležité říci, že R_{pp} je to samé jako R_2 v předchozí kapitole. Tato změna značení je z důvodu přehlednosti v další části práce. Zdroj napětí $U(t)$ reprezentuje zesilovač KEPCO.



Obrázek 5.1: Elektrické schéma přidání přidavného vinutí na tokamak GOLEM.



Obrázek 5.3: Foto navinutého přídavného primárního vinutí na tokamak GOLEM.

napětí obou signálů a počtu závitů dostáváme z (3.61) rovnost:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{16}{1} \stackrel{?}{=} \frac{6}{0.3} = \frac{U_{pp}}{U_{ch}} \quad (5.1)$$

$$16 \cong 20,$$

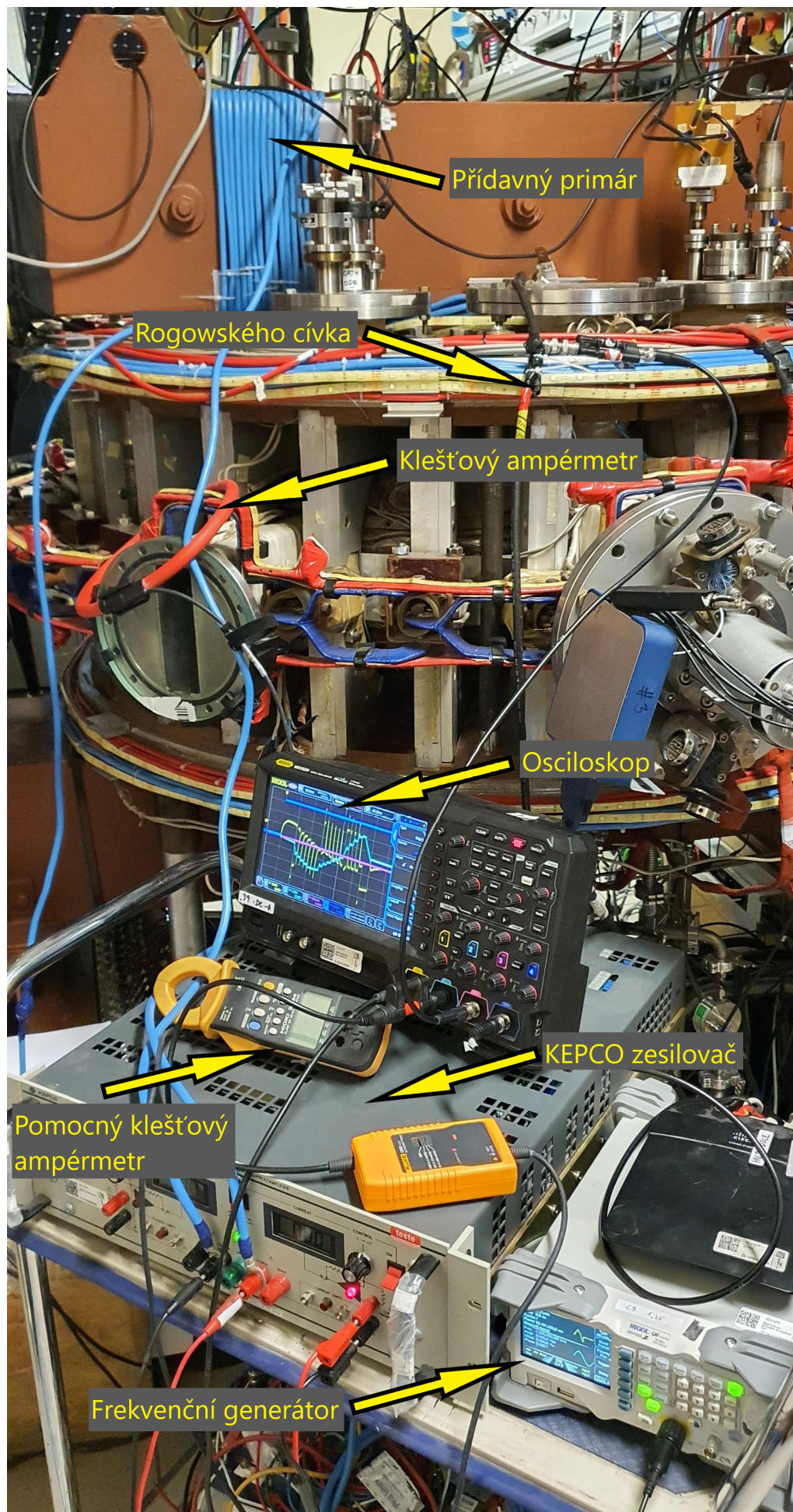
kde $N_{1,2}$ je počet závitů na přídavném primáru, resp. na komoře jako jeden závit nakrátko, U_{ch} je napětí na komoře a U_{pp} je napětí na přídavném primáru.

Rovnost (5.1) lze považovat za alespoň řádově odpovídající a lze považovat za splnění transformátorových rovnic. Co se velikostí proudu v komoře týče, problém může být ve nepřesné hodnotě kalibrační konstanty Rogowského pásky. Pro první přiblížení jsme se spokojili s přibližnou hodnotou kalibrační konstanty pro ověření transformátorových rovnic alespoň řádově.

Dále z grafů pro napětí lze vidět, jak KEPCO zesílilo napětí do přídavného primárního vinutí. Jak již bylo řečeno, KEPCO bylo nastaveno do napěťového režimu a kdyby se porovnal opět amplitudy, lze dostat koeficient zesílení, který můžeme označit jako K . Pro koeficient zesílení vychází přibližně:

$$K = \frac{U_{pp}(\max)}{U_{kepcO}(\max)} = \frac{6}{0.3} = 20, \quad (5.2)$$

kde $U_{pp}(\max)$ je maximální hodnota napětí na přídavném primáru a $U_{kepcO}(\max)$ je maximální hodnota napětí na zesilovači KEPCO. Z výpočtu (5.2) vychází také zesílení napětí z frekvenčního generátoru 20 krát. Toto zesílení je závislé na volbě odporu přídavného vinutí. V předchozí kapitole na tokamak GOLEM bylo použito



Obrázek 5.4: Foto implementované laboratorní sestavy na tokamak GOLEM.

vodiče, jehož odpor by měl být roven $R = 0.05$ a pro ověření správnosti byl proveden jednoduchý experiment manuálního ovládání zesilovače, kdy bylo nastaveno napětí a proud se z Ohmova zákona dopočítal a zobrazil na displeji zesilovače. Z těchto dat se dal zjistit odpor tohoto vinutí. Z experimentu byla naměřena data:

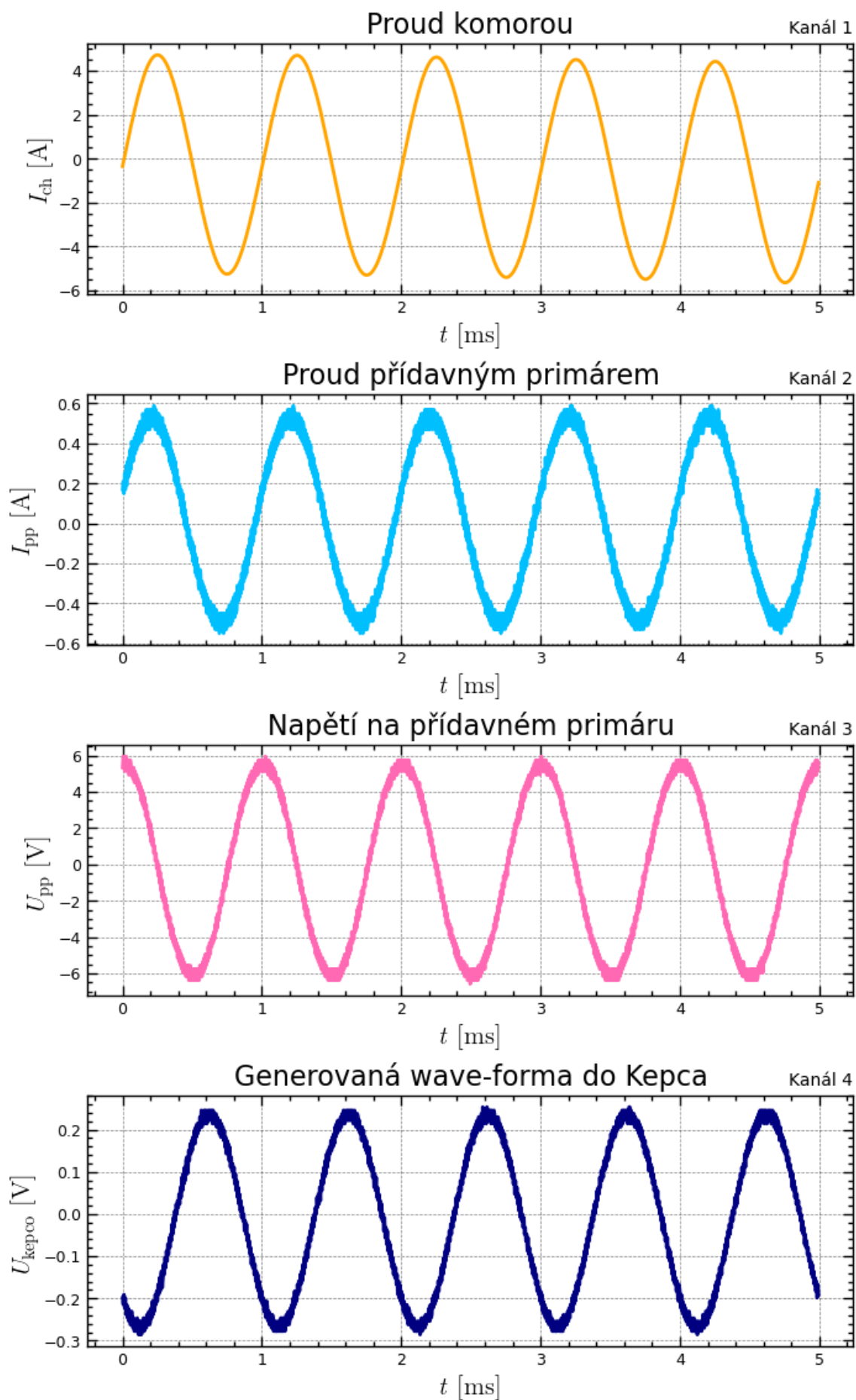
$$\begin{aligned} U_1 = 0.5 \text{ V} &\rightarrow I_1 = 9.2 \text{ A} \Rightarrow R_1 \cong 0.05 \Omega \\ U_2 = 1 \text{ V} &\rightarrow I_2 = 18.2 \text{ A} \Rightarrow R_2 \cong 0.05 \Omega \\ U_3 = 0.1 \text{ V} &\rightarrow I_3 = 1.8 \text{ A} \Rightarrow R_3 \cong 0.05 \Omega \end{aligned} \quad (5.3)$$

Z (5.3) vychází odpor stejně jako byla teoretická předpověď z (4.9).

Po otestování provozu a potřebném nastavení experimentu (zejména ovládání nabíjení kondenzátoru tokamaku GOLEM) došlo ke zkoušení různých vygenerovaných wave-forem z frekvenčního generátoru a pokus o stabilizování proudu komorou, který má simulovat proud plazmatem. Rozdíl mezi proudem komorou od proudu plazmatem je ten, že proud komorou má neměnný odpor. Pro první bezpečný test bylo nastaveno napětí na kondenzátoru $U_C(0)$ na 20 V. Strategie stabilizování proudu komorou byla realizována způsobem vymezení prostoru pro stabilizaci a rozdělení této oblasti na jednotlivé segmenty, ve kterých se bude nastavovat hodnota proudu ze zesilovače. Nalezení vhodné konfigurace pro frekvenční generátor a vzniklý pokus o dosažení flat-top proudu komorou je na obrázku 5.6. Na 5.6 je v grafu kanál5 a MATH vidět již zmiňované vymezení prostoru pro stabilizaci.

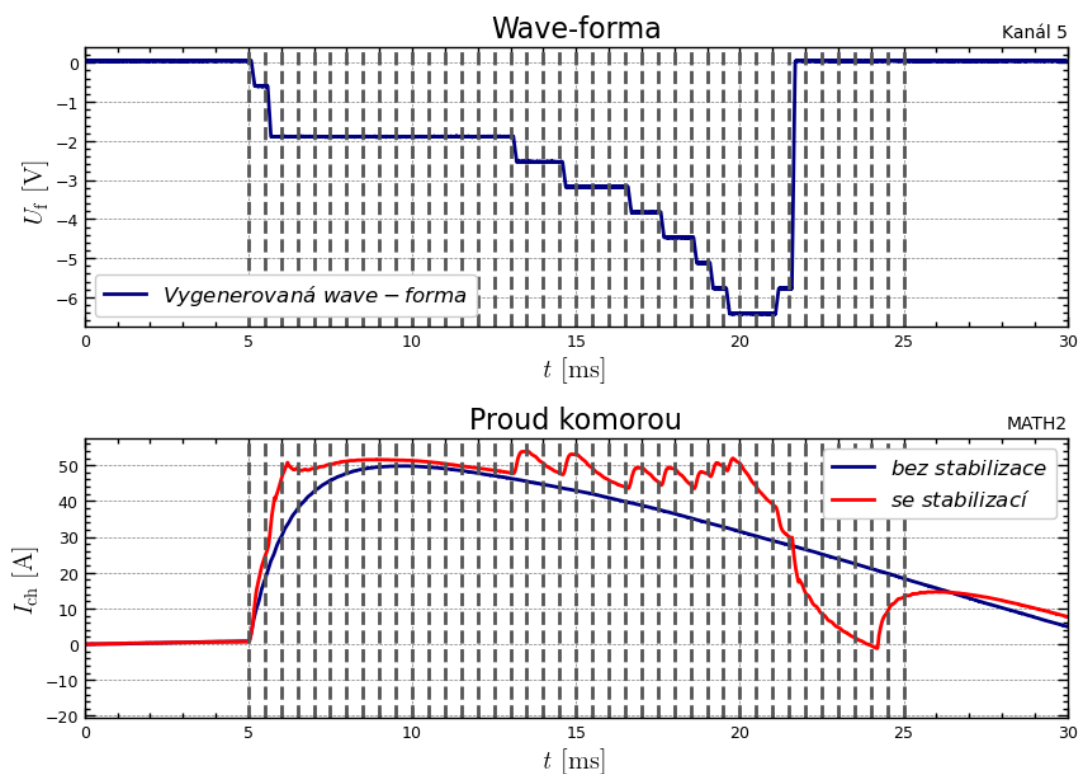
Z obrázku 5.6 je vidět rozdíl mezi režimem se stabilizací a bez stabilizace. Z posledního grafu reprezentujícího proud komorou lze vidět, že vhodně zvolená wave-forma do zesilovače KEPCO způsobila stabilizování proudu komorou na předem zvolené hodnotě, která byla přibližně 50 A. Tato wave-forma byla volena postupným testováním jednotlivých segmentů oblasti stabilizace, kde cílem bylo pokusit se proud udržovat na dané hodnotě proudu. Lze si však také povšimnout nemalých oscilací od přibližně 13 ms, které se okolo zvolené hodnoty proudu pohybují. Tyto oscilace jsou nejspíš způsobeny ostrými přechody mezi změnami proudu v zesilovači, tj. schodovitým charakterem předdefinované stabilizační křivky pro frekvenční generátor. Toto by se dalo eliminovat zjemněním stabilizační křivky. Z grafu 5.6 (kanál 5) si lze povšimnout, že prudká změna napětí a poté proudu jako výstupu ze zesilovače KEPCO způsobila nárůst proudu v komoře a kompenzuje tak napájení z kondenzátoru. Na frekvenčním generátoru bylo využito 60% rozsahu jedné polarity, protože na frekvenčním generátoru lze nastavit pouze hodnoty od -10 V do 10 V .

Podařilo se provést ještě test konfigurace s napětím 60 V, které lze vidět na obrázku 5.7. Bylo využito podobného průběhu jako u 5.6 s navýšením hodnot z frekvenčního generátoru a nyní bylo využito 100% rozsahu dané polarity frekvenčního generátoru. Byla zde snaha stabilizovat hodnotu proudu na hodnotě 150 A, což se však ne zcela podařilo, protože rozsah napětí z frekvenčního generátoru nebyl dostatečný na generování dostatečné změny v primárním vinutí a tudíž ani k navýšení proudu v komoře I_{ch} . Lze si ale povšimnout, že proud v komoře je značně stabilnější a oscilace jsou nyní minimální. To znamená, že rozdělení oblasti stabilizace je dostatečně jemné a schodovitý charakter stabilizační křivky již není problémem. Také zde podobně jako u table-top experimentu z obrázku 3.26 bylo na konci stabilizace využito změny proudu opačné polarity z důvodu ukončení výboje obdobným způsobem jako 3.26.

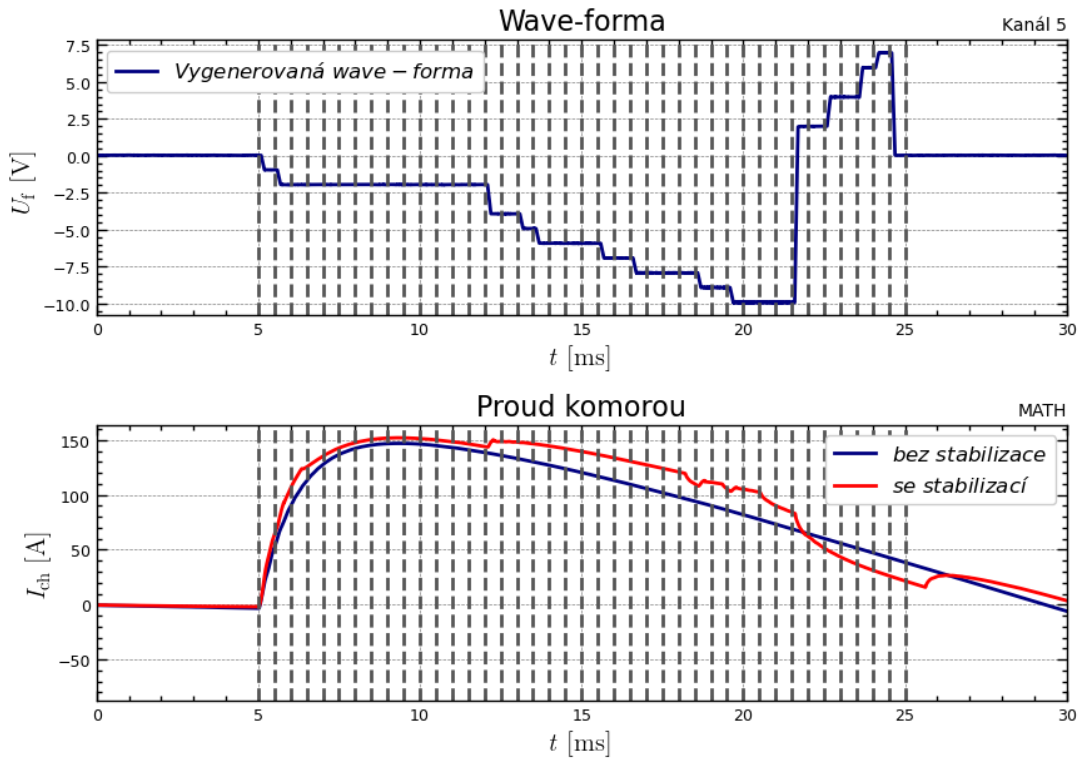


Obrázek 5.5: Ukázka naměřených dat proudů a napětí v přídatném primárním vinutí a v komoře.

Z časových důvodů však nebylo možné provést více testů pro různá napětí na kondenzátoru a pro zjištění maximálních hodnot napětí, které je ještě možné pomocí jednoho zesilovače KEPCO stabilizovat, případně zvážit navýšení počtu závitů a následně pozorovat změny chování této sestavy. Z pozorování z 5.7 lze vidět, že nastaveným napětím $U_C(0)$ na 60 V bylo pro stabilizování zesilovačem KEPCO již obtížné. Tento fakt ale nelze brát jako konečný, protože nebyla otestována jiná sestava s odlišným počtem závitů a také je možné, že rozsah napětí z frekvenčního generátoru lze rozšířit obdobným způsobem, jako v případě tokamaku COMPASS, který lze vidět na obrázku 2.8, kde však bylo zapotřebí implementace tyristorového měniče. Toto opět z časových důvodů nebylo možné blíže prozkoumat, ale je možné, že jedno KEPCO je schopno stabilizovat i vyšší nabíjecí napětí.

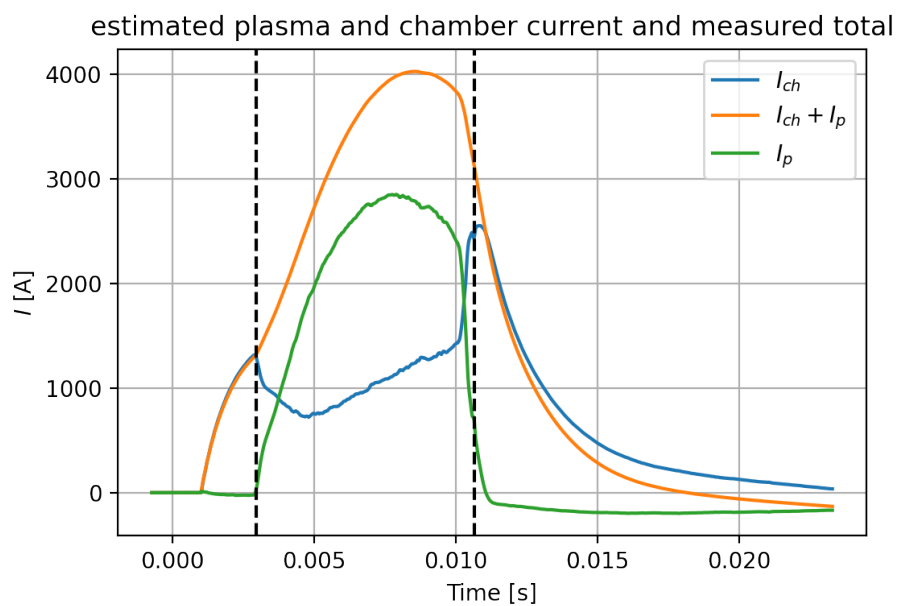


Obrázek 5.6: Porovnání dat z provozu implementovaného řešení na tokamak GOLEM se a bez stabilizace. Napětí na kondenzátoru bylo nastaveno na 20 V.



Obrázek 5.7: Porovnání dat z provozu implementovaného řešení na tokamak GOLEM se a bez stabilizace. Napětí na kondenzátoru bylo nastaveno na 60 V.

Na obrázku 5.8 je vykreslen vývoj proudu komorou I_{ch} a proudu plazmatem I_p pro výboj číslo 42437 pro nabíjecí napětí o velikosti $U_C(0) = 500$ V pro které již generovat spolehlivě proud plazmatem na tokamaku GOLEM. Z grafu 5.8 je vidět, že výsledný proud plazmatem I_p se pohybuje od 2 kA do 3 kA. Z prvních testů s jedním zesilovačem bylo ukázáno, že je schopno ovlivnit proud komorou (jako simulovaným plazmatem) okolo 150 kA pro nabíjecí napětí $U_C(0) = 60$ V. Kdyby bylo možné provést a otestovat optimalizace z předchozího odstavce jako optimalizace odporu pro jedno KEPCO vhodnější volbou vodiče, vhodný počet závitů a také možnost rozšíření rozsahu proudu z proudového zesilovače jako na tokamaku COMPASS, tak je možné, že by jedno KEPCO mohlo spolehlivě ovlivnit proud pro nabíjecí napětí $U_C(0) = 100$ V což by odpovídalo jedné pětině nabíjecího napětí $U_C(0)$ pro výboj 42437. Kdyby se podařilo tento fakt prokázat experimenty, tak by neměl být problém ovlivnit proud plazmatem generovaný pro nabíjecí napětí $U_C(0) = 500$ V, protože rozsah proudu pro KEPCA se dá rozšířit až 5 krát zapojením 5 zesilovačů KEPCO paralelně.



Obrázek 5.8: Ukázka naměřeného proudu protékajícího komorou I_{ch} a proudu plazmatem I_p v závislosti na čase na tokamaku GOLEM z výboje číslo 42437 pro nabíjecí napětí $U_C(0) = 500$ V. Převzato a upraveno z [28].

Kapitola 6

Závěr

V rámci této bakalářské práce proběhlo bližší seznámení se s uvolňováním jaderné energie prostřednictvím jaderné fúze. Dále také proběhlo přiblížení problematiky realizace jaderné fúze v pozemských podmínkách a zaměření na zatím nejnadhlednější realizaci v podobě tokamaků využívajících magnetické udržení vysokotepelného plazmatu. Následně se zkoumaly základní technologie potřebné pro realizaci takového reaktoru a také současný stav v oblasti termojaderné fúze, která je možná jediným způsobem jak využít jadernou fúzi z energetického hlediska.

Dále proběhlo bližší seznámení se s nejdéle fungujícím tokamakem na světě jménem GOLEM, s jeho technologiemi a stěžejními komponenty. Byl zde popsán současný stav generování elektrického pole potřebného pro generování proudu plazmatem a také rozdíly mezi jinými většími tokamaky a klady a zápory použité technologie na tokamaku GOLEM. Dále zde proběhla diskuze nad možnou formou stabilizace na tokamaku GOLEM v podobě implementace přídatného primárního vinutí na tokamakové transformátorové jádro napájené pomocí proudových zesilovačů značky KEPCO.

Před samotnou implementací se podařilo sestavit laboratorní model simulující generování elektrického pole na tokamacích, kde proběhlo jednak bližší seznámení se s různými elektrickými součástkami, ale také s dálkovým ovládním různých laboratorních zařízení a zdrojů, které měly ještě blíže přiblížit provoz na tokamaku GOLEM. Podařilo se také sestavit na každou fázi konstrukce tohoto laboratorního modelu příslušný numerický model simulující dané jevy v použitých obvodech. Ve finální fázi konstrukce laboratorní verze experimentu se podařilo velmi dobře simulovat provoz na tokamaku GOLEM, který byl plně dálkově automatizovaný a použité komponenty dobře simulovaly chování napětí a proudu stejně jako v běžném provozu tokamaku GOLEM. Pomocí vhodně naprogramované wave-formy z frekvenčního generátoru poslané do zesilovače KEPCO, které mělo roli zdroje, se podařilo stabilizovat proud v simulovaném plazmatu v podobě měděného prstence a tak došlo k ověření, že stabilizace pomocí implementace proudového zesilovače v přídatném primárním vinutí je možná.

Po úspěšném prokázání funkčnosti sestavy byly provedeny potřebné výpočty pro adaptaci na tokamak GOLEM jako zjištění vhodné délky vodiče, průřezu vodiče a vhodné volby závitů. Následně proběhla implementace na samotný tokamak GOLEM a byla provedena řada testovacích režimů pomocí frekvenčního generátoru pro

bližší seznámení se s konkrétní volbou konstrukce přídavného vinutí a jeho vztahu ke generování proudu komorou, která měla taktéž simulovat plazma. Úspěšně se podařilo sestavit a také zprovoznit laboratorní sestavu, která odpovídala zapojení jako v laboratorní verzi. Sérií výbojů a postupným programováním stabilizační křivky pro KEPCO zesilovač se podařilo "stabilizovat" proud komorou na tokamaku GOLEM pro nabíjecí napětí o velikosti $U_C(0) = 20 \text{ V}$, což odpovídalo hodnotě proudu v komoře I_{ch} okolo 50 A. Poté proběhlo ještě otestování sestavy na hodnotě nabíjecího napětí $U_C(0) = 60 \text{ V}$, což odpovídalo hodnotě proudu v komoře I_{ch} okolo 150 A. Stabilizace na této hodnotě proudu proběhla pouze jako ukázka ovlivnění proudu v komoře proudovým zesilovačem.

Z časových důvodů se nepodařilo provést testy pro různé konfigurace a pro další hodnoty napětí na kondenzátoru a nalezení tak maxima, které by bylo je schopno při dané implementaci přídavného vinutí jeden zesilovač KEPCO stabilizovat a také více vyladit porovnání s numerickými modely, protože bylo velmi obtížné změřit zejména vzájemné indukčnosti mezi jednotlivými obvody, protože dané hodnoty v žádné fázi konstrukce neodpovídaly hodnotám ze vzorce, který je definuje. Pokud by se však podařilo optimalizovat přídavné vinutí vhodnou volbou vodiče a vhodnější volbou závitů pro jeden zesilovač KEPCO, je možné, že nabíjecí napětí $U_C(0)$, pro které by bylo možné proud komorou, resp. plazmatem ovlivnit, by tak mohlo vzrůst až na hodnotu nabíjecího napětí $U_C(0) = 100 \text{ V}$, což by stačilo pro stabilizování výboje pro nabíjecí napětí až $U_C(0) = 500 \text{ V}$, jelikož je možné rozsah proudu soustavy zesilovačů KEPCO rozšířit až 5 krát zapojením pěti zesilovačů paralelně.

Cíle se však i přes tyto nedostatky podařilo naplnit a provést tak úspěšnou implementaci výsledků z laboratorní verze do reálného provozu tokamaku GOLEM. V budoucnu by bylo však zapotřebí otestovat provoz pro ideálnější volbu vodiče společně s dalšími dílčími faktory kalibrovanými pro jeden zesilovač KEPCO a později i soustavu zesilovačů KEPCO a přesně zjistit jaké nabíjecí napětí na kondenzátoru $U_C(0)$ je schopen jeden zesilovač KEPCO ještě spolehlivě ovlivnit. Také se pokusit otestovat možnost rozšířit rozsah změny proudu z proudového zesilovače obdobně jako například na tokamaku COMPASS. Tyto výsledky by mohly být tak dobrým stavebním kamenem pro další bližší zkoumání této technologie a uvedení do provozu i s tokamakovým plazmatem a stabilizovat jej. Na základě výsledků a zkušeností z této bakalářské práce se lze tak přiblížit k reálnému provozu moderních velkých tokamaků.

Bibliografie

1. WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *Melting points of the elements (data page)* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2023. Dostupné také z: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Melting_points_of_the_elements_\(data_page\)&oldid=1143869256](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Melting_points_of_the_elements_(data_page)&oldid=1143869256). [Online; accessed 20-July-2023].
2. IAEA. *FUSION DEVICE INFORMATION SYSTEM*. Dostupné také z: <https://nucleus.iaea.org/sites/fusionportal/Pages/FusDIS.aspx>. Dostupné online: 31. 7. 2023.
3. BLOOMBERG. *Biggest Fusion Energy Reactor Faces More Delays, Higher Costs*. Dostupné také z: https://www.bloomberg.com/news/articles/2023-06-22/biggest-fusion-energy-reactor-faces-more-delays-higher-costs?in_source=embedded-checkout-banner&fbclid=IwAR0WzXNCn_S4u-ZHp11Wh_LWSFpHin3XEGD6cyv1VuLFwvAaG_09PlM5_1A#xj4y7vzkg. Dostupné online: 31. 7. 2023.
4. CHEN, F.F. *Úvod do fyziky plazmatu*. Praha 1984.
5. LIMPOUCH, Jiří. *Základy fyziky plazmatu - Úvod*. Dostupné také z: <http://www-troja.fjfi.cvut.cz/~limpouch/plazma/Uvod.pdf>. Dostupné online: 31. 5. 2023.
6. LIMPOUCH, Jiří. *Základy fyziky plazmatu - Úvod*. Dostupné také z: http://kfe.fjfi.cvut.cz/~limpouch/plazma/01_uvod.pdf. Dostupné online: 31. 5. 2023.
7. WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *Nuclear fusion* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2023. Dostupné také z: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Nuclear_fusion&oldid=1166099766. [Online; accessed 20-July-2023].
8. STAFF, Astronomy. *Ask Astro: How do stars make elements heavier than iron?* Dostupné také z: <https://www.astronomy.com/science/ask-astro-how-do-stars-make-elements-heavier-than-iron/>. Dostupné online: 20. 7. 2023.
9. ALDEBARAN. *Co je to plazma?* Dostupné také z: <https://www.aldebaran.cz/astrofyzika/plazma/basics.php>. Dostupné online: 8. 12. 2022.
10. WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *Electric potential energy* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2023. Dostupné také z: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Electric_potential_energy&oldid=1139414194. [Online; accessed 20-July-2023].

11. WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *Atomic nucleus* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2023. Dostupné také z: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Atomic_nucleus&oldid=1161628002. [Online; accessed 20-July-2023].
12. ENTLER, Slavomír; HORÁČEK, Jan; FICKER, Ondřej; KOVAŘÍK, Karel; MLYNÁŘ, Jan. *Lawsonovo Kritérium*. Dostupné také z: <https://www.academia.cz/uploads/media/preview/0001/09/282fa654f44d740baf6a97f4bd732bb283a5b931.pdf>. Dostupné online: 20. 7. 2023.
13. WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *Lawson criterion* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2023. Dostupné také z: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lawson_criterion&oldid=1139983858. [Online; accessed 20-July-2023].
14. ENTLER, Slavomír. *Základy fúzní energetiky II. – Základní fyzika fúzních reaktorů*. Dostupné také z: <https://energetika.tzb-info.cz/elektroenergetika/14538-zaklady-fuzni-energetiky-ii-zakladni-fyzika-fuznich-reaktoru>. Dostupné online: 8. 12. 2022.
15. FREIDBERG, Jeffrey P. *Plasma Physics and Fusion Energy*. Cambridge University Press, 2007. Dostupné také z: https://books.google.cz/books?hl=cs&lr=&id=VZ3BDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR9&dq=MHD+instability+on+tokamaks&ots=BgxBnJ0Rj2&sig=sWz70t8Zwf6472doa4iAvock4sk&redir_esc=y.
16. ENERGY, Fusion for. Dostupné také z: <https://fusionforenergy.europa.eu/the-device/>. Dostupné online: 8. 12. 2022.
17. MLYNÁŘ, Jan. *Stručná historie tokamaků*. ALDEBARAN BULLETIN. Dostupné také z: https://www.aldebaran.cz/bulletin/2021_36_tok.php. Dostupné online: 31. 5. 2023.
18. WIKIPEDIE. *Tokamak TM-1 MH* — *Wikipedie: Otevřená encyklopedie*. 2023. Dostupné také z: https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Tokamak_TM-1_MH&oldid=22702526. [Online; navštíveno 20. 07. 2023].
19. SVOBODA, Vojtěch. *Tokamak GOLEM wiku - front page*. Dostupné také z: <http://golem.fjfi.cvut.cz/wiki/>. Dostupné online: 31. 5. 2023.
20. SVOBODA, Vojtěch. *Tokamak GOLEM for (worldwide) fusion education*. Dostupné také z: <http://golem.fjfi.cvut.cz/wiki/Education/offer/index>. Dostupné online: 19. 7. 2023.
21. ŠTOLL, Ivan. *Elektřina a Magnetismus*. Vydavatelství ČVUT, 1994. ISBN 80-01-02693-0.
22. VALOVIČ, IM. *AN OHMIC HEATING CIRCUIT FOR THE CASTOR TOKAMAK*. 1989. Dostupné také z: http://golem.fjfi.cvut.cz/wiki/Infrastructure/CurrentDriveFieldCircuit/Library/Valovic_OhmicHeatingCircuit.pdf.
23. ENTLER, S.; PÁNEK, R.; HRON, M.; WEINZETTL, V.; HAVRÁNEK, A. *tokamak COMPASS*. 2020. Dostupné také z: <https://www.ipp.cas.cz/miranda2/export/sitesavcr/ufp/ufp-v-mediich/Publications/Tokamak-COMPASS.pdf>.

24. HAVLÍČEK, Josef. Study of Equilibrium Magnetic Configuration in Tokamak Type Devices. 2015. Dostupné také z: <https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/81355>.
25. HUDEC, Lubomír. *Lubo H. PRPL 2018 Table top Model cont.* Dostupné také z: https://www.researchgate.net/figure/The-tokamak-magnetic-configuration-and-the-toroidal-coordinate-system-r-th-ph_fig6_338645742. Dostupné online: 8. 12. 2022.
26. SVOBODA, Vojtěch. Dostupné také z: <http://golem.fjfi.cvut.cz/wiki/Tokamak/Overview/InfraRoom/Photo/small.jpg>. Dostupné online: 1. 6. 2023.
27. SVOBODA, Vojtěch. *Tokamak technology setup.* Dostupné také z: <http://golem.fjfi.cvut.cz/wiki/Tokamak/ExperimentalSetup/GlobalSetup/Wdiagn/fig/figure.svg>. Dostupné online: 8. 12. 2022.
28. SVOBODA, Vojtěch. *Tokamak GOLEM - Shot Database - 42437.* Dostupné také z: <http://golem.fjfi.cvut.cz/shots/42437/Diagnostics/BasicDiagnostics/Basic/icon-fig.png>. Dostupné online: 18. 6. 2023.
29. TESTE. *BOP Series 4 Quadrant Bipolar Power Supplies.* Dostupné také z: <https://teste.cz/bop-series-4-quadrant-bipolar-power-supplies-c870?sort=index>.
30. TESTE. *KEPCO.* Dostupné také z: <https://teste.cz/kepco>.
31. HUDEC, Lubomír. *Lubo H. PRPL 2018 Numerical model. 2017-2018, s. 1.* Dostupné také z: http://golem.fjfi.cvut.cz/wiki/TrainingCourses/FTTF/2017-2018/LubHud/numericky_model/index.pdf.
32. CONTRIBUTORS, Wikipedia. *Vzájemná indukčnost.* Dostupné také z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Vz%C3%A1jemn%C3%A1_induk%C4%8Dnost. Dostupné online: 1. 6. 2023.
33. WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *RLC circuit — Wikipedia, The Free Encyclopedia.* 2023. Dostupné také z: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=RLC_circuit&oldid=1161130638. [Online; accessed 22-July-2023].
34. BURYANEC, Jan. Dostupné také z: https://golem.fjfi.cvut.cz/wikiraw/Staff/UndergradStudents/JanBuryanec/BP/NumModel/Prvni_faze_table_top.html. Dostupné online: 1. 8. 2023.
35. WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *Electronic symbol — Wikipedia, The Free Encyclopedia.* 2023. Dostupné také z: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Electronic_symbol&oldid=1143536963. [Online; accessed 1-August-2023].
36. CONTRIBUTORS, Wikipedia. *Cramerovo pravidlo.* Dostupné také z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Cramerovo_pravidlo. Dostupné online: 5. 6. 2023.
37. BURYANEC, Jan. Dostupné také z: https://golem.fjfi.cvut.cz/wikiraw/Staff/UndergradStudents/JanBuryanec/BP/NumModel/Druha_faze_table_top.html. Dostupné online: 1. 8. 2023.
38. SVOBODA, Vojtěch. *Tokamak GOLEM - Shot Database - 42440.* Dostupné také z: <http://golem.fjfi.cvut.cz/shots/42440>. Dostupné online: 1. 7. 2023.

39. BAGHERI, M.; NEZHIVENKO, S.; PHUNG², B. T.; BLACKBURN, T. *Air Core Transformer Winding Disk Deformation: A Precise Study on Mutual Inductance Variation and Its Influence on Frequency Response Spectrum*. 2017. Dostupné také z: <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=8123920>.
40. BURYANEC, Jan. Dostupné také z: https://golem.fjfi.cvut.cz/wikiraw/Staff/UndergradStudents/JanBuryanec/BP/NumModel/Treti_faze_table_top.html. Dostupné online: 1. 8. 2023.
41. CONTRIBUTORS, Wikipedia. *Cramerovo pravidlo*. Dostupné také z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Transform%C3%A1tor>. Dostupné online: 5. 6. 2023.
42. WIKIPEDIE. *Vodič* — *Wikipedie: Otevřená encyklopedie*. 2014. Dostupné také z: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Vodi%C4%8D&oldid=11765943>. [Online; navštíveno 31. 07. 2023].
43. *ELEKTROTECHNICKÉ MATERIÁLY 1*. Dostupné také z: https://publi.cz/books/353/08.html?fbclid=IwAR0r3qUlucw_V9tmIp0z1uaXHXycVWcikMc2uXIDfRtG1F03Q0
44. BURYANEC, Jan. Dostupné také z: https://golem.fjfi.cvut.cz/wikiraw/Staff/UndergradStudents/JanBuryanec/BP/NumModel/KEPCA_odhad_parametru.html. Dostupné online: 1. 8. 2023.
45. SANTIAGO, John. *Analyze an RLC Circuit Using Laplace Methods*. Dostupné také z: <https://www.dummies.com/article/technology/electronics/circuitry/analyze-an-rlc-circuit-using-laplace-methods-166278/>. Dostupné online: 1. 6. 2023.

Přílohy

A Odvození analytického řešení RLC

Pouze v této fázi konstrukce table-top experimentu lze nalézt analytické řešení, protože v každé další fázi konstrukce bude nalezení analytického řešení komplikovanější a je možné, že ani neexistuje. Na obrázku 3.4 jsou dané součástky zapojeny sériově. Pro sériově zapojení platí, že celkové napětí $U_{celk.}$ je rovno součtu napětí na všech součástkách, tedy platí vztah:

$$U_{celk.} = U_R + U_L + U_C, \quad (1)$$

kde U_R je napětí na rezistoru, U_L napětí na cívce a U_C je napětí na kondenzátoru. V našem případě bude součet napětí roven nule, protože náš obvod je bez přídavných zdrojů a bude platit rovnost:

$$U_R + U_L + U_C = 0. \quad (2)$$

Nyní je třeba stanovit čemu jsou rovny jednotlivá napětí na daných součástkách a na jakých jsou závislých parametrech, lze se dočíst v [21]. Všechny zmíněná napětí jsou funkcemi času a jsou rovny:

$$\begin{aligned} U_R(t) &= R \cdot I(t) \\ U_L(t) &= L \cdot \frac{dI(t)}{dt} \\ U_C(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau + U_C(0), \end{aligned} \quad (3)$$

kde R je odpor, L je indukčnost, C je kapacita, $U_C(0)$ je hodnota napětí nabitého kondenzátoru a $I(t)$ je hledaná funkce proudu závislá na čase.

Vztahy pro jednotlivá napětí (3) je třeba dosadit do rovnice (2) a lze dostat rovnici:

$$R \cdot I(t) + L \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau + U_C(0) = 0. \quad (4)$$

V rovnici (4) se jedná o diferenciální rovnici prvního řádu s počáteční podmínkou $I_0 = I(t) = 0$. Takovou rovnici lze řešit například pomocí Laplaceovy transformace [45]. Použití Laplaceovy transformace je výhodné, protože jednak převádí derivaci na násobení polynomem a jednak také, že po aplikaci na diferenciální rovnici zakomponuje i počáteční podmínky a navíc je vhodná pro řešení elektrických obvodů díky definičnímu oboru laplaceovy transformace, který je na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ což odpovídá v obvodech času t který také plyne na stejném intervalu. Na rovnost (4) aplikujeme Laplaceovu transformaci:

$$R \cdot I(s) + L(sI(s) - I_0) + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} + \frac{U_C(0)}{s} = 0, \quad (5)$$

kde $I(s)$ je laplaceův obraz $I(t)$, tj. $I(s) = \mathcal{L}[I(t)](s)$. Po přenásobení (5) proměnnou S , zakomponováním počáteční podmínky a vyjádření funkce $I(s)$ reprezentující Laplaceův obraz $I(s)$ funkce lze dostat:

$$I(s) = \frac{sI_0 - U_C(0)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} \wedge I_0 = 0 \Rightarrow I(s) = \frac{-U_C(0)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}. \quad (6)$$

Po Výtknutí indukčnosti L ze jmenovatele ze vztahu (6) a lehké úpravě výrazu převedeme rovnost na následující výraz:

$$I(s) = \frac{-U_C(0)C \frac{1}{LC}}{s^2 + 2 \cdot \frac{R}{2L}s + \frac{1}{LC}}. \quad (7)$$

Do (7) lze zavést známé fyzikální veličiny reprezentující chování v obvodu jako:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{R}{2L} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

kde δ je dekrement útlumu, ω_0 je vlastní frekvence (Thompsonův vztah) a ω úhlová frekvence. Dosazením (8) do (7) lze dostat vztah:

$$I(s) = -U_C(0)C \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\delta s + \omega_0^2}. \quad (9)$$

Nyní by bylo ideálně třeba najít nějakou vhodnou tabulkovou hodnotu vzoru pro laplaceův obraz, resp. aplikovat inverzní laplaceovu transformaci. Z materiálu [45] se nabízí vztah:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \beta t](s) = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad (10)$$

kde α a β jsou konstanty. Vztah (9) lze převést do požadovaného tvaru pro (10) pomocí série úprav jako úprava na čtverec, doplnění chytré jedničky do čitatele, které zajistí převedení výrazu (9) do požadovaného tvaru následovně:

$$\begin{aligned} I(s) &= -U_C(0)C \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\delta s + \omega_0^2} = I(s) = -U_C(0)C \frac{\omega_0^2}{\underbrace{s^2 + 2\delta s + \delta^2}_{(s+\delta)^2} \underbrace{-\delta^2 + \omega_0^2}_{\omega^2}} = \\ &= -U_C(0)C \frac{\omega_0^2}{(s + \delta)^2 + \omega^2} = -U_C(0)C \frac{\overbrace{\omega_0^2 - \delta^2}^{\omega^2} + \delta^2}{(s + \delta)^2 + \omega^2} = \\ &= -U_C(0)C \frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega} \cdot \frac{\omega}{(s + \delta)^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Nyní na rovnost (11) lze aplikovat inverzní laplaceovu transformaci a použít vztah (10) a tak dostaneme hledanou funkci $I(t)$:

$$I(s) = \mathcal{L}[I(t)](s) = -U_C(0)C \frac{\omega_0^2 + \delta^2}{\omega} \cdot \frac{\omega}{(s + \delta)^2 + \omega^2} \quad (12)$$

$$I(s) = \mathcal{L}[I(t)](s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} I(t) = -U_C(0)C \frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega} \cdot e^{-\delta t} \sin \omega t.$$

Aplikací inverzní laplaceovy transformace dostáváme z (12) vztah pro vývoj proudu $I(t)$ na čase t který je dán výsledným vztahem:

$$I(t) = -U_C(0)C \frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega} \cdot e^{-\delta t} \sin \omega t. \quad (13)$$

Pro napětí na kondenzátoru bude využito jako výchozí vztah:

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}, \quad (14)$$

kde $Q(t)$ je funkce náboje vybitého z kondenzátoru v čase. Abychom byli schopni určit funkci napětí na kondenzátoru $U_C(t)$ tak lze určit funkci $Q(t)$. Tu lze určit z definice proudu, která je dána vztahem:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}, \quad (15)$$

kde funkci $I(t)$ již známa z (13) a když rovnost (15) bude zintegrována, tak lze určit funkci náboje $Q(t)$ a následně i hledanou funkci napětí na kondenzátoru $U_C(t)$. Po integraci (15) dostáváme:

$$\underbrace{\int I(t) dt}_{\int -U_C(0)C \frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega} \cdot e^{-\delta t} \sin \omega t dt} = Q(t) + c, \quad (16)$$

kde c je integrační konstanta, kterou lze zjistit z počáteční podmínky pro náboj v čase nula, tj. $Q(0) = C \cdot U_C(0)$. Nejdříve je však nutné spočítat ze vztahu (16) integrál levé strany rovnice. Na první pohled se může zdát vyřešit takový integrál jako komplikovaná záležitost, ale s využitím komplexní integrace použitím **Eulerova vzorce** $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, kde i je imaginární jednotka, kdy výsledek naší integrace bude roven imaginární složce výsledku komplexní integrace. Takovou integraci lze provést následovně:

$$\begin{aligned} \int I(t) dt &= \int -U_C(0)C \frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega} \cdot e^{-\delta t} \sin \omega t dt = -U_C(0)C \frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega} \operatorname{Im} \left[\int e^{-\delta t} \cdot e^{i\omega t} dt \right] \\ &= -U_C(0)C \frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega} \operatorname{Im} \left[\int e^{(i\omega - \delta)t} dt \right] = \\ &= -U_C(0)C \frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega} \operatorname{Im} \left[\frac{e^{(i\omega - \delta)t}}{i\omega - \delta} \cdot \frac{i\omega + \delta}{i\omega + \delta} \right] = \\ &= -U_C(0)C \frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega} \operatorname{Im} \left[\frac{e^{-\delta t} \cdot (\cos \omega t + i \sin \omega t) \cdot (i\omega + \delta)}{(i\omega)^2 - \delta^2} \right] = \\ &= -U_C(0)C \frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega} \operatorname{Im} \left[\frac{e^{-\delta t} \cdot ((\delta \cos \omega t - \omega \sin \omega t) + i(\omega \cos \omega t + \delta \sin \omega t))}{(-1) \cdot (\omega^2 + \delta^2)} \right] = \\ &= U_C(0)C \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Nyní už jen zbývá výsledek vypočteného integrálu proudu (17) dosadit do (16) a pomocí počáteční podmínky $Q(0) = C \cdot U_C(0)$ nakalibrovat integrační konstantu c a tak spočítat funkci $Q(t)$. Po dosazení a započítání počáteční podmínky dostáváme hodnotu integrační konstanty:

$$U_C(0)C \cdot e^0 \cdot (1 + 0) = Q(0) + c \xrightarrow{Q(0)=C \cdot U_C(0)} c = 0. \quad (18)$$

Z nakalibrování integrační konstanty ze vztahu (18) lze napsat výslednou funkci $Q(t)$, která je dána vztahem:

$$Q(t) = U_C(0)C \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (19)$$

Dosazením (19) do vztahu (14) lze dostat hledanou funkci vývoje napětí $U_C(t)$ na kondenzátoru danou vztahem:

$$U_C(t) = U_C(0) \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (20)$$