ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

2019 Bořek Leitl

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Katedra fyziky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

# Tomografická rekonstrukce profilu vyzařování plazmatu na tokamaku GOLEM

# Tomographic reconstruction of plasma radiation profile at the tokamak GOLEM

| | |
|---|---|
| Posluchač: | Bc. Bořek Leitl |
| Vedoucí práce: | Ing. Vojtěch Svoboda, CSc. |
| Školitel: | Ing. Martin Imríšek |
| Akademický rok: | 2018/2019 |

Na toto místo přijde svázat **zadání diplomové práce**!
V jednom z výtisků musí být **originál** zadání, v ostatních kopie.

**Čestné prohlášení**

Prohlašuji na tomto místě, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 7. ledna 2019 .....

Bořek Leitl

**Poděkování**

Děkuji vedoucímu práce Ing. Vojtěchu Svobodovi, CSc. a Ing. Martinu Imríškovi za podnětné návrhy a trpělivost při konzultacích a vedení práce.

Bořek Leitl

*Název práce:* **Tomografická rekonstrukce profilu vyzařování plazmatu na tokamaku GOLEM**

*Autor:* Bořek Leitl

*Obor:* Fyzika a technika termojaderné fúze

*Druh práce:* Diplomová práce

*Vedoucí práce:* Ing. Vojtěch Svoboda, CSc., Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT

*Školitel:* Ing. Martin Imríšek, Ústav fyziky plazmatu, AVČR

*Abstrakt:* Tato práce je věnována zavádění nové diagnostiky - detekce záření pomocí AXUV detektorů do systému tokamaku GOLEM. Pro dva nové detektory AXUV20ELG byly vyrobeny transimpedanční zesilovače, detektory následně prostorově kalibrovány a osazeny na tokamak GOLEM na malém bočním a horním portu v jihovýchodní toroidální pozici. Signály byly zesíleny, digitalizovány sběrným systémem Papouch a uloženy do databáze. Výstup signálu detektorů byl zpracován tomografickou metodou využívající Tichonovovy regularizace s minimalizací Fisherovy informace převzaté ze systému tokamaku COMPASS a upravené pro parametry tokamaku GOLEM.

*Klíčová slova:* AXUV, GOLEM, tomografie, vyzařování plazmatu

*Title:* **Tomographic reconstruction of plasma radiation profile at the tokamak GOLEM**

*Author:* Bořek Leitl

*Abstract:* The thesis is dedicated to the integration of a new diagnostics of plasma radiation detection using AXUV detectors to the tokamak GOLEM diagnostic system. For two new AXUV20ELG detectors, transimpedance amplifiers were constructed, the detectors calibrated and mounted on the tokamak GOLEM, the first on a small lateral equatorial port and the second upper TOP port, both on south-east toroidal position. Amplified signals were digitized by an acquisition system and saved to the GOLEM database. The tomographic method with Tikhonov regularization using minimization of a Fisher information from the tokamak COMPASS was adjusted for tokamak GOLEM parameters and used for a data processing.

*Key words:* AXUV, GOLEM, tomography, plasma radiation

# Obsah

**Úvod** **3**

**1 Termojaderná fúze** **6**
1.1 Tokamak . . . 8
1.2 Záření plazmatu . . . 11
1.3 Diagnostika plazmatu na tokamacích . . . 12
1.3.1 Diagnostika záření . . . 14
1.3.2 Bolometrie a SXR detektory . . . 16
1.4 Tokamak GOLEM . . . 19
1.4.1 Diagnostika plazmatu na tokamaku GOLEM . . . 19

**2 Tomografie** **22**
2.1 Analytické metody . . . 23
2.1.1 Radonova transformace . . . 23
2.1.2 Filtrovaná zpětná projekce . . . 27
2.2 Rozklad funkce g(x,y) . . . 29
2.2.1 Globální bázové funkce . . . 30
2.2.2 Lokální bázové funkce (pixelové metody) . . . 32
2.2.3 Přirozené bázové funkce (Natural basis functions) . . . 33
2.3 Tichonovova regularizace . . . 36
2.3.1 Lineární regularizace . . . 37
2.3.2 Minimalizace Fisherovy informace . . . 38
2.3.3 Metoda maximální entropie . . . 40

**3 AXUV na tokamku GOLEM** **42**
3.1 Uspořádání experimentu . . . 42
3.2 Geometrie . . . 45
3.2.1 Prostorová kalibrace detektorů . . . 45
3.2.2 Vyzařovaný výkon . . . 49
3.2.3 Geometrická matice . . . 52
3.2.4 Derivační matice . . . 53
3.3 Zesilovače . . . 55

**4 Měření na tokamaku GOLEM a analýza dat** **58**
4.1 Určení polohy a výkonu plazmatu . . . . . 58
4.2 Rekonstrukce pomocí algoritmu s MFR . . . . . 61
4.2.1 Popis použitého algoritmu . . . . . 61
4.2.2 Použití algoritmu s MFI pro naměřená data . . . . . 63

**5 Diskuse** **65**

**Závěr** **67**

**Seznam použitých zdrojů** **69**

**Přílohy** **73**

# Úvod

Energetická potřeba lidstva neustále roste. Zároveň se zvyšuje tlak na ekologizaci energetiky a postupné vytlačování fosilních zdrojů, zejména uhlí a olejů. Také začíná postupná elektrifikace dopravy. Podle odhadů mezinárodní agentury pro atomovou enegii (IAEA) má světová spotřeba mezi lety 2018 a 2050 vzrůst cca o 38% [19, 1]. Přírustek přebližně odpovídá dnešnímu součtu spotřeby Indie a Číny. Zatímco dnes vedou fosilní zdroje, výhledu do roku 2050 dominuje budování elektráren čerpajících z obnovitelných zdrojů.

Z hlediska výzkumu se jako možná alternativa pro horizont deseti let jeví především levnější a účinnější solární energetika, přičemž naděje se vkládá do rychlého vývoje fotovoltaických panelů na bázi perovskitů a baterií s využitím nanotechnologií. Nezaostává ani jaderná energetika, která sice v Evropě zažívá úpadek po nehodě ve fukušimské jaderné elektrárně r. 2011, ale celosvětově, hlavně na Blízkém východě a v Asii, její budoucnost roste. Kromě klasických uranových elektráren se experimentuje s množivými reaktory, které umožňují recyklování paliva a zároveň využít mimo klasického $^{235}$U i $^{238}$U, jenž lze v množivém reaktoru přepracovat transmutací $^{238}$U na neptunium, měnící se beta rozpadem na štěpitelné plutonium. Stejným procesem lze získat $^{233}$U z $^{232}$Th. Pokud bychom využívali v jaderné energetice pouze $^{235}$U, kterého je v klasické uranové rudě jen okolo 0,7%, a jeho využitelnost zároveň není stoprocentní, odhady ukazují, že by nám jeho zásoby nevydržely déle než ty ropné. S využitím množivých reaktorů a nových paliv by lidstvu vydrželo palivo i stovky let.

Pokud se však budeme zabývat vzdálenější budoucností než je následující dekáda a například i expanzí člověka do Vesmíru, bude zapotřebí koncentrovaný zdroj energie a zároveň nezávislý na slunečním záření. Takovým zdrojem by se mohla stát termojaderná fúze, která tyto předpoklady splňuje.

V roce 1926 britský astrofyzik Arthur Eddington poprvé popsal reakci, díky níž Slunce září již 4,6 mld. let. Tato reakce je opakem štěpení, nazýváme ji termonuklární fúze a spočívá ve spojení dvou lehkých atomových jader za uvolnění přebytečné energie. K této reakci dochází za vysokých teplot řádu stovek milionů °C[1], kdy se hmota vyskytuje ve stavu zvaném plazma. Energeticky je fúze výhodná pro lehké atomy až do železa, zatímco štěpení naopak pro atomy těžké. Existuje mnoho důvodů, proč tento zdroj energie není doposud využíván. Ačkoliv byly na počátku výzkumu vyhlídky optimistické, cesta termojaderné fúze k funkční elektrárně je mnohem složitější než v případě jaderného štěpení. Podmínky pro vznik fúzních reakcí jsou velmi přísné

[1] V praxi se však používají jednotky energie eV, jelikož mluvit o klasické teplotě u částic plazmatu nemá smysl.

i v případě nejjednodušší varianty slučovaných jader D-T, tedy deuteria a tricia, na níž jsme zatím schopni technicky dosáhnout.

Komplexnost spočívá v dostatečné hustotě a teplotě plazmatu a době, po kterou jej držíme. Z důvodu vysokých teplot je zapotřebí plazma držet dále od materiálu reaktoru, což lze jen bezkontaktním silovým působením, tedy elektrickou nebo magnetickou silou, popřípadě tzv. inerciálně. Pro držení plazmatu tak byly testovány různé magnetické pasti od lineárních po stočené, využívající magnetické pole a velké laserové systémy, které počítají s tzv. inerciálním, tedy setrvačným udržením, kde musí reakce proběhnout velmi rychle. V magnetickém udržení dominuje zařízení zvané tokamak, který je nejblíže energetickému využití svým prvním testovacím reaktorem ITER s plánovaným fúzním výkonem 400 MW. Ten ovšem není koncipován pro dodávání elektrické energie do sítě a má především ukázat, jaké technologie budou lidé muset zvládnout před vývojem skutečné elektrárny, a zda se i nadále vyplatí do výzkumu tokamaků investovat.

Ačkoliv jsou podmínky pro realizaci termojaderné fúze náročné a na hranici lidských možností i na počátku 21. století, výhodou tohoto zdeoje je především množství využitelného paliva na Zemi. Podíl výskytu deuteria je sice oproti lehkému vodíku ve vodě asi 1/6000 a zdá se tedy malý, ale v porovnání s množstvím vody na Zemi, lze z hlediska doby trvání lidské civilizace mluvit o takřka nevyčerpatelném zdroji. V první fázi se však předpokládá, že reaktory budou využívat palivo ze směsi deuteria a tricia, které se díky svému poločasu rozpadu 12,3 let nedá dlouhodobě skladovat a nelze jej běžně z přírody získat. Nicméně vzniká jednak jako produkt při některých štěpných reakcích a také z reakcí s lithiem. Těchto reakcí se plánuje využít k produkci tritia přímo v plášti reaktoru.

Kromě vysokých nároků na materiály pro cívky, odolnou stěnu tokamaku či vakuovou techniku, musí obor termojaderné fúze zvládnout udržení plazmatu. K tomu je zapotřebí zkrotit jeho nestability. Abychom zjistili, jak se tyto nestability vyvíjejí a obecně věděli, co se s plazmatem děje, používáme různé diagnostiky. Potřebujeme měřit jeho hustotu, teplotu, proud, polohu, magnetické pole a další veličiny. K tomu lze využít elektrické a magnetické sondy, nebo např. interakci elektromagnetických vln s plazmatem. To kromě základních informací umožňuje i plasma zpětnovazebně řídit v průběhu výboje. Plazma navíc mnoho své energie vyzáří, a lze jej tedy zkoumat i pomocí detektorů záření. Pokud se u tokamaku díváme na plazma v tzv. poloidálním řezu z více pozorovacích úhlů, můžeme si na základě změn záření v čase vytvořit představu o některých nestabilitách a vyzářeném výkonu, je-li naše snímkovací frekvence vyšší než frekvence těchto nestabilit. S použitím různě propustných filtrů dostaneme zároveň informaci o záření pro definované oblasti vlnových délek.

Detekci celkového vyzářeného výkonu a unikajících částic lze určit pomocí tzv. bolometrů. Ty se nejčastěji sestávají z kovové fólie absorbující veškeré záření. Někdy jsou za bolometry označovány i polovodičové detektory AXUV[1], které ovšem nemají v celém spektru lineární odezvu. Jejich výhodou jsou ovšem vysoké snímkovací frekvence řádu MHz, což je předurčuje pro sledování elektromagnetické nestability (ELM) a magnetických ostrovů. Pro oddělení měkkého rentgenového záření (SXR) se používá

[1] zkratka pro Absolute eXtended UltraViolet

beryliový filtr a ze signálu lze poté určit vývoj sawtooth nestability [15].

AXUV detektory jsou malé a lze je řadit do polí vedle sebe. Omezíme-li záření dopadajícího na takové pole aperturou, každý jednotlivý detektor pole vidí jen určitou část plazmatu. Díváme-li se poté v jedné rovině na plazma několika takovými detektory, lze ze signálů s použitím metod tomografické rekonstrukce získat vyzařovací profil plazmatu v průběhu jeho života. Jejich nevýhodou je ovšem jejich degradace při vystavení plazmatu a neutronovému toku [18].

Na tokamak GOLEM byl r. 2014 instalován detektor s testovacím polem AXUV, pod označením AXUV0, snímající plazma horizontálně z bočního portu a byla odhadnuta vertikální poloha plazmatu z detekovaného profilu záření. Detektor byl převzat z tokamaku CASTOR, tedy původního tokamaku GOLEM, společně s jedním zesilovačem a nekompletním druhým detektorem.

Tato práce si klade za cíl vytvořit dva zesilovače s nízkým šumem pro dva nové AXUV detektory záření AXUV20ELG s dvaceti fotodiodami, kalibraci a instalaci detektorů na tokamak GOLEM a zavedení tomografické rekonstrukce vyzařování plazmatu do standardní diagnostiky. První kapitola poskytuje nezbytné informace o termojaderné fúzi, principu tokamaku a diagnostice plazmatu, zejména AXUV detektorům záření a funkci tokamaku GOLEM. Ve druhé kapitole jsou obecně rozebrány základní metody pro tomografické zpracování dat a především metoda minimalizace Fischerovy informace, u níž je předpoklad, že bude následně i využita, ačkoliv pro základní informaci se silným předpokladem na kruhové plazma by postačila i metoda Abelovy inverze. Třetí a čtvrtá kapitola jsou pak věnovány experimentální části, zesilovačům, kalibraci a zpracováním dat.

# Kapitola 1

# Termojaderná fúze

Termojaderné fúzní reakce označují jaderné reakce při nichž dochází ke slučování lehkých atomových jader za vysoké teploty při uvolnění části vazebné energie. Známe také pojem studená fúze, kdy se hypoteticky dvě atomová jádra k sobě přiblíží a sloučí za mnohem nižších teplot.

Na počátku 20. století r. 1920 britský fyzik Sir Arthur Stanley Eddington navrhl, že hvězdy berou svoji takřka nevyčerpatelnou energii z přeměny vodíku na helium, zatímco jiní fyzici obhajovali Kelvin-Helmholtzův mechanismus založený na gravitačním smršťování, který odhadoval stáří Slunce na 8,9 mil. let, což bylo i na tehdejší geologické poznatky stále málo. Eddington své teze publikoval r. 1926 ve své knize *Internal Constitution of the Stars*. O potvrzení existence fúzních reakcí se r. 1932 postarali J. Cockcroft a E. Walton, kteří na urychlovači částic sestrojeném v Rutherfordově institutu nejprve sráželi protony s lithiem, za vzniku $^4$He a po vylepšení používali místo lehkého vodíku i deuterium (izotop vodíku s jedním neutronem v jádře). Objevili tak $^3$He a tritium (vodík se dvěma neutrony v jádře). Hans Bethe poté r. 1939 popsal tzv. proton-protonový cyklus.

Samotná myšlenka uvolnění energie při slučování jader je založena na změně vazebné energie na nukleon. Tato energie roste až k železu $^{56}$Fe a pro těžší jádra opět klesá (viz obr. 1.1). Reakci označujeme za fúzní jestliže jsou reaktanty lehčí než $^{56}$Fe a při níž se energie uvolňuje (postup po křivce nahoru). U některých fúzních reakcích tak dokonce nedochází ke slučování jader, jako např. u rozpadu lithia na helium při jeho reakci s protonem. Do $^{56}$Fe se tedy u většiny slučovacích reakcí energie uvolňuje, zatímco dále lze energii získat jaderným štěpením.

Termojaderná reakce může proběhnout jen za podmínky, kdy se k sobě jádra dostanou dostatečně blízko k překonání odpudivé Coulombické bariéry, kde převládají krátkodosahové síly silné interakce. Poloměr atomu $R$ s nukleonovým číslem $A$ lze přibližně vyjádřit (viz [41]) empirickým vztahem

$$R \approx r_0 A^{1/3}, \tag{1.1}$$

kde $r_0 = (1{,}52 \pm 0{,}08).10^{-15}$ m. Parametr $r_0$ značí maximální vzdálenost, na kterou se může $\alpha$ částice přiblížit k ostřelovanému jádru při klasickém Rutherfordově rozptylu, tedy pouze se započtením Coulombovské interakce.

Jev, při němž se k sobě mohou jádra přiblížit s dostatečnou pravděpodobností se nazývá kvantové tunelování a popsal jej nejprve G. Gammov r. 1928 a o rok později ho ve svých výpočtech použili R. E. Atkinson a F. G. Houtermans. Tento jev umožnuje částici překonat s nenulovou pravděpodobností potenciálovou bariéru navzdory faktu, že její energie není z pohledu klasické fyziky dostatečná. Dostáváme tak podmínky na energii srážek, která je pro zatím dosažitelné termojaderné reakce řádu desítek mil. stupňů, kdy se látka nachází ve stavu zvaném plazma.

Nejjednodušší reakcí, kterou si můžeme představit je proton-protonová fúze, tedy reakce dvou jader lehkých vodíků. Tu však na Zemi využít nemůžeme, jelikož obsahuje přeměnu protonu na neutron, tedy velmi pomalý proces, který zatím neumíme ovlivnit.

Pro využití na Zemi je v blízké době dosažitelná D-T fúze, jelikož zahrnuje nejslabší požadavky na teplotu a hustotu plazmatu.

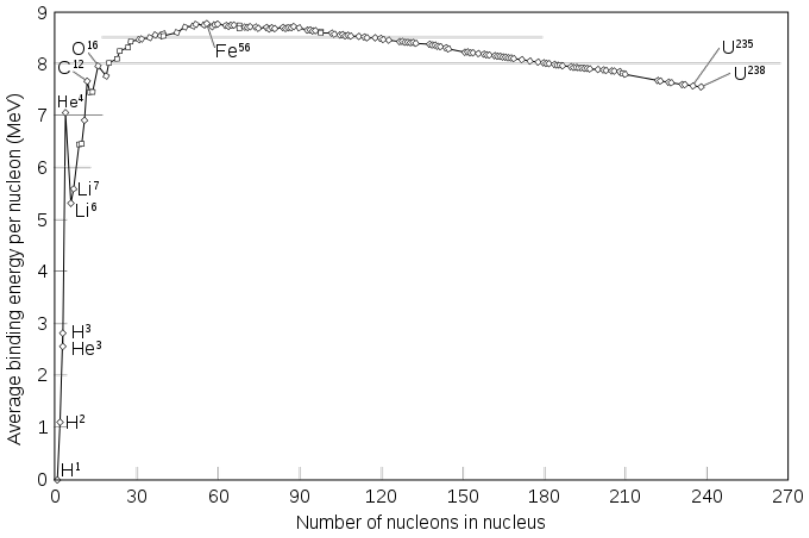
$$D + T \longrightarrow {}^4He(3.5\ \text{MeV}) + n(14.1\ \text{MeV}) + 17.6\ \text{MeV}. \tag{1.2}$$

Pro tuto reakci ovšem potřebujeme i T, které je na rozdíl od D nestabilní, má poločas rozpadu 12,32 roku, a nelze jej proto dlouhodobě uchovávat. Existuje proto několik řešení, které se získáváním T zabývají. Využívají většinou reakce při bombardování lithiových izotopů pomocí neutronů:

$${}^6Li + n \longrightarrow {}^4He + T + 4,8\ \text{MeV}, \tag{1.3}$$

$${}^7Li + n \longrightarrow {}^4He + T + n - 2,5\ \text{MeV}. \tag{1.4}$$

Řešení pro výrobu T potřebují především účinný zdroj neutronů. V úvahu je tak jeho produkce v obalu komory budoucí termojaderné elektrárny, kdy se bude vyrábět malé množství T přímo díky fúzním neutronům, přičemž první tritium bude vyrobeno jinde. První z uvedených reakcí je exotermická a lze ji využít v hybridních reaktorech, druhou však ne. Nevýhodou je i podíl izotopů lithia v zemské kůře. Zatímco $^6$Li je zde zastoupeno 7,5% $^7$Li představuje celkem 92,5%. Hranice 2,5 MeV je bohužel tak vysoká, že pro druhou reakci nelze použít klasické štěpení k produkci potřebných neutronů, jelikož energie neutronů při těchto reakcích bývá $<$2 MeV. Další termojaderné reakce je možno nalézt např. v [14].




Obrázek 1.1: Závislost vazebné energie na nukleonovém čísle (převzato z http://www.wikipedia.org))

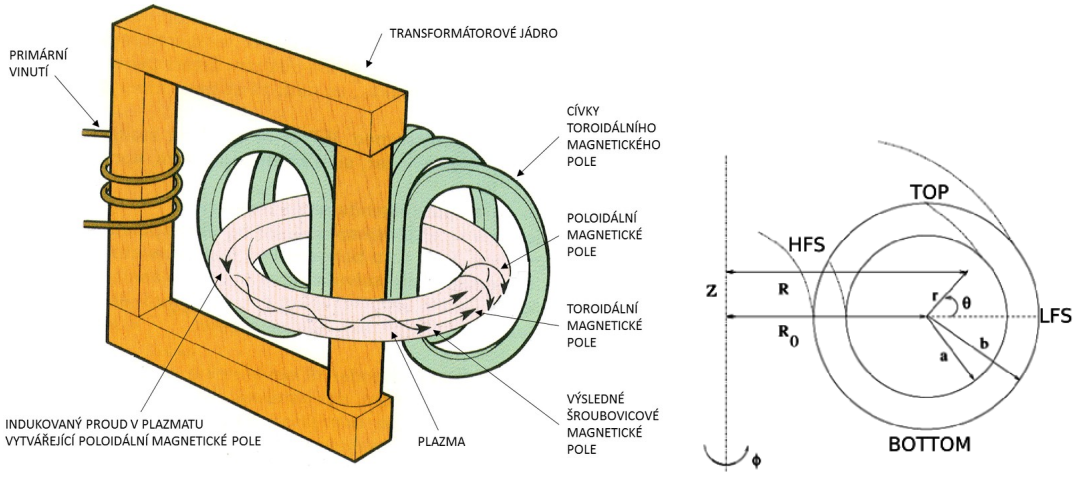
## 1.1 Tokamak

Tokamak neboli (Тороидалная камера с магнитными катушками), tedy "toroidální komora s magnetickými cívkami" je zařízení s magnetickým udržením plazmatu. Původní koncept v 50. letech 20. stol. navrhl Rus O. A. Lavrentěv a plazma mělo být drženo elektrickým polem. Konceptu využili I. J. Tamm a A. Sacharov. Místo elektrického pole, použili magnetické udržení a za vedení L. Arcimoviče bylo zařízení zkonstruováno.

Původní návrh zařízení sestával z toroidální vakuové komory s kruhovým průřezem (viz obr. 1.2). Pro lepší podmínky udržení plazmatu se dnes používají průřezy připomínající písmeno D společně s dalšími prvky jako jsou polohovací a tvarovací cívky a tzv. divertor.

Komoru tokamaku si lze představit jako pneumatiku (viz obr. 1.2). U tokamaku (viz pravá část obr. 1.2) rozeznáváme hlavní poloměr $R_0$, udávající vzdálenost rotační osy prstence $Z$ od osy komory a vedlejší poloměr $a$, což je poloměr komory. Při parametrizaci toroidálního tvaru rozlišujeme dva hlavní úhly, čímž se definují i dva základní směry. První úhel, který značíme $\phi$, popisuje otáčení kolem osy $Z$ (toroidální směr), zatímco úhel $\theta$ popisuje pohyb kolem osy komory tokamaku (poloidální směr). Vzdálenost od středu centrální osy tokamaku $Z$ udává parametr $R$. Libovolný bod v komoře tokamaku je tedy popsán třemi souřadnicemi ($R$, $\phi$, $\theta$).

Jeden z možných ohřevů pracovního plynu je založený na principu transformátoru, kdy centrální solenoid probíhá středem prstence a díky změně indukčního toku je uvnitř nádoby generováno elektrické pole, které urychluje nabité částice a lavinově plyn ionizuje, dokud nedojde k výboji, kdy vzniklým plazmatem nezačne téct proud a plazma se nezačne v principu chovat jako jedna smyčka sekundárního vinutí transformátoru. Vzniklé plazma se poté díky svému odporu ohmicky ohřívá. Pro zvýšení množství prvotních nabitých částic při zahájení výboje se používá tzv. předionizace,




Obrázek 1.2: Základní schéma tokamaku (vlevo) převzato z [30], geometrie (vpravo)

často v podobě filamentu žárovky, kdy nažhavené vlákno termoemisí dodává do prostoru nádoby tokamaku potřebné nabité částice.

Tokamak je založen na principu magnetického udržení. Zařízení obsahuje systém cívek, vytvářející magnetické pole, jehož silokřivky nabité částice plazmatu sledují a plazma je tak drženo od stěny. Díky proudu plazmatem z transformátorového efektu se kolem plazmatické smyčky vytvoří tzv. poloidální magnetické pole, jehož silokřivky jsou v poloidální rovině. Aby se trajektorie částic uzavíraly v kruhu podél toru, je nádoba obklopena cívkami toroidálního magnetického pole, které společně s nádobou připomínají stočený solenoid s dutým ocelovým jádrem. Částice se v ideálním případě pohybují podél silokřivek spojeného toroidálního a poloidálního magnetického pole, kterému říkáme střižné, a jsou tak lapeny do magnetické pasti. Díky střižnému poli lze předejít některým typům driftů částic (viz [6]). Pro polohování a tvarování plazmatu, umožňující zároveň zpětnou vazbu, jsou vně nádoby umístěny další vertikální cívky. Ty zároveň slouží např. k vyrovnávání tzv. "hoop force", což je síla která v ohybu proudového prstence tlačí plazma směrem od středu ven [48]. Střižné pole je pro stabilitu nutné, ale u jiných zařízení jako např. u stellarátorů se řeší jiným způsobem. Tokamak se od stellarátorů liší řízeným proudem v plazmatu. V reálném plazmatu také probíhají srážky, a tudíž i difúze, což má za následek velké úniky částic a tedy i energie.

Dále označíme polohy vzhledem k poloidálnímu řezu komory. To lze udělat podle toroidálního pole (viz obr. 1.2), které klesá s $1/R$, a tudíž je na vnitřní straně prstence, tj. blíže k ose $Z$, silnější magnetické pole. Tuto vnitřní část tokamaku se silnějším toroidálním polem označujeme jako HFS (High Field Side), zatímco vnější stranu tokamaku značíme LFS (Low Field Side). Pro horní, resp. spodní část komory, zavedeme označení TOP resp. BOTTOM.

Jak již bylo zmíněno, proud v plazmatu je kromě generování poloidálního magnetického pole důležitý i z důvodu ohmického ohřevu. S rostoucí teplotou plazmatu však klesá jeho odpor a klesá tak i efektivita ohmického ohřevu, a pro dosažení vyšších energií plazmatu je proto nutné využívat i jiné zdroje. Rychlá změna magnetického

pole v plazmatu indukovaného proudem navíc vede k nestabilitám [45]. Ohmický ohřev se tak uplatní při nižších teplotách plazmatu, kdy má dostatečný odpor. Velkým problémem tohoto typu ohřevu je také saturace transformátorového jádra, kdy dochází k jeho nasycení a není dále možné předávat plazmatu energii, jelikož k tomu je zapotřebí změna magnetického indukčního toku.

Dalším typem ohřevu plazmatu je využití mikrovln a rádiových vln o specifických frekvencích. Frekvence se volí dle vyšších modů rezonančních frekvencí iontů a elektronů [45]. Elektrony mají vyšší rezonanční frekvenci než ionty a vyžadují pro ohřev mikrovlnný zdroj s frekvencemi v řádu GHz, zatímco ionty se ohřívají rádiovými vlnami s frekvencemi řádu MHz. Velké energie je možné plazmatu předat také svazky neutrálních částic (Neutral Beam Injection - NBI), kdy se postupně urychlí svazek vodíkových, popřípadě deuteriových iontů, které před vstupem do komory tokamaku prochází neutralizátorem, aby svazek nebyl ihned odkloněn magnetickým polem v tokamaku, a aby se do plazmatu nepřenášel lokální náboj, což by mělo vliv na porušení kvazineutrality. Společně s elektromagnetickým ohřevem se NBI používají u většiny středních a velkých tokamaků. Na tokamaku ITER by měl mít ohřev NBI výkon až 16 MW.

Uvažujeme, že plazma tokamaku je tedy externě zahříváno výkonem $P_{ext}$. V elektrárně bude ohřev zprostředkován i částí $\alpha$ částic vzniklých při reakci, označme tento výkon $P_\alpha$. Zanedbáme-li ohřev srážkami s neutrony, máme celkový příspěvek k ohřevu. Ztráty energie plazmatu jsou způsobené jednak tokem částic na stěnu $P_\Gamma$ a dále zářením $P_{rad}$, pro které je plazma opticky tenké, a není proto absorbováno. Označíme-li celkovou energii plazmatu jako $W$, pak můžeme napsat energetickou balanční rovnici jako

$$\frac{dW}{dt} = P_{ext} + P_\alpha - P_{rad} - P_\Gamma \tag{1.5}$$

Bilance určuje čas, po který plazma udržíme, než ztratí svoji energii, tedy tzv. dobu udržení energie $\tau_E$. Zde se budeme zabývat členem $P_{rad}$, který chceme odhadnout. K tomu je zapotřebí záření plazmatu detekovat (viz 1.3.2).

Pro diagnostiku tokamakového plazmatu je obecně nutné mít k dispozici pozorovací okna, kterým říkáme porty. Ty mohou mít různou velikost a polohu v závislosti na konstrukčním řešení tokamaku. V případě tokamaku GOLEM jsou umístěny na v polohách TOP, BOTTOM a LFS. Porty lze využít pro manipulaci s vnitřní částí komory, zavedení detektorů, sond a jiných diagnostik nebo ohřevu.

Koncept tokamaku se díky dobrým výsledkům stal kandidátem na první fúzní elektrárnu. Hlavním testem nových technologií bude projekt ITER, jenž má být uveden do provozu kolem roku 2025 a po testování H a D kampaně, by měla přijít přibližně roku 2035 kampaň s D-T fúzí. Než bude možné přistoupit ke konstrukci demonstrační elektrárny, je stále zapotřebí vyřešit několik problémů. ITER by měl otestovat moduly pro produkci tritia z lithia (Test Blanket Modules - TBM) a také rychlý odvod tepelného toku z nejexponovanějších částí. Dalším problémem je výstavba elektrárny samotné, ta bude muset obstát jednak stále levnější energii z obnovitelných zdrojů, ale také stále vyšším kritériím na bezpečnost. Ačkoliv se na stěnu použije nízkoaktivovatelná feriticko-martensitická ocel (EUROFER), ta přesto díky neutronovému záření

fúzního plazmatu degraduje a stává se trochu aktivní společně s dalšími materiály. Ve fúzních zařízeních pracující s fúzí D-T se díky aktivaci materiálů a práci s radioaktivním tritiem používá kampaň až po předchozích testech na H a D. Ve budoucím výzkumu termojaderné fúze tak zajisté budou hrát roli i pokročilé (advanced) reakce, kde nevystupují neutrony.

## 1.2 Záření plazmatu

Částice plazmatu jsou v tokamaku vystaveny různým vlivům. Jednak je zde prostorově i časově proměnlivé magnetické pole, které částice sledují, a zároveň interagují mezi sebou. Plazma též mění při výboji svoji energii díky ohřevu a ztrátám zářením a částicemi. Při těchto podmínkách nastává obecně několik jevů, díky nimž může vznikat elektromagnetické záření. V prvé řadě jednotlivé nabité částice konají zrychlený pohyb v magnetickém poli. Dále působí na sebe navzájem. Pokud se dostanou dostatečně blízko, ovlivňují se vzájemnou Couloumbickou silou a touto změnou rychlosti vzniká brzdné záření neboli Bremsstrahlung. Pokud získáme příspěvek jedné takové srážky, můžeme souhrnně odhadnout výkon takového záření. Ten je úměrný $1/r^4$, kde $r$ je vzdálenost mezi interagujícími částicemi a lze jej zjednodušeně odvodit jako

$$P_B = \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \tag{1.6}$$

kam dosadíme za zrychlení $a$ vztah pro Couloumbickou interakci, tj.

$$a_B = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^2}. \tag{1.7}$$

Po několika krocích a se zjednodušením na jednotnou hustotu $n = n_i = n_e$, můžeme výkon brzdného záření $P_B$ popsat vztahem

$$P_B = \frac{e^6}{24\pi\epsilon_0^3 c^3 m_e h} n^2 Z^2 \sqrt{\frac{8KT_e}{\pi m_e}} g_{ff} \left(\frac{Z^2}{T_e}\right) [W/m^3], \tag{1.8}$$

kde $g_{ff}$ je tzv. free-free Gauntův faktor, představující korekci na kvantové efekty [14], $n$ je hustota plazmatu a $Z$ náboj iontů. Gauntův faktor je pro SXR ≈1 a pro viditelné záření, kdy se uplatňuje především Bremsstraglung, nabývá hodnot přibližně 2-5 [18]. Vztah pro nekvantové odvození lze nalézt v [38, 37].

Po dosazení konstant se započtením Gauntova faktoru, dostaneme přibližný vztah

$$P_B = 1,7 \cdot 10^{-38} n^2 Z^2 \sqrt{T_e}. \tag{1.9}$$

Zvážíme-li, že plazma obsahuje i příměsi, a tedy různé ionty, je třeba nahradit $Z$ efektivním nábojem, který zavádíme jako

$$Z_{eff} \equiv \sum_{i \neq e} \frac{n_i Z_i^2}{n_e}, \tag{1.10}$$

kde $Z_i$ a $n_i$ značí náboje a hustoty příslušných iontů.

Pokud ve vztahu 1.6 zaměníme zrychlení z Couloumbické interakce za vliv magnetického pole, dostaneme druhý typ záření kterému říkáme cyklotronní. Na částici v plazmatu totiž působí Lorentzova síla kolmá jak na magnetické pole, tak na směr rychlosti jejího pohybu. Výsledkem je tzv. gyrační pohyb částice kolem magnetických silokřivek po kružnici v rovině kolmé na silokřivky s tzv. Larmorovým poloměrem $r_L$. Částice zároveň koná volný pohyb podél silokřivek, takže se na ně jejich trajektorie volně navíjí. Vezmeme-li tedy zrychlení částice v magnetickém poli jako

$$a_C = \frac{eB}{m_e}\sqrt{\frac{2eT_e}{m_e}} \tag{1.11}$$

a dosadíme $a_C$ do 1.6, dostaneme přibližně

$$P_C \approx \frac{n_e e^5 B^2 T_e}{3\pi\epsilon_0 c^3 m_e^3}, \tag{1.12}$$

kde $c$ je rychlost světla, $B$ kolmá složka magnetického pole na vektor rychlosti částice. Dosazením konstant dostaneme přibližný vztah

$$P_C \approx 6,1 \cdot 10^{-20} n_e B^2 T_e [\mathrm{W\ m^{-3}}][\mathrm{W\ m^{-3}}]_{[\mathrm{W\ m^{-3}}]_{[\mathrm{W\ m^{-3}}]_{.(1.13)}}}$$

Kvůli závislosti na hmotnosti budou lehké elektrony v plazmatu dominovat cyklotronnímu záření. To závisí na magnetickém poli a celá oblast plazmatu pro něj nemusí být transparentní. Většinou je silně reabsorbováno, a únik energie je přes něj proto minimální. Jelikož ale většinou známe magnetické pole, lze toto záření za vhodných podmínek využit ke stanovení teplotního profilu plazmatu.

Třetím významným zdrojem záření z plazmatu jsou zářivé přechody elektronů v atomovém obalu. Jelikož jsou tyto přechody z hlediska energie kvantované, projevuje se toto záření charakteristickými čarami ve spektru. Tyto čáry mají specifickou vlnovou délku a fungují jako otisk pro jednotlivé elektronové přechody. Detekce rozšíření těchto čar se využívá například ke stanovení rychlosti rotace či teploty plazmatu.

## 1.3 Diagnostika plazmatu na tokamacích

Plazma na tokamacích můžeme zkoumat díky jeho vlivu na okolí. Jednak je činné elektromagneticky, tj. vyzařuje od tvrdého rentgenového záření (HXR) přes měkké SXR, viditelné záření, až po mikrovlnou oblast, a zároveň je také zdrojem částic - fúzních neutronů a alfa částic v případě dostatečných teplot a obecně elektronů a iontů. Zároveň je zde celá řada jevů, díky nimž se náš zdroj informací, tedy záření obecně a tok částic z plazmatu neustále mění. Cílem diagnostiky je tyto změny zachytit a jevy za nimi popsat tak, abychom pochopili chování plazmatu, a mohli poté přizpůsobit podmínky za kterých jej držíme a ohříváme.

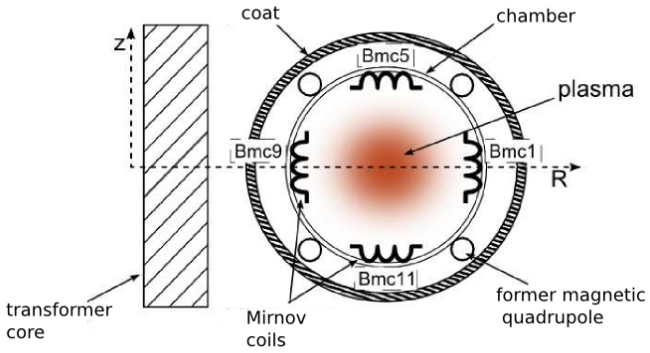
Metody, které používáme lze rozdělit do dvou základních skupin podle míry vlivu našeho měření na plazma, a to na aktivní a pasivní, Zatímco pasivní metody pouze

detekují záření a částice jdoucí z plazmatu ven, aniž by jej ovlivňovaly, aktivní diagnostiky s ním přímo interagují, jako v případě různých elektrických sond. Z důvodu vysokých energií částic plazmatu je však dlouhodobý kontakt pro sondu destruktivní. Aktivní mohou být i jiné diagnostiky, kdy např. vysíláme do plazmatu různé druhy elektromagnetického záření a sledujeme jeho změny po průchodu plazmatem.

Nejjednodušší způsob z hlediska potřebných instrumentů, jak získat nějakou informaci o plazmatu, je pracovat s jeho magnetickým polem. Změna magnetického toku procházejícího uzavřenou vodivou smyčkou vyvolává v ní dle Faradayova zákona elektromotorické napětí. Proud plazmatem v toroidálním směru získáme z detekce poloidální složky magnetického pole, které proud vytváří. Cívce k tomu určené říkáme Rogovského pásek (viz obr. 1.4). Jedná se o solenoid obtočený kolem komory tak, že poloidální magnetické pole prochází přes jeho závity. Smyčka však není uzavřena a drát je poté veden vnitřkem solenoidu zpět na počátek. Tím se vyhneme započtení toroidálního pole. Jelikož Rogovského pásek sčítá vliv proudu plazmatem i komorou, musíme znát indukčnost komory, abychom mohli stanovit proud pouze plazmatem.

Tzv. napětí na závit $U_{loop}$ je měřeno smyčkou podél toru. Díky tomu lze společně se znalostí proudu plazmatem ve zjednodušeném případě určit střední vodivost a ze Spitzerovy formule dále zhruba odhadnout centrální elektronovou teplotu $T_e$.

K určení polohy plazmatu v komoře a detekci toroidálních a poloidálních módů nestabilit slouží mj. tzv. Mirnovovy cívky. Jedná se o malé cívky rozložené buď po obvodu komory v poloidálním nebo toroidálním směru. Porovnáním párů cívek lze zjistit lokální odlišnosti v magnetickém poli a tím stanovit např. polohu plazmatu [23]. Schéma umístění čtyř těchto cívek v poloidálním řezu je na obrázku (1.3). Společně s dalšími diagnostikami slouží Mirnovovy cívky pro získání magnetických povrchů a jejich vývoje v čase, kdy se k výpočtu využívá Grad–Shafranovovy rovnice.



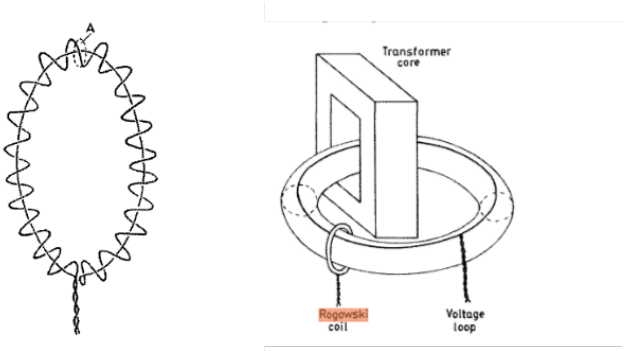

Obrázek 1.3: Umístění Mirnovových cívek na tokamaku GOLEM - poloidální řez komorou (převzato z [46])

Přímé měření magnetického pole umožňují Hallovy detektory. Senzorem je polovodičová destička, kterou protéká proud $I_x$ ve směru osy x. Umístíme-li destičku tloušťky $d$ kolmo na magnetické pole ve směru osy z, dostaneme napříč destičkou (ve

směru y) potenciálový rozdíl $U_H$ úměrný velikosti magnetické indukce $B_z$ [7]

$$U_H = R_H \frac{I B_z}{d}, \tag{1.14}$$

kde $R_H$ je tzv. Hallova konstanta, závislá na vodivosti polovodiče.




Obrázek 1.4: Rogovského cívka - vlevo, $U_{loop}$ a umístění Rogovského cívky - vpravo (převzato z [14])

Některé diagnostiky využívají interakci s elektrickým polem plazmatu. Jedná se o různé druhy elektrických sond, kdy se na izolovanou elektrodu, jejíž obnažený hrot interaguje s plazmatem, přiloží napětí, často rozmítané. Měří se tak tzv. sondová charakteristika, tedy voltampérová charakteristika. Z té lze získat např. teplotu plazmatu, plovoucí potenciál či koncentraci elektronů. Sond je možno použít i více najednou s různými vazbami. Nejstarší ze sond jsou tzv. Langmuirovy sondy, ale existují i složitější sondy např. Katsumotova či Ball-pen pro přímé měření potenciálu plazmatu.

Zkoumat lze i záření plazmatu. To lze rozdělit do několika skupin. Jednak na optickou část od blízkých UV, přes viditelné záření až po infračervené (IR), dále tvrdé resp. měkké rentgenové záření HXR resp. SXR, ale také záření v mikrovlnných oblastech. Více v následující sekci.

Z pasivních diagnostik nám podstatnou informaci poskytují i korpuskulární diagnostiky jakými jsou hmotnostní nebo neutronová spektroskopie. Jednak chceme vědět, jak čistý plyn v pracovní komoře máme a v případě fúzních zařízení, kde jsou produkovány neutrony, chceme zjistit, zda jsou produkovány fúzními reakcemi.

### 1.3.1 Diagnostika záření

Plazma je pro většinu spektra transparentní, a toto záření proto není od svého vzniku zkresleno. Díky tomu lze i bez kontaktu s plazmatem zjistit lokální informace o vnitřku plazmatického prstence, a to i s velkým časovým rozlišením. Jeho detekce je klíčem k pochopení průběhu nestabilit a turbulencí, k určení složení plazmatu a energetické bilance. Vysokoenergetické plazma větších tokamaků vyzařuje zejména v oblasti měkkého rentgenového záření (SXR). Z něho lze určit polohu středu plazmatu, teplotu a koncentraci příměsí [43]. Principu detektorů záření je věnována následující sekce.

I diagnostiku záření lze rozdělit na aktivní a pasivní. Zatímco pasivní metody pouze plazma sledují. Aktivní vysílají do plazmatu nějaký typ vln, či laserového paprsku, jenž s ním interaguje. Poté je detekováno záření z této oblasti.

Plazma ztrácí hlavní část energie čárovým zářením nečistot při vázaných přechodech elektronů, dále brzdným zářením (Bremsstrahlung) či rekombinacemi iontů. Zatímco rekombinace a přechody ve vázaných stavech dominují okrajům plazmatu. brzdné záření je nejsilnější v jeho centru. Některé informace však poskytuje i záření cyklotronní, pro které není plazma v některých místech transparentní.

Elektronové cyklotronní záření pochází z elektronové cyklotronní emise (Electron Cyclotron Emission - ECE) a lze jej detekovat v mikrovlnné oblasti. Elektrony vyzařují a absorbují stejnou frekvenci ($\omega = qB/m$), podle toho, v jakém magnetickém poli se nachází. Pokud budeme uvažovat, že jsou tyto procesy v rovnováze, chovají se elektrony jako černé těleso, které lze popsat Planckovým zákonem [37] a spektrální intenzitu $I_B(\omega)$ lze vyjádřit jako

$$I_{bb}(omega) = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3c^2} exp(\frac{\hbar\omega}{eT_e} - 1)^{-1}, \tag{1.15}$$

kde $\hbar$ je redukovaná Planckova konstanta, $\omega$ frekvence záření, $e$ náboj elektronu, $T_e$ elektronová teplota a $c$ rychlost světla ve vakuu. Uvažujeme-li zároveň nízké frekvence $\hbar\omega \ll eT_e$ lze psát přibližný vztah pro $I_{bb}$

$$I_{bb} = \frac{\omega^3 eT_e}{8\pi^3c^2}. \tag{1.16}$$

Je tak možné stanovit elektronovou teplotu, která v tomto případě závisí na frekvenci.

Mikrovlny lze využít i jinak. Frekvenční transparence plazmatu je dána vlnami v něm. Jako low pass filtr funguje plazmatická frekvence. Ta závisí nepřímo úměrně na koncentraci částic a nižší frekvence než je plazmatická jsou odraženy, vyšší projdou, ale dochází k jejich útlumu úměrnému uražené vzdálenosti. Prošlá vlna je jednak tlumena, ale také fázově posunuta, čehož lze využít ke stanovení koncentrace.

Velmi specifické je tzv. čárové záření. Každá čára ve spektru je charakteristickým otiskem jednoho elektronového přechodu v obalu atomu. Spektroskopii čárového záření je možno využít od IR oblasti po gama.

Pasivní spektroskopie umožňuje určit složení nečistot v plazmatu a z Dopplerovského rozšíření čar potom teplotu nebo rotaci plazmatu. Použití multichordové diagnostiky pak poskytuje rozložení nečistot. Ze spojitého záření ve viditelném spektru se dá zjistit také efektivní náboj nečistot, jelikož intenzita záření je úměrná $n_e^2 Z_{eff}\sqrt{(T_e)}$. Ze znalosti elektronové teploty $T_e$ a hustoty $n_e$, tak určíme $Z_{eff}$. Spektroskopie se využívá i ve spojení s aktivní diagnostikou. Např. na tokamaku JET byl vstřikován kobalt pro získání informací o pohybu nečistot. Jiné metody využívají např. vstřikování argonu. Pomocí spektrometrie lze určit i teplotu elektronů. K tomu se používá Thompsonova rozptylu laserového svazku na elektronech a opět se pozoruje Dopplerovské rozšíření spektra rozptýleného záření.

Celkovou vyzářenou energii měříme pomocí tzv. bolometrů. Jde-li nám o vysoké časové rozlišení vývoje profilu záření v průběhu výboje ve viditelném a SXR spektru,

používají rychlé kamery s CCD a CMOS čipy či AXUV obsahující pole polovodičových detektorů. Pro detekci energie záření se používají jak polovodičové detektory, tak detektory celkové dopadající energie záření i částic, tvořené většinou kovovou fólií. Tyto diagnostiky se často vzájemně doplňují. Lze pomocí nich určit výkon vyzařovaný plazmatem, popř. je s nimi možné odhadovat absolutní teplotu resp. rychlostní rozdělení částic a dobu udržení energie [22]. Kritériem při výběru detektoru tedy je, jaké záření chceme detekovat, s jakým časovým rozlišením a jak přesně tento údaj potřebujeme.

### 1.3.2 Bolometrie a SXR detektory

Na plazma se díváme skrze porty a využíváme buď přímý dopad záření na detektor, nebo jej nejprve vedeme optickou soustavou přes různě propustné filtry, které určují rozsah pozorovaného spektra. Detektory a s nimi spojená soustava se liší také tím, jaký typ plazmatu se chystáme pozorovat. U větších zařízení, kdy jsou zároveň dosahovány vyšší teploty a dochází dokonce k produkci neutronů, je nutné pozorovací soustavu chránit před poškozením.

K detekci záření se používá několik fyzikálních principů. Prvním z nich je absorpce záření na plátku kovu např. Au, který je spojený s tepelným rezervoárem. Kov je zapojen vetšinou můstkovým zapojením do obvodu, kdy se měří jeho odpor, jehož závislost na teplotě je známa. Odtud je možno určit změnu energie kovu a tedy i dopadající energii fotonů a částic. Těmto detektorům, které absorbují veškerou vyzářenou energii říkáme bolometry.

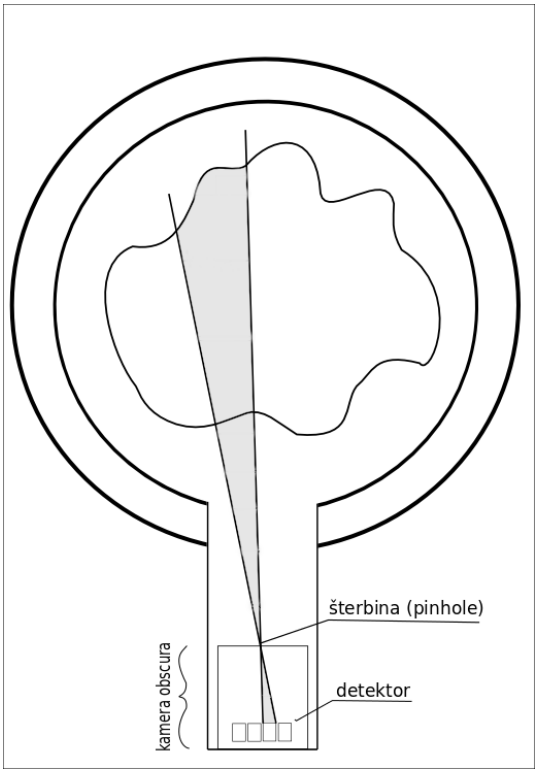
Bolometr, řecky ($\beta o \lambda \acute{o} \mu \epsilon \tau \rho \nu$) je detektor sloužící k měření energie dopadajícího záření a částic. Původ slova je odvozen z řeckého ($\beta o \lambda \acute{\eta}$) s významem čáry nebo šíp a slova ($\mu \epsilon \tau \rho \nu$) čili měřit. První bolometr vynalezl americký astronom P. Langley r. 1878 a měřil jím energii kosmického záření. Jeho detektor sestával ze dvou černěných proužků platiny zapojené do Wheastonova můstku. Hlavní úlohou bolometrů na tokamacích je právě detekce celkového úniku energie zářením a částicemi z plazmatu. Tato informace je důležitá pro stanovení celkové energetické bilance plazmatu, a tedy i doby udržení.

Kromě odporu lze pro bolometry využít i piezoelektrického jevu. Např. u niobičnanu lithného ($LiNbO_3$) je generován proud na základě spontánní polarizace závislé na teplotě. Nevýhodou těchto detektorů je však malý generovaný proud ~pA a náchylnost na otřesy, což klade velké nároky na zesilovače a stínění před vibracemi.

Na plazma se nemusíme dívat jen přímo, můžeme umístit zlaté či platinové destičky tak, aby absorbovaly veškeré záření plazmatu a poté detekovat až vlastní infračervenou stopu těchto destiček. Na tomto principu fungují infračervené (IR) bolometry, ty mají zároveň lepší poměr signál/šum oproti odporovým bolometrům. Detektory (IR) jsou pak ukryté před tvrdým zářením a rychlými částicemi za sérii IR zrcadel.

Obecně lze pole takový bolometrů umístit za aperturku (štěrbinu) (viz obr. 1.5), která omezuje pozorovací úhel jednotlivých detektorů. Tomuto uspořádání říkáme camera obscura. Každý detektor tak bude integrovat záření plazmatu z jiného prostoru. V praxi se používají i stovky kanálů (pixelů), např. 192 kanálů v případě JT-60U, kde navíc bylo dosaženo časového rozlišení IR bolometrů 10 ms. S IR bolometry se

počítá i v projektu ITER [22].

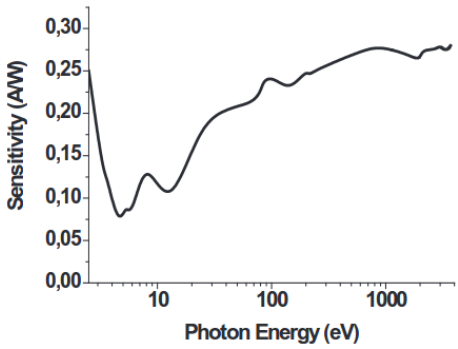



Obrázek 1.5: Schéma camery obscury

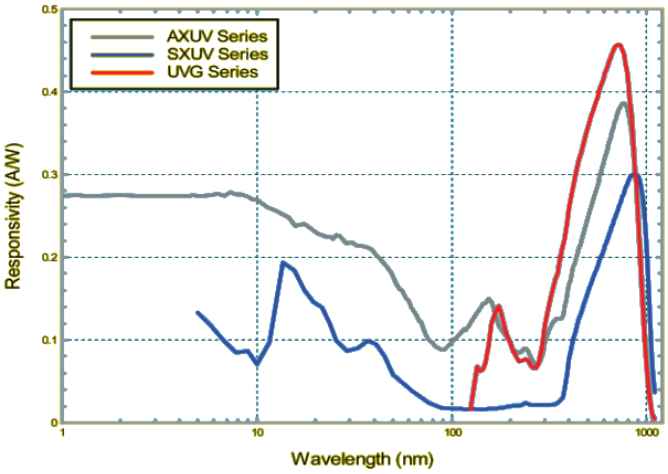
Tato práce je věnována především polovodičovým detektorům, využívající fotoelektrického jevu a jejichž výhoda je oproti kovovým odporovým detektorům je ve velmi rychlé odezvě řádu MHz. Používají se k tomu polovodiče s vhodnou stavbou a dopováním. Absorpční vrstva určuje spektrální odezvu, tj. kolik párů elektron-díra se vytvoří pro konkrétní energii dopadajícího záření a tedy i poměr generovaného proudu vzhledem k jeho dopadajícímu výkonu A/W. I tyto detektory lze umístit za aperturu a nastavit tak jejich pozorovací úhly, tzv. chordy. Díváme-li se na plazma z více míst poloidálního řezu s překrývajícími se chordami, můžeme pozorovat změny sledovaného parametru lokálně díky zpracování dat tomografickými metodami. Omezíme-li spektrum záření dopadajícího na detektor vhodným filtrem, můžeme se zaměřit pouze na toto konkrétní spektrum. Jako filtr pro nízké energie funguje např. beryliové okénko, propustné pro SXR. Polovodičových detektorů využívá i celá řada již zmiňovaných diagnostik např. optická spektroskopie, kdy je záření rozloženo na optickém hranolu a takto rozdělené dopadá na sadu polovodičových detektorů, z nichž každý snímá jen jistou úzkou oblast vlnových délek.

Nevýhodou tepelných detektorů, tj. detektorů převádějících energii absorbovaného záření a částic tepelnou cestou do rezervoáru, je jejich špatný poměr signál/šum. Tepelné detektory jsou totiž ovlivněny například mikrovlnami, které se neabsorbovaly při ohřevu plazmatu, či infračerveným zářením, pocházejícím ze součástí vystavených tepelnému toku [22]. Rozvoj ve výrobě polovodičů umožnil vznik fotodiod s velmi

tenkou mrtvou vrstvou, jejichž účinnost se proto blíží vnitřní kvantové účinnosti. V celkové účinnosti je třeba ještě započítat vliv ochranného prvku, často tvořeného oxidem křemičitým, které brání detektor před poškozením rychlými částicemi. Navzájem je odlišujeme podle účelu, tj. spektra detekovaného záření, pro něž byly vyrobeny. Podle toho se i označují. Vznikly tak například i diody AXUV (Absolute eXtended Ultra Violet), které nemají dopovanou mrtvou vrstvu a mají téměř plochou křivku citlivosti pro energie fotonů vyšší než 50 eV, jak je vidět z obrázku 1.6. Pro tyto energie se tak blíží jejich citlivost teoretické hodnotě 0,26 A/W. Tyto detektory jsou využívány i jako bolometry. Je-li však těžiště výkonu v oblasti, kde jejich citlivost není rovnoměrná, tj. energie dopadajících fotonů ≈10 eV mohou být výsledky značně zkreslené. Výhodu nad tepelnými detektory mají především v rychlosti, ale jako bolometrů je jejich využitelnost omezena jednak kvůli zmíněné nestejnoměrné spektrální citlivosti a také pro jejich degradaci při vystavení rychlým částicím. Obecná skladba AXUV a podobných diod je pak naznačena na obrázku 1.8.

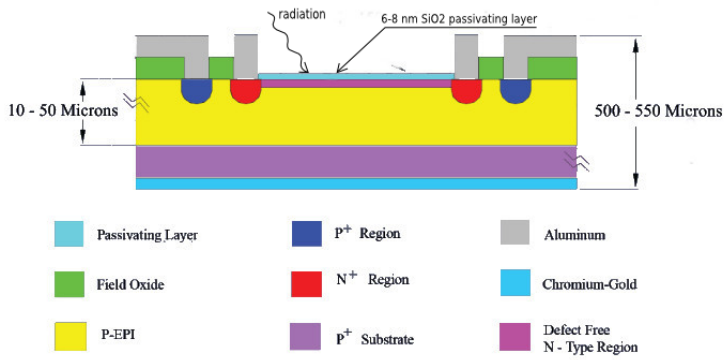



Obrázek 1.6: Závislost citlivosti AXUV na energii dopadajících fotonů (Převzato z [20])




Obrázek 1.7: Citlivost AXUV pro vlnové délky záření ve srovnání s SXUV a UVG (Převzato z [20])

Využití polovodičových detektorů k pozorování rychlých změn ve vyzařování tokamakového plazmatu je široké, uplatňují se při studiu MHD (Magnetohydrodynamic) nestabilit a ELM (Edge Localized Modes), modů lokalizovaných na okraji, vyskytujících se v tokamacích s divertorem [43]. Tyto procesy mají vliv na vyzařování plazmatu a probíhají velmi rychle, což klade požadavky na pozorovací zařízení. Kromě rychlosti musejí detektory splnit i podmínku na dobré rozlišovací schopnosti. AXUV diody tyto požadavky splňují a poskytly důležité informace o MHD a ELM nestabilitách např. na tokamacích Alcator C-mode, TCV, T-11, T-10 a dalších. Jejich nevýhodou je již zmíněná degradace polovodičových detektorů v neutronovém záření a částečná ztráta účinnosti při vystavení plazmatu. Z těchto důvodů se s nimi na fúzních zařízeních nepočítá. Po vhodné kalibraci se některé AXUV diody využívají také jako absolutní detektory [20]. Nelineární citlivost pro nízké energie fotonů zároveň omezuje AXUV pro jejich využití jako detektorů celkového vyzářeného výkonu plazmatu [22].




Obrázek 1.8: Skladba AXUV diod (Převzato z [20])

Polovodičové detektory lze vyrobit poměrně malé, takže abychom zjistili prostorové rozlišení vyzařovaného výkonu plazmatu, řadí se bolometry do polí a umisťují se za aperturu. Taková detektorová pole snímají plazma z několika míst v poloidálním řezu a mohou zahrnovat i stovky detektorů, z nichž každý integruje signál z jistého zorného úhlu tzv. chordy. Vhodnou parametrizací lze s pomocí integrálních transformací (viz kapitola 2) získat profil vyzařovaného výkonu pozorované oblasti plazmatu a jeho časový vývoj, Této rekonstrukci se věnují tomografické metody.

## 1.4 Tokamak GOLEM

Tokamak GOLEM je malé zařízení sloužící převážně pro výukové účely a studentské projekty. Přestože centrální energie elektronů ($T_e < 80$ eV) neumožňuje vznik fúzních reakcí, je GOLEM unikátní svou ovladatelností, jež díky vzdálenému přístupu umožňuje komukoliv na světě připojenému k internetovému rozhraní vytvořit výboj dle jeho požadavků. GOLEM je nová verze původního moskevského tokamaku TM-1, který sloužil v letech 1977–2007 na Ústavu fyziky plazmatu pod jménem CASTOR. Uveden do chodu byl opět r. 2009 na FJFI, ČVUT pod názvem GOLEM. Základní parametry tokamaku a dosahované vlastnosti plazmatu jsou uvedeny v tabulce 1.1. Uspořádání cívek, čerpání a ohřevu je na obrázku 1.9.

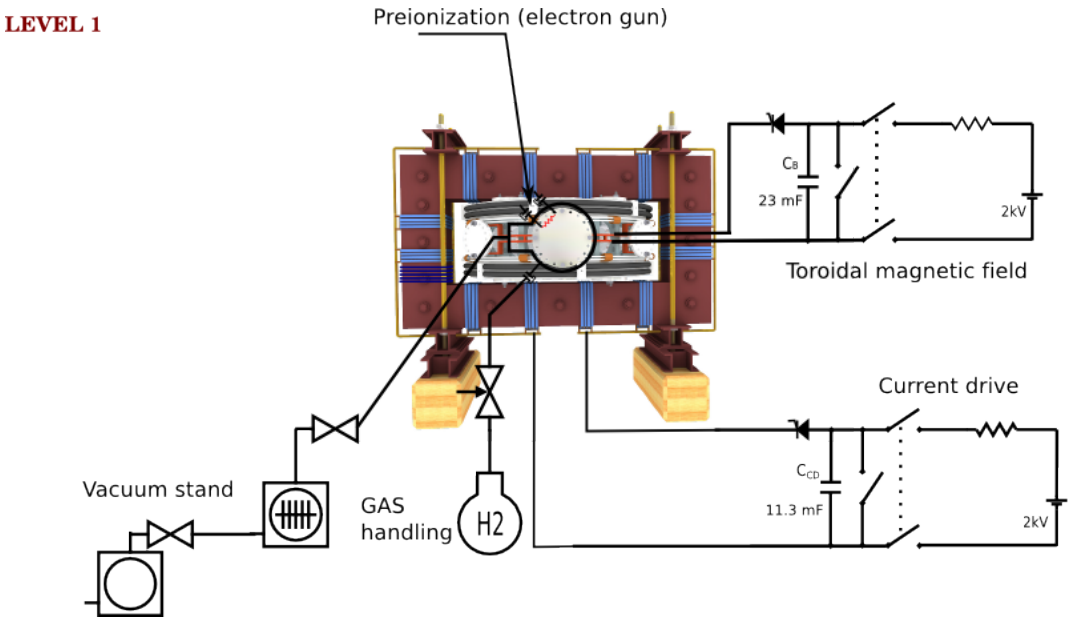
### 1.4.1 Diagnostika plazmatu na tokamaku GOLEM

Výstup klasických diagnostik standardního výboje je uveden na obrázku 1.10. Kromě klasických magnetických měření se používá i optického spektrometru pro zjištění složení plazmatu při výboji. Podobné geometrické uspořádání jako experiment, kterému se tato práce věnuje, mají rychlé kamery Casio EX-F1 umístěné na pozicích LFS a TOP. Data z fotoaparátů lze tomograficky zpracovat (viz [28] a [33]). V běžném případě je však v provozu jedna kamera, umístěná na bočním velké portu v tzv. jižní toroidální pozici. Při použití obou kamer by tedy bylo možné výsledky obou experimentů srovnat. Ke srovnání s naším experimentem, který má za úkol odhadnout

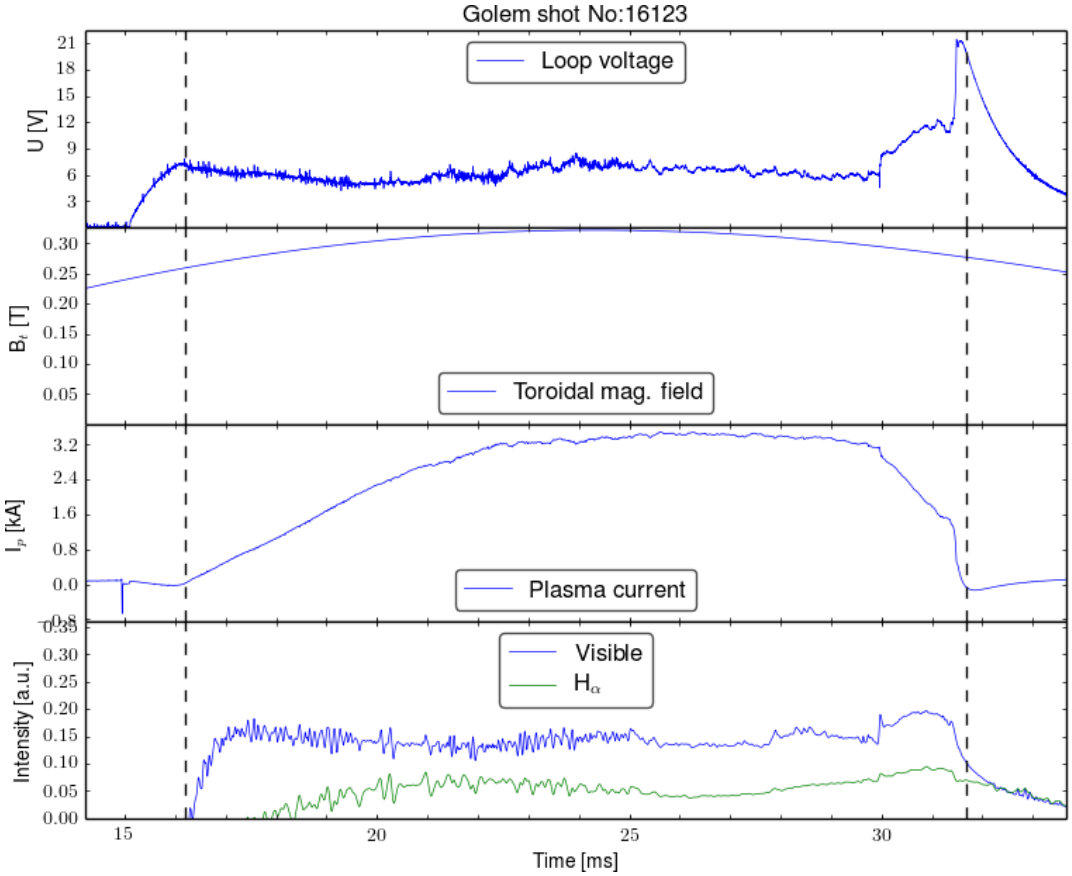
| | |
|---|---|
| Hlavní poloměr | $R_0 = 0{,}4$ m |
| Poloměr komory | $r_0 = 0{,}1$ m |
| Poloměr limiteru | $a = 0{,}085$ m |
| Toroidální magnetické pole $B_t$ | $B_t < 0{,}8$ T |
| Proud plazmatem $I_p$ | $I_p < 8$ kA |
| Dosahované délky výbojů $\tau$ | $< 30$ ms |
| Centrální elektronová teplota $T_e$ | $< 80$ eV |
| Tlak v nádobě | $P = 0{,}5$ - 30 mPa |
| Pracovní plyn | $H_2$, He |
| Kapacita kondenzátorů pro $B_t$ pole | $C_B = 81$ mF |
| Kapacita kondenzátorů pro toroidální el. pole $E_t$ | $C_{CD} = 11{,}3$ mF |

Tabulka 1.1: Základní parametry tokamaku GOLEM společně s běžně měřenými veličinami a jejich hodnotami

i polohu plazmatu, mohou posloužit i poloidálně umístěné Mirnovovy cívky pro snímání poloidálního magnetického pole, odkud lze získat polohu magnetického středu plazmatu a společně se znalostí proudu v ostatních cívkách i magnetické povrchy, z Grad-Shafranovovy rovnice. O záření plazmatu podává informaci i sada diod, jedna snímající viditelné záření a druhá, opatřena $H_\alpha$ filtrem, umožňuje společně s první určit intenzitu vodíkové čáry s vlnovou délkou $\lambda_{H_\alpha} = 656{,}28$ nm. Máme tak celou řadu informací, s nimiž lze instalovanou diagnostiku AXUV detektorů srovnat.




Obrázek 1.9: Schéma tokamaku GOLEM, převzato z [46]




Obrázek 1.10: Příklad standardních diagnostik na tokamaku GOLEM

# Kapitola 2

# Tomografie

Tomografie je obecně definována jako zobrazení, které umožňuje určit lokální charakter objektu jako jsou například emisivita či absorpce na základě nelokálních integrálních měření těchto veličin. Slovo tomografie je odvozeno od řeckého $\tau\acute{o}\mu o\zeta$ [to:mos] řez či část a $\gamma\rho\acute{a}\phi\omega$ [gra:fo] psát. Zkoumaným objektem tedy vedeme řezy a ze zpracovaného měření odhadujeme strukturu objektu. Tomografické metody zahrnují jak analytické tak numerické postupy, které se pro různé aplikace liší. To je způsobeno především možnostmi, jaké máme při měření dané veličiny. Od toho se poté odvíjí i způsob zpracování. Využívána je v lékařství, seismologii, při nedestruktivním testování materiálů, archeologii či pro studium plazmatu. Tomografii využívají většinou nedestruktivní metody, které mohou být aktivní a pasivní. Nás bude konkrétně zajímat její využití pro pasivní zkoumání chování plazmatu v tokamacích.

V případě fyziky plazmatu na tokamacích se sleduje především emisivita plazmatu a její prostorový a časový vývoj. Tomografie slouží jako nástroj zpracování signálu např. pro odhad polohy hlavního sloupce plazmatu, v kombinaci diagnostik jako SXR a bolometrů lze určit celkový vyzářený výkon, důležitý v rovnici pro energetickou rovnováhu. Díky rychlým polovodičovým detektorům lze zachytit i vývoj vyzařovacího profilu, jehož dekompozicí lze dokonce zjistit vývoj nestabilit. Rekonstrukci lze porovnat popřípadě doplnit daty z určení magnetického profilu a dalších diagnostik.

Uvažujme zjednodušení průhledného plazmatu, tj. zanedbatelnou absorpci záření v jeho objemu, kdy se lokální informace dostane na detektor nezkresleně. Některé metody zároveň používají zjednodušení na kruhový profil plazmatu, které se hodí pro starší tokamaky bez divertoru a možnosti tvarování profilu jakým je i tokamak GOLEM.

Jako detektory mohou být použity pole bolometrů, či polovodičových detektorů s filtry pro detekci krátkých vlnových délek jako SXR nebo bez filtrů pro detekci všech vlnových délek s omezeními konkrétního detektoru. Prostorové omezení detektorů lze realizovat štěrbinou (pinhole) společnou pro celé pole detektorů, nebo samostatnými kolimátory. Záměrem je, aby detektory integrovaly záření jen z určité oblasti poloidálního řezu a malého výseku v toroidálním směru omezeném geometrií úlohy, tj. velikostí apertury, diagnostického portu a vzdáleností detektorů od apertury a plazmatu. Idealizované, velmi úzké zorné pole detektoru nazýváme chorda. Reálný detektor nicméně zabírá jistý prostorový úhel a zároveň je ovlivněn aperturkou tak,

že detektor nemá rovnoměrné pokrytí, pro záření s dostatečně velkou vlnovou délkou se navíc uplatňují ohybové jevy a záleží tak na šířce apertury [32]. Tím je prakticky dáno prostorové rozlišení.

Na omezené oblasti $\Omega$ řezu ve 2D, pozorujeme skalární analytickou veličinu jíž přiřadíme funkci $g(x, y)$, která je mimo tuto oblast nulová (viz obr. 2.1). Pozorování probíhá obecně s jistým zorným úhlem, ale uvažujme nejprve zjednodušení, kdy pozorujeme po přímkách pod pozorovacím úhlem $\theta$. Integrujeme tedy podél přímek s parametrem $p_i$, udávající nejkratší signovanou vzdálenost pozorovací přímky od počátku a získáme tak funkce $f_i(\theta_i, p)$. K poloidálnímu úhlu $\theta$ tak máme projekci $f(p, \theta)$ emisivity $g(x, y)$. Ve 2D stanovujeme emisivitu plazmatu g(x,y) v poloidálním řezu z projekce $f(p, \theta)$ integrovaných hodnot podél chordy jednoho detektoru. Jako projekce často myslíme množinu měření, podél chord s jedním úhlem $\theta$. Výslednému řešení říkáme tomografická rekonstrukce nebo také inverze.

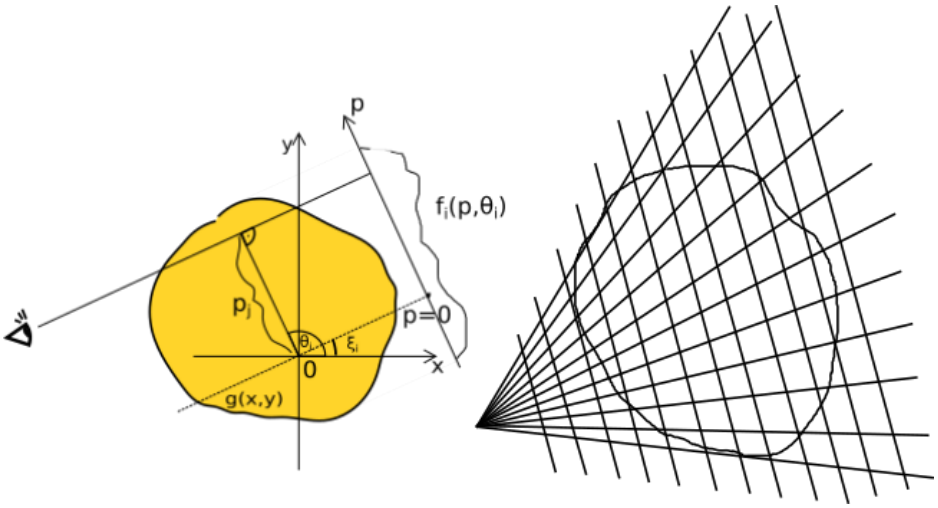
Nejjednodušší situaci má výpočetní tomografie (CT), kdy je k dispozici rovnoměrné měření. Na tokamacích jsme však odkázání jen na jednotky detektorů (2 na tokamaku GOLEM). Naštěstí z každého detektoru většinou pokryjeme celý poloidální řez. Kromě malého počtu pozorovacích míst jsou problémem tomografie plazmatu v tokamacích i šum signálu a nerovnoměrné pokrytí zorného pole.

Při tomografické rekonstrukci používané v medicíně je často k dispozici mnoho pravidelných měření a ty zároveň nejsou tak zatížené šumem. Lze u nich tedy použít transformační metody jako Radonovu transformaci 2.1.1 či filtrovanou zpětnou projekci 2.1.2. Při pozorování plazmatu na tokamacích je však k dispozici málo informací, což to vede na obtížně řešitelnou úlohu. Lze však využít vlastnosti plazmatu jako je kruhovost profilu v silném zjednodušení, znalosti magnetických silokřivek či požadavků na samotnou rekonstrukci, kde se uplatní především hladkost, nulovost mimo komoru či vztah k chybě měření a šumu. Transformační (analytické) metody tyto a priory předpoklady jen obtížně umí zohlednit, a proto se v našem případě nehodí. Kromě SXR a viditelného záření se tomografické metody využívají i např. pro klasické bolometry snímané termokamerami. Tato práce je však omezena na tomografii viditelného záření z AXUV detektorů.

## 2.1 Analytické metody

### 2.1.1 Radonova transformace

Obecný analytický vztah mezi projekcí $f$ a funkcí zdrojů $g$ popisuje tzv. Radonova transformace, pojmenovaná po rakouském matematikovi Johannu Radonovi, který k rovnici r. 1917 popsal inverzní formuli [35]. V obecně n-dimenzionálním prostoru $R^n$ zavedeme značení $\mathbf{r}$ jako průvodič bodu v prostoru, funkce pozorované veličiny $g(\mathbf{r})$ pak popisuje hodnotu např. emisivity z diskrétního bodu o poloze $\mathbf{r}$. Tuto veličinu zobrazíme na n-1 dimenzionální plochu pomocí pozorovacího (promítacího) vektoru $\mathbf{p}$. Např. pro 3D tedy projektujeme 3D funkci na plochu, zatímco pro 2D na přímku. Počátek souřadnic se volí uvnitř objektu. Dále označme velikost tohoto vektoru $p = |\mathbf{p}|$ a jednotkový vektor v jeho směru $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. $p$ tedy určuje obecně vzdálenost nadplo-




Obrázek 2.1: Schéma Radonovy transformace 2D s parametrizací $(p, \theta)$ vlevo, úplná a vějířová projekce vpravo

chy projekce od počátku souřadnic a jelikož $|\mathbf{n}| = 1$, platí pro body roviny projekce: $p = |r| \cdot cos(\alpha)$, kde $\alpha$ je úhel svíraný vektory $\mathbf{n}$ a $\mathbf{r}$. Radonova transformace (projekce) pozorované veličiny $g(\mathbf{r})$ je za uvedených podmínek definována jako:

$$\hat{R}\{g(\mathbf{r})\} \equiv f(\mathbf{p}) = \int g(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - p). \tag{2.1}$$

Integraci pouze přes konkrétní nadplochu zajišťuje násobení celé pozorované veličiny $g(\mathbf{r})$ v integrandu delta funkcí.

Ve 2D určuje vektor $\mathbf{p}$ pozorovací přímky a to vzdáleností $p$ přímky od počátku souřadnic a úhlem $\xi$ mezi pozorovací přímkou (kolmou na $\mathbf{p}$) a osou x. Někdy se za hlavní úhel bere úhel $\theta$ mezi $\mathbf{p}$ a osou x. Projekce $f(p, \theta)$ pak probíhá integrací $g(x, y)$ po přímkách s parametrizací $p = xsin\theta + ycos\theta$. Prostor daný $(p, \theta)$ nazýváme projekční a pokrytí tohoto prostoru pro tokamak GOLEM je na Obr. (2.3). V reálném měření, kdy je světlo dopadající na detektor omezeno štěrbinou nebo kolimátorem, nepozorujeme zdroj záření po přímkách ale pod jistým malým pozorovacím úhlem. Takové pozorovací paprsky nazýváme chordy. Ty se často definují osou pozorovacího úhlu. Základní předpoklad v následujícím je omezenost $g(x, y)$ v prostoru, takže hodnoty projekce $f(\mathbf{p})$ jsou mimo oblast objektu nulové. To jistě pro tokamak a pozorovanou veličinu, jakou je emisivita plazmatu ohraničeného vakuovou nádobou, platí. Zároveň hodnota $g(x, y)$ rychle směrem k okraji klesá, což pro tokamak bez divertoru také platí.

Ve 2D máme konfiguraci viz obrázek (2.1). Polohový vektor pak bude $\mathbf{x} = (x, y)$ a vektor určující přímky do nichž projektujeme $\mathbf{p} = (p, \theta)$. Někdy se také uvádí místo úhlu $\theta$ úhel $\xi$, kde $\theta = \xi + \pi/2$ a $\xi$ je úhel mezi pozorovací přímkou a osou x. Radonovu rovnici 2.1 lze pak přepsat jako

$$f(p, \theta) = \int_{R^2} g(x, y)\delta(xsin\theta + ycos\theta - p)dxdy, \tag{2.2}$$

Jedné dvojici $(p, \theta)$ pak odpovídá jedna hodnota funkce $f(p, \theta)$. Ponecháme-li $\theta$ fixní a měníme $p$, dostaneme množinu rovnoběžných projekcí $f_i(p_i, \theta)$ a pokud mluvíme o jedné projekci, vetšinou myslíme právě tuto množinu a $i$ značí číslo projekce, tedy úhel $\theta_i$. Pro množinu projekcí s různými směry se u Radonovy transformace vžil název sinogram, jelikož Fourierova transformace bodu (delta funkce) neležícího ve zvoleném počátku v prostoru $(p, \theta)$ je sinusoida. Pokud integrujeme v rámci jednoho úhlu $\theta_i$ po sérii rovnoběžných přímek (variujeme $p$), jedná se o tzv. paralelní nebo také úplnou projekci. Kromě toho existuje i vějířová projekce, kdy chordy vystupují z jednoho bodu (viz obr. 2.1).

Intuitivní rovnici 2.2 s chordami, které nemusí být obecně přímky zobecníme na variantu

$$f_i = \int K_i(x, y) g(x, y) dx dy, , \tag{2.3}$$

kde $K_i(x, y)$ je tzv. geometrická funkce zahrnující geometrii chordy a další vlivy. V rovnici 2.1 máme $K(x, y) = \delta(xsin\theta + ycos\theta - p)$, takže chordou je přímka. Problém 2.3 lze řešit dvěma odlišnými přístupy, a to algebraickou inverzí s následnou diskretizací, či opačně diskretizací a poté inverzí. Radon nalezl řešení první metodou. Hledáme obecně inverzní zobrazení 2.1 jako

$$g(\mathbf{r}) \equiv \hat{R}^{-1} f(\mathbf{p}, \theta). \tag{2.4}$$

Označíme $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{p}, \theta)$. K řešení $g(\mathbf{x})$ rovnice 2.1 použijeme Fourierovu transformaci, jejíž operátor definujeme jako

$$G(\boldsymbol{\theta}) = \hat{F} g(\mathbf{x}) = \int g(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \ \mathbf{x} \cdot \theta} d\mathbf{x}. \tag{2.5}$$

Obraz funkce budeme označovat velkým písmenem, stejně tak proměnnou ve frekvenční doméně. Pro inverzní transformaci

$$g(\mathbf{x}) = \hat{F}^{-1} G(\boldsymbol{\theta}) = \int G(\boldsymbol{\theta}) e^{2\pi \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}} d\boldsymbol{\theta}, \tag{2.6}$$

Dále se využije delta funkce, pro kterou platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \tag{2.7}$$

Abychom v integrálu získali Radonovu transformaci s potřebnou restrikcí, Fourierovu transformaci 2.5 rozšíříme o delta funkci $\delta(t - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta})$, tak abychom původní funkci nezměnili. V exponenciále proto bude $t$ místo $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}$:

$$G(\boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int g(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \ t} \delta(t - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} dt \tag{2.8}$$

Nyní pouze upravíme substitucí $t = p\theta$, kde $\theta = ||\boldsymbol{\theta}||$, abychom získali Radonovu transformaci 2.1 ve známé podobě. Zároveň zavedeme $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{n}$. Dostaneme tedy

$$G(\boldsymbol{\theta}) = \theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\ p\theta} \int g(\mathbf{x})\delta[\theta(p - \mathbf{x}\cdot\mathbf{n})]d\mathbf{x}dp. \tag{2.9}$$

Koeficient $\theta$ snadno odstraníme substitucí a druhý integrál představuje naši Radonovu transformaci (projekci). První integrál je jednorozměrnou Fourierovou transformací, kde $p$ představuje již zmíněnou vzdálenost projekční roviny od zvoleného počátku. V operátorové formě můžeme psát

$$\hat{F} = \hat{F}_1\hat{R} \tag{2.10}$$

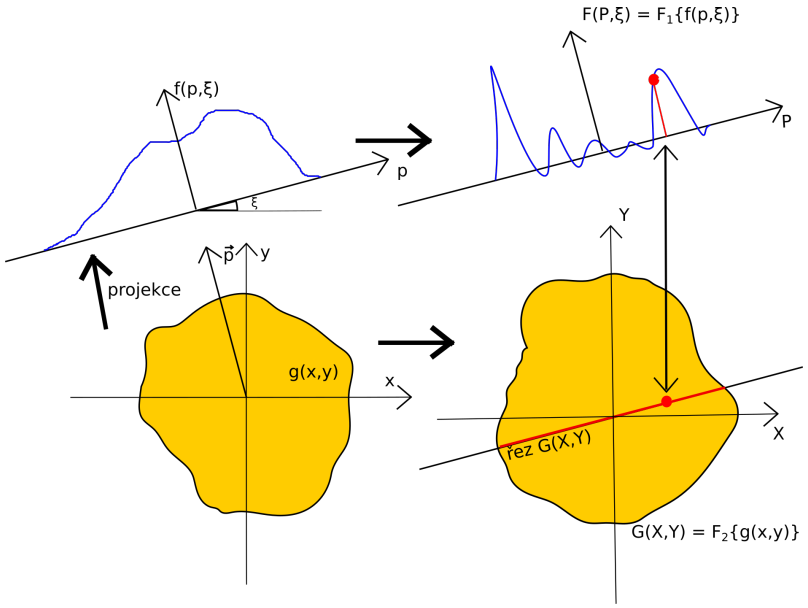
Tomuto vyjádření se také říká centrální řezový teorém (dále jen CST podle: central slice theorem) nebo také Fourierův řezový teorém. Ten ve 2D popisuje zajímavou ekvivalenci viz obrázek (2.2). Řez Fourierovy dvourozměrné transformace funkce $g(x, y)$ odpovídá jednorozměrné Fourierově transformaci z projekce (Radonovy transformace) na projekční přímku odpovídající řezu.

Přímou inverzí předchozí rovnice dostaneme

$$\hat{R}^{-1} = \hat{F}^{-1}\hat{F}_1. \tag{2.11}$$

Pro náš 2D problém má řešení tvar

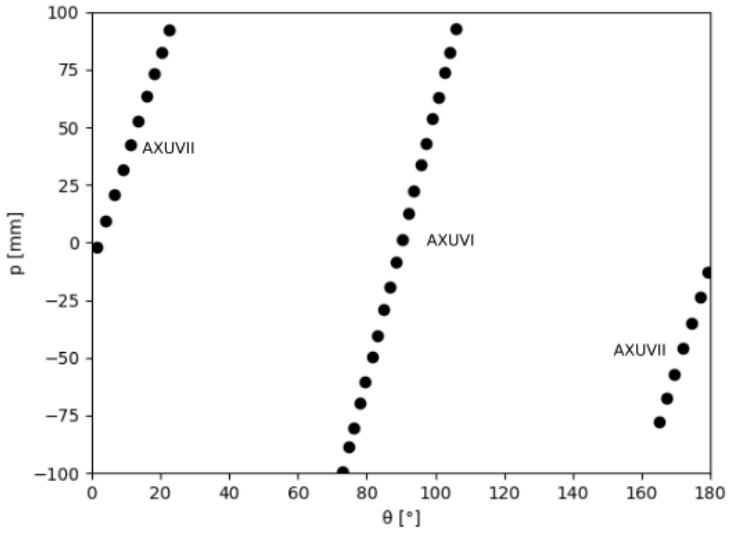
$$\hat{R}^{-1}f(p,\theta) = g(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\int_R \frac{\frac{\partial f(p,\theta)}{\partial p}}{xsin\theta + ycos\theta - p}dpd\theta. \tag{2.12}$$




Obrázek 2.2: Schéma - centrální řezový teorém ve 2D

Důkaz lze nalézt například v [13]. Přímé řešení inverze problému vede na integrál se singularitou a derivací, což je obtížně řešitelný problém. Patří mezi tzv. špatně

podmíněné úlohy. Obyčejná Radonova transformace se však pro účely tomografie tokamakového plazmatu nehodí, jelikož potřebuje znát ideálně všechny projekce nebo alespoň mnoho pravidelných. Tomu se lze přiblížit, pokud je možno získat projekce pro velký konečný počet projekčních úhlů $\theta$. Pro případ tokamakového plazmatu jsme však omezeni jen několika průzory (porty), kam lze instalovat detektory, a tudíž máme k dispozici jen malý počet projekcí - řádově jednotky, přičemž každá obsahuje řádově desítky hodnot odpovídající počtu senzorů. Samotná Fourierova transformace však nedosahuje dobrých výsledků ani za podmínek velkého množství projekcí. Neumí především pracovat s chybou měření.




Obrázek 2.3: Pokrytí projekčního prostoru ($p$, $\theta$) detektorů AXUVI a AXUVII tokamaku GOLEM bez omezení porty.

### 2.1.2 Filtrovaná zpětná projekce

Pro vylepšení lze využít vztahu Fourierovy a Radonovy transformace, tedy CST 2.11 a odvodit tzv. filtrovanou zpětnou projekci (FBP - Fast Back Projection). Označme nejprve dvourozměrnou Fourierovu transformaci funkce $g(x, y)$ jako $G(X, Y)$ a tedy $G(X, Y) = Fg(x, y)$, kde $X, Y$ jsou odpovídající souřadnice ve frekvenční doméně. Potom můžeme psát pro inverzi

$$g(x, y) = F^{-1}G(X, Y) \tag{2.13}$$

po aplikaci dvourozměrné inverzní Fourierovy transformace dostaneme

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY G(X, Y) exp(2\pi i \ (xX + yY)). \tag{2.14}$$

Nyní substituujeme X,Y za polární souřadnice $X = Pcos\phi$ a $Y = Psin\phi$. Označme ještě podle předchozího pozorovací přímky $p = xcos\phi + ysin\phi$. Po úpravě dostaneme

$$g(x,y) = \int_0^{\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} |P| G(Pcos\phi, Psin\phi) exp(2\pi i\ pP) dP. \tag{2.15}$$

Zde využijeme tvrzení CST a i z obrázku (2.2) vidíme,
že $G(Pcos\phi, Psin\phi) = F(P) = F\{f(p)\}$.

Dále si uvědomíme, že vnitřní integrál je vlastně zpětná Fourierova transformace v proměnné $P$ a označme jej jako $h(p,\phi)$. Máme tedy

$$h(p,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} |P| G(Pcos\phi, Psin\phi) exp(2\pi i\ pP) dP = F^{-1}|P|F(P) \tag{2.16}$$

Nakonec se vrátíme zpět k vyjádření $g(x,y)$, kde dosazujeme konkrétní přímky a nakonec integrujeme přes všechny pozorovací úhly

$$g(x,y) = \int_0^{\pi} h(p,\phi)|_{p=xcos\phi+ysin\phi} d\phi \tag{2.17}$$

respektive s pomocí delta funkce

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} h(p,\phi)\delta(p - xcos\phi - ysin\phi) d\phi dp. \tag{2.18}$$

Funkce $|P|$ odpovídá ve zpětné transformaci diferenciálnímu operátoru (viz obr. 2.12). Této funkci se říká Ramp filtr. Jedná se o frekvenční filtr a zesiluje vysoké frekvence v prostoru (vlnová čísla) a rozmazává malé frekvence. Pro dosažení lepších výsledků se funkce $|P|$ násobí ještě další funkcí, tu označíme $H(P)$. Lze ukázat, že v případě klasické zpětné projekce má hodnotu 1. Uveďme příklady nejběžnějších filtrů $\tilde{H}(P) = |P|H(P)$:

- Ramp : $H = 1$
- Cos : $H = cos(P/d)$
- Shep-Logan : $H = \frac{sin(P/d)}{P/d}$
- Han : $H = \frac{1+cos(P/d)}{2}$

kde parametr $d$ souvisí s Nyquistovou vzorkovací frekvencí a neměli bychom přesáhnout hodnotu 0,5 na pixel.

Shrneme tedy postup pro FBP pro konkrétní měření, kdy diskretizujeme integrály na sumu:

1. Diskrétní FT z projekce $f(p,\phi)$ (tj. naměřených a upravených hodnot)
2. Filtrace, tj. násobení $|P|H(P)$
3. Aplikace diskrétní inverzní transformace

4. Zpětná projekce - dosazení konkrétních přímek

5. Sumace přes všechny pozorovací úhly

FBP nachází v různých úpravách uplatnění především v medicínské tomografii, kdy snímaný objekt vykazuje relativně malé změny v čase a je možné provést mnoho rovnoměrných měření. Pro různé účely se tato metoda dá vylepšit na míru pro danou situaci (více v [18, 26, 13]). Pro tomografii vyzařování plazmatu tokamaků se však příliš nehodí, především z důvodu již zmiňovaného nedostatku pozorování. Zároveň je zde absence možnosti práce se šumem a lze zde jen těžko uplatnit další a priorní informace získané o plazmatu, ať již jde o předpoklady jako nulovost rekonstrukce mimo tokamak, hladkost či předpokládaný tvar magnetického pole nebo konkrétní výsledky z jiných diagnostik, ačkoliv filtrace může hrát jistou roli např. při vyhlazování viz 2.2.3.

Místo diskretizace až po inverzi se používají metody, které rozkládají $g(x, y)$ do soustavy funkcí. Tyto metody umožňují lepší využití malého množství dat pomocí a priorních informací a tzv. regularizovat problém. Poznatků pro klasickou zpětnou projekci a především konvoluční variantu lze využít i v případě řešení úlohy s pomocí přirozených bázových funkcí, které mohou mít např. tvar obdélníků přes poloidální řez viz [16, 17] a 2.2.3. Jedná se o diskrétní analogii k FBP.

## 2.2 Rozklad funkce g(x,y)

Zatímco transformační analytický přístup nejprve řeší vztah obrazu a vzoru analyticky a až poté zavádí diskretizaci vzhledem ke zpracování měření, druhý způsob vedoucí k řešení je rozklad obrazu na segmenty. To umožňuje zohlednit vztah obrazu k samotnému měření a také další a priory informace. V této metodě použijeme rovnici 2.3 pro $L$ pozorovaných průmětů $f_i$ a aproximujeme $g(x, y)$ jako součet tzv. bázových funkcí $b_j(x, y)$:

$$g(x, y) \approx \sum_j \tilde{g_j} b_j(x, y), \tag{2.19}$$

kde koeficienty $\tilde{g_j}$ udávají příspěvek jednotlivých bázových funkcí do $g(x, y)$. Funkce $g(x, y)$ bude v následujícím vyjadřovat tuto aproximaci, nikoliv teoretickou ideální variantu a budeme nadále psát rovnosti. 2.3 přejde do tvaru

$$f_i = T_{ij} \tilde{g_j}, \tag{2.20}$$

či maticově:

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{g}}. \tag{2.21}$$

Přitom matice $\mathbf{T}(x, y)$ zohledňuje geometrii měření a je mimo chordu nulová. Proto se jí také říká geometrická matice. Její vztah k bázovým funkcím je

$$T_{ij} = \int\int K_i(x, y) b_j(x, y) dx dy, \tag{2.22}$$

kde $K_i(x, y)$ je tzv. geometrický faktor. Bázové funkce rozdělujeme většinou na tři hlavní třídy a to globální (GBF - Global basis functions), lokální (LBF - Local basis functions) a přirozené (NBF - Natural Basis Functions). Klademe na ně několik požadavků jako je dostatečná lineární nezávislost či rychlost, efektivita a věrohodnost rekonstrukce.

Lineární nezávislost zaručuje ortogonalita bázových funkcí, která je vlastní pro globální a pixelové varianty, zatímco u přirozených se naopak ortogonalita vynucuje výpočtem. Existují však i výjimky např. překrývající se pixely (LBF). Věrohodnost rekonstrukce lze vyhodnotit porovnáním s dalšími diagnostikami a také pomocí tzv. fantomů, což jsou fiktivní testovací funkce, kde lze testovat metodu na správnost rekonstrukce, šum či rozpoznání detailů. Odchylka rekonstrukce od ideálního řešení pak udává teoretickou věrnost. Reálně se ještě připojí chyba měření.

Obecně lze říci, že nejlepších výsledků s dnešními možnostmi výpočetní techniky je dosahováno pomocí pixelových metod, a to především díky tomu, že u nich je nejjednodušší uplatnit dodatečné a priory informace pro omezení množiny řešení. Soustava problému je totiž v tomografii vyzařování plazmatu na tokamacích typicky nedourčená a zároveň se jedná o špatně položenou úlohu. Je tedy zapotřebí přidat dodatečné omezující rovnice. Takovou úpravu obecně nazýváme regularizací úlohy.

### 2.2.1 Globální bázové funkce

Globální bázové funkce jsou typické tím, že jsou ortogonální, nejsou omezené na konkrétní místo a zároveň nezohledňují samotné měření. Zároveň se díky jejich charakteru špatně zavádí a priory informace. Nejprve zavedeme polární souřadnice na $(r, \theta)$ v pozorovaném prostoru a $(p, \phi)$ v projekčním. Máme tedy $g(r, \theta)$ a $f(p, \phi)$. Rozklad zpravidla probíhá do Fourierovy řady v úhlu a do různých polynomů (Čebyševovy, Zernikovy) v případě Cormackovy metody [8, 9] nebo do Besselových funkcí v případě Fourier-Besselovy metody. Převádí tak integrální úlohu na soustavu nekonečně mnoha rovnic. V reálném případě se však omezujeme na konečný počet polynomů či funkcí v radiálním směru a goniometrických funkcí v úhlu, kdy vypustíme vyšší řády s menší váhou. Z definice už může být zřejmá slabina těchto metod. Algoritmu musíme totiž udat polohu středu plazmatu, což je sice jednodušší v případě tokamaků, kde můžeme považovat profil plazmatu za kruhový, ale velmi obtížné tam, kde probíhá tvarování plazmatu a je navíc omezeno divertorem, a rekonstrukce pak nemusí být věrohodná.

Cormackova metoda používá rozklad vzoru $g(r, \theta)$ i projekce $f(p, \phi)$ do Fourierovy řady v úhlu a polynomů v radiálním směru, tedy předpokládané vzdálenosti od středu plazmatu, Rozklad lze zkombinovat přímo ve Fourierově řadě, kdy její koeficienty závisí na $r$. Nekonečné Fourierovy řady ve tvaru s exponenciálami budou mít tedy tvar

$$f(p, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(p) e^{im\phi} \tag{2.23}$$

$$g(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(r) e^{im\theta}. \tag{2.24}$$

Koeficienty $f_m(p)$ získáme inverzí jako

$$f_m(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(p,\phi)e^{-im\phi} \tag{2.25}$$

Pro získání koeficientů $g_m(r)$ a tedy i řešení $g(r,\theta)$ potřebujeme znát vztah mezi $g_m(r)$ a $f_m(p)$. Odvození je možné nalézt v [8, 9]. Řešení zahrnuje Čebyševovy polynomy I. druhu ve tvaru $T_m(z) = cos(cos^{-1}(z)m)$

$$g_m(r) = -\frac{1}{\pi r}\int_r^{\infty} \frac{df_m(p)}{dp}\frac{T_m(p/r)}{\sqrt{p^2/r^2-1}}dp,. \tag{2.26}$$

Takové řešení je ovšem celkem nepraktické kvůli derivaci a integrálu. Vzdálenosti pro omezený případ s jistým maximálním poloměrem $r_{max}$, kterým tokamakové plazma beze sporu je, ovšem můžeme znormovat, a takto upravená $\tilde{g}(r,\phi)$ se pak bude nalézat na jednotkové oblasti. Funkce $f_m(p)$ pak můžeme aproximovat na intervalu (0,1) radiální částí Zernikových polynomů

$$R_m^k(r) = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l(m+2k-l)!r^{m+2k-2l}}{l!(m+k-l)!(k-l)!}. \tag{2.27}$$

Normované funkce $\tilde{g}_m(r)$ a $\tilde{f}_m(p)$ s použitím těchto polynomů budou mít následující tvary se společnými konstantními koeficienty $a_{mk}$

$$\tilde{f}_m(p) = 2\sqrt{1-p^2}\sum_{l=0}^{\infty} a_{mk}U_{m+2k}(p) \tag{2.28}$$

$$\tilde{g}_m(r) = \sum_{l=0}^{\infty}(m+2k+1)a_{mk}Z_m^k(r) \tag{2.29}$$

kde $U_{m+2k}(p)$ jsou Čebyševovy polynomy II. druhu. Mezi I. a II. druhem přitom platí vztah:

$$U_i(z) = \frac{1}{i+1}\frac{d}{dz}T_{i+1}(z). \tag{2.30}$$

Máme tedy

$$U_{m+2k}(p) = \frac{1}{m+2k+1}\frac{dT_{m+2k+1}(p)}{dp} = \frac{sin[(m+2k+1)cos^{-1}(p)]}{\sqrt{1-p^2}} \tag{2.31}$$

Řešení pak hledáme pro omezený počet měření a tedy i rovnic. Zároveň ořízneme nekonečnou řadu a zredukujeme tak počet aproximujících polynomů, které omezíme do jistého řádu. Podle poměru počtu koeficientů vzhledem k počtu měření můžeme mít soustavu přeurčenou, tedy více rovnic než neznámých koeficientů a $a_{mk}$ hledat pomocí metody nejmenších čtverců. Mějme tedy $Q$ nezávislých pohledů jednotlivých senzorů, které označíme indexem $s \in 1,..,Q$. Tomu odpovídají parametry měření $(p_s, \xi_s)$. Máme tedy k dispozici celkem $Q$ parametrů tj. aproximačních funkcí, kterými

$g(r,\theta)$ rozložíme na $M$ funkcí v azimutálním a $L$ funkcí v radiálním směru, přičemž $Q = M \cdot L$. Definujeme jednoznačně vztah parametru $s$ k parametrům $m \in 1,..,M$ a $l \in 1,..,L$ a rovnici 2.23 pak přepíšeme diskrétně pomocí $s$ jako

$$\tilde{f}(p) = \sum_{s=1}^{Q} a_s \cdot 2sin[(m+2k+1)cos^{-1}(p)] \tag{2.32}$$

Cormackova metoda trpí kromě potřeby udání dostatečně přesné polohy středu plazmatu i tzv. aliasingem a to jak v radiálním tak v azimutálním směru a jejich kombinacemi. Aliasing je obecně problém nastávající např. při diskretizaci funkce či spojitého signálu, kdy tyto aproximujeme pouze konečným počtem bodů. Vzorkovací frekvence poté určuje, jak jsme schopni zpětně funkci na daném intervalu rekonstruovat. To lze provést dokonale pokud vzorkovací frekvence je vyšší než Nyquistova frekvence odpovídající polovině maximální snímkovací frekvence (pokud není vzorkování pravidelné tj. existuje různá hustota bodů).

Aliasing vzhledem k omezení počtu pohledů $p$ vede na zajímavý efekt [31] a to, že se zvyšováním hustoty informace, tedy počtu měření v $p$, se zhorší homogenita rekonstrukce pomocí Cormackovy metody. Rovnoměrné pokrytí tokamaku zatím není technicky možné, a proto se využívají primárně jiné metody, zpravidla lokální bázové funkce, tedy pixelové metody. Kromě polynomů se využívají i Basselovy funkce pro aproximaci radiální složky, přičemž výsledné rekonstrukce mají lepší vlastnosti na okrajích. Nicméně stále je nutné dobré určení polohy středu profilu plazmatu. Výhodou je naopak rychlost rekonstrukce v případě, že jsme schopni polohu rychle odhadnout a byly dříve dobrým řešením pro tokamaky s kruhovým průřezem bez tvarování profilu, a tedy malým Shafranovovým posuvem [5, 12, 10].

### 2.2.2 Lokální bázové funkce (pixelové metody)

Pixelové metody rozdělují rovinu v poloidálním řezu na malé oblasti (pixely), které mohou mít podle účelu různý tvar, ať již čtverce, obdélníky či soustředné oblasti rozdělené v radiálním a azimutálním směru (viz obr. 2.4). Volba záleží na typu apriory informace a jakým způsobem úlohu řešíme. Většinou však volíme pro jednodušší zpracování čtvercovou variantu. Na rozdíl od Radonovy transformace nejprve úlohu diskretizujeme a až poté řešíme inverzní problém. Rovnici 2.20 přepíšeme do tvaru

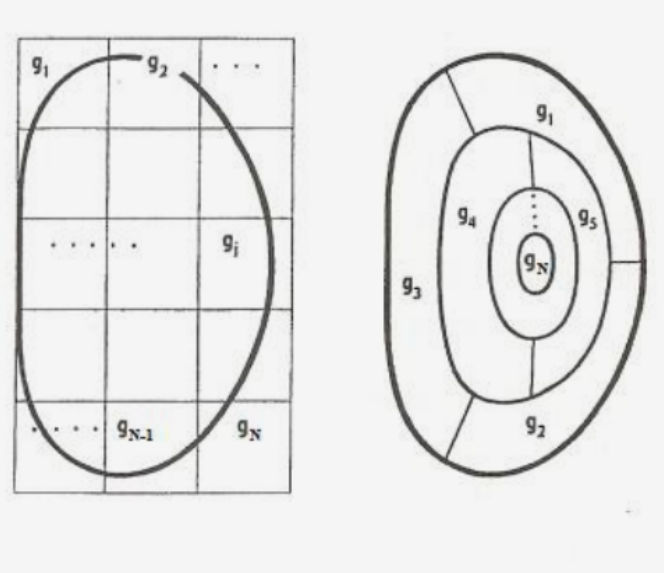
$$g(x,y) = \sum_{j}^{N} \tilde{g}_j b_j(x,y), \tag{2.33}$$

kde jsme konkretizovali počet bázových funkcí číslem $N$, které vyjadřuje počet pixelů a geometrická matice $\mathbf{T}$ má rozměry NxL, kde $L$ je počet měření. $T_{ij}$ tedy vyjadřuje příspěvek j-tého pixelu pro i-tou chordu a $g_j$ jeho hodnotu.

Projekce má tvar:

$$f_i = \sum_{j}^{N} T_{ij}\tilde{g}_j. \tag{2.34}$$

Máme tak soustavu lineárních rovnic, kterou lze řešit přímo dekompozičními metodami SVD resp. TSVD (singular value decomposition resp. truncated SVD). Tyto metody mají ovšem problém s charakterem úlohy, jelikož matice **T** má malá vlastní čísla a je poměrně řídká.




Obrázek 2.4: Možná varianta uspořádání pixelů. Převzato s úpravou z [31]).

Další možností jak soustavu řešit jsou iterační metody jako metoda Kaczmarzova používaná v algebraické rekonstrukční tomografii (ART). TSVD zavádí oproti SVD již menší míru regularizace díky parametru, jenž omezuje malé hodnoty. Jak Kaczmarzova metoda tak TSVD pro přeurčené soustavy odpovídají metodě nejmenších čtverců a v případě nedourčené soustavy řešení s minimalizací normy. Regularizace obecně pro náš typ úlohy významě zlepšuje výsledek, a bude jí proto věnována samostatná část, přičemž priorita je kladena na Tichonovovu regularizaci s použitím minimalizace Fisherovy informace, která byla přejata z tokamaku COMPASS a upravena pro potřeby tokamaku GOLEM.

### 2.2.3 Přirozené bázové funkce (Natural basis functions)

Kromě rozdělení poloidálního řezu na malé pixely, které jsou mimo chordu nulové, lze "ušít"bázové funkce na míru přímo jednotlivým chordám, zpravidla jedné chordě přiřadit jednu funkci, a zohlednit tak proces měření. Proto se jim říká přirozené (dále jen NBF). Některá literatura také uvádí výraz přirozené pixely. Byly patrně podrobněji popsány v [29, 3] a případem využití při pozorování tokamakového plazmatu se zabýval např. L. C. Ingesson viz [16, 17]. Lze je popsat podobně jako pixelové metody 2.33 a často volí $N = L$. Konturové grafy pro tokamak JET jsou na obrázku 2.5, přitom je zde vidět i srovnání s pixelovými metodami (g), (h).

Rozlišujeme v základě tři typy NBF a to:

1. standardní,
2. zobecněné,
3. ortonormální.

Standardní varianta za $b_i(x, y)$ jednoduše bere přímo geometrický faktor $K_i(x, y)$. Při zavedení diskretizace, kdy $b_j(x, y)$, $K_i(x, y)$ a $g(x, y)$ rozložíme do pravidelné mřížky o $S$ pixelech, přejdou tyto na matice $\mathbf{B}$, $\mathbf{K}$ a vektor $\mathbf{g}$. Soustava tak přejde na tvar

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{K}\tilde{\mathbf{g}} \tag{2.35}$$

a

$$\mathbf{g} \approx \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{g}}. \tag{2.36}$$

Pro $\mathbf{B} = \mathbf{K}$ přejde matice $\mathbf{T}$ do tvaru $\mathbf{K}\mathbf{K}^{\mathbf{T}}$ a

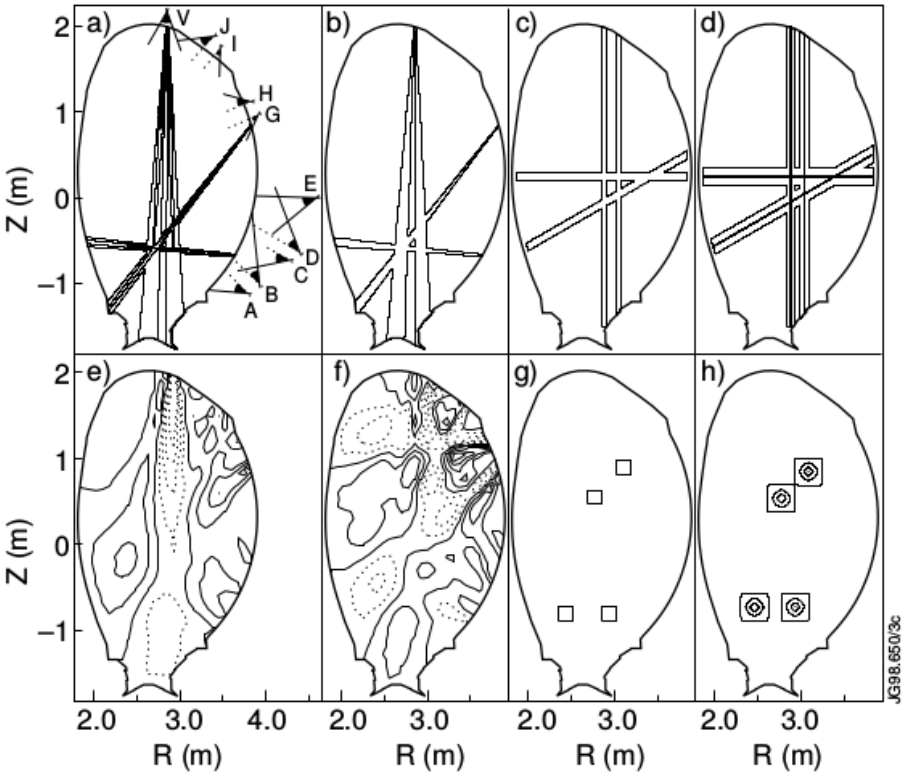
$$\mathbf{g} \approx \mathbf{K}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{g}}. \tag{2.37}$$

Pokud se díváme na 2.3 jako na projekci, pak se na vztahy 2.19 resp. 2.36 lze dívat jako na zpětnou projekci. Vztahy 2.19 a 2.37 jsou pak velmi podobné diskrétní verzi spojité rovnice 2.18 pro filtrovanou zpětnou projekci [17].

Matice $\mathbf{T}$, která přejde na $\mathbf{K}\mathbf{K}^{\mathbf{T}}$ je někdy také označována jako projekční matice zpětné projekce (projection-backprojection matrix). V podstatě se jedná o rozšíření klasické zpětné projekce, kde se uvažuje místo pozorování po přímkách na variantu s pozorovacím pruhem konečné šířky.

Kromě standardních bázových funkcí lze v případě nerovnoměrného pokrytí využít virtuální geometrii, která již nemusí přesně odpovídat pozorování, zavedením nové matice geometrie $\mathbf{K}'$. Takovým bázovým funkcím pak říkáme zobecněné a mohou mít stejně jako standardní funkce konstantní $\mathbf{B} = \mathbf{K}'$ nebo např. trojúhelníkový tvar. Poslední variantou jsou ortonormální funkce, které lze získat pomocí dekompozice matice $\mathbf{K}$ metodou SVD (odvození lze nalézt v [17]).

NBF vykazují poměrně dobré výsledky, nicméně opět neumožňuje přímou regularizaci. Částečnou provázanost řešení lze zajistit vzájemně se částečně překrývajícími funkcemi (viz obr. 2.5 (d)), což se používá i u pixelových metod viz (h) na stejném obrázku, kde jsou pyramidové bázové funkce s částečným překrytím. Rekonstrukce pomocí NBF sice nedosahuje tak dobrých výsledků jako pixelové metody, ale lze jich využít alespoň pro srovnání, jelikož nepoužívají a priori informace, které mohou do zanést do rekonstrukce artefakty vzniklé použitím regularizační metody.




Obrázek 2.5: Konturové grafy pro různé bázové funkce s ohledem na vnitřní stěnu tokamaku JET. (a) - standardní NBF při $\mathbf{B} = \mathbf{K}$; (b) - $B_{ij} = 1$ pokud $K_{ij} > 0$ a nulové pro $K_{ij} = 0$; (c) zobecněné NBF s pravidelnými pruhy o konstantní šířce; (d) - zobecněné NBF s pravidelnými pruhy o konstantní šířce, trojúhelníkovým profilem a s překrytím; (e) a (f) - ortonormální NBF; (g) - čtvercové pixely lokálních bázových funkcí; (h) - čtvercové pixely lokálních bázových funkcí s pyramidovým profilem (převzato z [17]).

## 2.3 Tichonovova regularizace

V této kapitole budeme řešit tomografický problém ve tvaru 2.33 pro pixelové metody a tedy

$$g_i = \sum_{j=1}^{L} M_{ji} f_i. \tag{2.38}$$

Jelikož počet detektorů $L$ není většinou stejný jako počet pixelů $N$, a tedy matice $\mathbf{T}$ není čtvercová, nelze matici $\mathbf{M}$ získat přímou inverzí $\mathbf{T}$. Pokud je soustava přeurčená tj. $L > N$ lze hledat řešení pomocí metody nejmenších čtverců. V případě tokamakového plazmatu však máme většinou nedourčenou soustavu rovnic, tedy méně rovnic než neznámých. Měření je zároveň zatíženo šumem a chybou měření. Pro malé množství rovnic můžeme najít nekonečně mnoho řešení. Abychom nefitovali šum musíme nějakým způsobem tuto množinu omezit. Počet pixelů volíme kvůli rozeznání detailů vyšší, nicméně musíme si dát pozor na vznik artefaktů a se zvyšujícím se počtem pixelů také roste doba výpočtu. Pokud $\mathbf{Tg}$ je zpětná projekce řešení, pak kvalitu rekonstrukce lze vzít například jako součet chyb rekonstrukce. Označme kvadrát normy jako $\Lambda$

$$\Lambda = ||\mathbf{f} - \mathbf{Tg}||^2, \tag{2.39}$$

kde $||.||$ je eukleidovská norma. Pokud bychom hledali minimum této normy, najdeme vždy triviální řešení $\Lambda = 0$, kdy by rekonstrukce procházela všemi body včetně šumu a docházelo by tzv. overfittingu. Množství řešení můžeme omezit informací o šumu $\epsilon$. Místo 2.39 zavedeme podmínku definovanou funkcionálem

$$H(\mathbf{g}) \equiv ||\mathbf{f} - \mathbf{Tg}||^2 - ||\epsilon||^2, \tag{2.40}$$

kde $H(g) \leq 0$. Úlohu s touto podmínkou pak řešíme pomocí lagrangeových multiplikátorů s Lagrangeovou funkcí

$$\Lambda = ||\mathbf{f} - \mathbf{Tg}||^2 + \lambda H(\mathbf{g}). \tag{2.41}$$

Hledáme tedy extrém pomocí derivací

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{g_i}} = 0, \quad \forall i \in \hat{N}. \tag{2.42}$$

A dále převedeme na soustavu rovnic pro $\mathbf{g}$, tedy $\mathbf{Ag} = \mathbf{b}$.

$$(\mathbf{T^T T} + \lambda h)\mathbf{g} = \mathbf{T^T f}, \tag{2.43}$$

kde $H(\mathbf{g}) = ||h\mathbf{g}||^2$.

Hledání parametru $\lambda$ tak, že řešení omezujeme pouze šumem se někdy nazývá discrepancy principle [18].

Kvalitu fitu však místo chyb většinou hodnotíme pomocí Pearsonova rozdělení $\chi^2$ s $L$ stupni volnosti, které má v našem případě tvar:

$$\chi^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \left( \frac{f_i - \sum_{j=1}^{N} T_{ij} g_j}{\sigma_i} \right)^2, \tag{2.44}$$

kde $\sigma_i$ jsou směrodatné odchylky (předpokládané chyby měření). 2.41 pak většinou píšeme ve tvaru

$$\Lambda = \frac{1}{2}\chi^2 + \lambda H(\mathbf{g}) \tag{2.45}$$

Za $H(\mathbf{g})$ lze obecně dosadit sadu $P$ podmínek omezující řešení a místo 2.45 psát Lagrangeovu funkci jako

$$\Lambda = \frac{1}{2}\chi^2 + \sum_{k=1}^{P} \lambda_k H_k(\mathbf{g}). \tag{2.46}$$

Regularizační funkcionál $H(\mathbf{g})$ lze obecně vybrat podle našich očekávání vzhledem k řešení a nemusí být ani lineární. Lineární varianta takto obecné úlohy se nazývá Tichonovova regularizace. Označme nyní $H(\mathbf{g}) = ||\mathbf{\Gamma} g||^2$ s Tichonovovou maticí $\mathbf{\Gamma}$. Odvodíme rovnici 2.43 pro tuto variantu. Zavedeme $\tilde{T}_{ij} = f_i/\sigma_i$ a $\tilde{f}_i = f_i/\sigma_i$ Pak omezujeme následující funkcionál

$$\tilde{\Lambda} = ||\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{g}||^2 + \lambda||\mathbf{\Gamma}\mathbf{g}||^2. \tag{2.47}$$

Dostaneme

$$(\tilde{\mathbf{T}}^T\tilde{\mathbf{T}} + \lambda\mathbf{\Gamma}^\mathbf{T}\mathbf{\Gamma})\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{T}}^T\tilde{\mathbf{f}}, \tag{2.48}$$

kde $\lambda$ regularizační parametr. Derivaci položíme rovnu nule a přepíšeme na tvar $\mathbf{Ag} = \mathbf{b}$ pro vektor $\mathbf{g}$. Velikost $\lambda$ určuje, jak velký bude příspěvek regularizace oproti řešení. Pro velká $\lambda$ tedy bude dominovat vliv hodnotícího funkcionálu, zatímco pro malá $\lambda$ naopak dominuje řešení. Výběr parametru $\lambda$ je diskutován např. v [27].

### 2.3.1 Lineární regularizace

V tomto případě mají hodnotící funkce tvar $H(g) = ||g^{(k)}||^2$, kde $(k)$ značí řád derivace. Používaný je nultý řád a první dvě derivace a jejich kombinace. Obecně by g(x,y) byla funkce dvou proměnných, a museli bychom pro hodnotící funkcionál psát

$$\begin{aligned} H(g) = \int\int \lambda_0 g^2 + \lambda_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \lambda_{xx} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}\right)^2 + \\ +2\lambda_{xy} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right)^2 + \lambda_{yy} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}\right)^2 dxdy, \end{aligned} \tag{2.49}$$

kde konstantní člen reprezentuje normu, první derivace upřednostňují nízké gradienty, tedy ploché řešení a druhé derivace zvýhodňuje hladká řešení. Různou kombinací koeficientů $\lambda$ lze tedy dát preferenci konkrétní formě lineární regularizace. Nás ovšem bude zajímat diskrétní řešení, takže místo parciálních derivací musíme zavést diferenci. Označme obecnou matici derivace podle proměnné $x$ jako $\mathbf{D_x}$ a obdobně $\mathbf{D_y}$ pro $y$. Podobně pro II. derivace zavedeme diskrétní Laplaceův operátor s maticemi druhých diferencí

$$\mathbf{D_\Delta} = \mathbf{D_{xx}^T D_{xx}} + \mathbf{2D_{xy}^T D_{xy}} + \mathbf{D_{yy}^T D_{yy}}. \tag{2.50}$$

2.49 pak přepíšeme do diskrétního tvaru jako

$$\lambda_R \mathbf{H} = \lambda_0 \mathbf{I} + \lambda_x \mathbf{D_x} + \lambda_y \mathbf{D_y} + \lambda_{xx} \mathbf{D_{xx}}^T \mathbf{D_{xx}} + 2\lambda_{xy} \mathbf{D_{xy}^T D_{xy}} + \lambda_{yy} \mathbf{D_{yy}^T}, \tag{2.51}$$

kde $\mathbf{H}$ tedy reprezentuje obecnou derivační matici, $\mathbf{I}$ je pro názornost jednotková matice a $\lambda_R$ označuje souhrnný regularizační parametr, který definuje příspěvky 0.,I. a II. řádu derivací.

Po dosazení $\mathbf{D_\Delta}$ pak

$$\lambda_R \mathbf{H} = \lambda_0 \mathbf{I} + \lambda_x \mathbf{D_x} + \lambda_y \mathbf{D_y} + \lambda_H \mathbf{D_\Delta}, \tag{2.52}$$

kde koeficient $\lambda_H$ jasně definuje příspěvky jednotlivých členů druhých derivací, pokud je například preferován nějaký směr. Nyní dosadíme tuto derivační matici do funkcionálu 2.47 za $||\mathbf{\Gamma g}||^2$ ve formě $\mathbf{g}^T \mathbf{H g}$ a dostaneme tedy

$$\tilde{\Lambda} = \frac{1}{2} ||\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{g}||^2 + \lambda_R \mathbf{g}^T \mathbf{H g}. \tag{2.53}$$

Řešení minima funkcionálu $\tilde{\Lambda}$ opět hledáme položením prvních derivací rovno nule ve tvaru $\mathbf{Ag} = \mathbf{b}$. Po několika úpravách dostaneme

$$(\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \mathbf{H}) \mathbf{g} = \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{f}}, . \tag{2.54}$$

### 2.3.2 Minimalizace Fisherovy informace

Fisherova informace hraje významnou roli v teorii odhadu (estimation theory), je definována pro hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ jako

$$I_F = E\left\{ \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 \right\} = \int \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 f(x) dx \tag{2.55}$$

Odvoďme Fisherovu informaci pro rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, hustota pravděpodobnosti v jednorozměrném případě má tvar

$$f(x) = A exp\left( -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right), \tag{2.56}$$

kde $A$ je konstanta. Dosazením rozdělení do 2.55 dostaneme

$$\int \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 f(x) dx = \int \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} f(x) dx = 1/\sigma^2, \tag{2.57}$$

kde jsme využili vlastnosti

$$E\{(x-\mu)^2\} = \int (x-\mu)^2 f(x) dx = \sigma^2. \tag{2.58}$$

Lze ukázat, že pro Fisherovu informaci obecně platí

Cramer-Raova nerovnost

$$\sigma^2 \geq \frac{1}{I_F}, \tag{2.59}$$

což klade limit na naše řešení a sice ten, že vybíráme řešení s maximálním rozptylem. Zde je souvislost s entropií, jelikož se zvyšujícím se rozptylem se zvyšuje i neuspořádanost systému. Lze ukázat, že princip minimalizace Fisherovy informace je nadřazený principu maximální entropie [11]. Zároveň zde Frieden ukázal, že se jedná o nejhladší možné řešení. V důkazu se hledá minimum Fisherovy informace $I_F = min$, kde za lagrangián se bere právě Fisherova informace $\mathcal{L} \equiv I_F = (f')^2/f$

K odvození nerovnosti 2.59 použijeme normální rozdělení a Schwarzovy nerovnosti:

$$|E\{(UV)\}|^2 \leq E\{(U)^2\} \cdot E\{(V)^2\}, \tag{2.60}$$

kde $U = x$ a $V = f'/f$. Dosazením dostaneme

$$\left| \int x \frac{f'}{f} f dx \right|^2 \leq \int \left( \frac{f'}{f} \right)^2 f dx \cdot \int x^2 f dx, \tag{2.61}$$

odkud již získáme naši nerovnost 2.59.

Normální rovnici 2.53 přepíšeme s Fisherovou informací jako

$$\tilde{\Lambda}_F = \frac{1}{2}||\tilde{f} - \tilde{T}g||^2 + \lambda I_F, \tag{2.62}$$

Nyní bychom chtěli opět hledat řešení ve tvaru $\mathbf{Ag} = \mathbf{b}$. Nejprve musíme diskretizovat $I_F$. Pro náš 2D případ máme

$$I_F = \partial \mathbf{g^T W} \partial \mathbf{g} = \mathbf{g^T}(\mathbf{D_x^T W D_x} + \mathbf{D_y^T W D_y})\mathbf{g}, \tag{2.63}$$

kde $\mathbf{D_x}, \mathbf{D_y}$ jsou maticové operátory příslušných prvních derivací a pro váhovou matici $\mathbf{W}$ platí $W_{ij} = \delta_{ij}/g_i, \forall i \in \hat{N}$.

Dosadíme do normální rovnice 2.62 Fisherovu informaci za hodnotící funkcionál

$$\tilde{\Lambda}_F = \frac{1}{2}||\tilde{f} - \tilde{T}g||^2 + \lambda \partial \mathbf{g^T W} \partial \mathbf{g}, \tag{2.64}$$

Kvůli váhové matici není $I_F$ lineární, a nelze tedy jednoduše soustavu převést na standardní tvar. Tato situace se řeší iterativně, kdy na začátku volíme $\mathbf{W^{(0)}} = \mathbf{1}$ nebo podle očekávaného tvaru řešení, a poté již můžeme převést na známou soustavu. V kroku pro $\mathbf{g^{(n+1)}}$ používáme dopočtenou váhovou matici $\mathbf{W^{(n)}}$ z kroku předchozího. Horním indexem v závorkách budeme značit iteraci. S konstantní $\mathbf{W}$ tedy můžeme řešit úlohu standardně přirovnáním všech derivací Lagrangeovy funkce k nule

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{\Lambda}}}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{0} \tag{2.65}$$

a dostaneme

$$(\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_F(\mathbf{D_x^T W D_x} + \mathbf{D_y^T W D_y}))\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{T}}^{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{f}}, \tag{2.66}$$

kde $\lambda_F = 2\lambda$.

Pro iteraci $(n+1)$ pak bude mít předchozí rovnice tvar

$$(\tilde{\mathbf{T}}^T\tilde{\mathbf{T}} + \lambda_F(\mathbf{D_x^T W^{(n)} D_x} + \mathbf{D_y^T W^{(n)} D_y}))\mathbf{g^{(n+1)}} = \tilde{\mathbf{T}}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{f}} \tag{2.67}$$

a vyjádříme $g^{(n+1)}$ jako

$$g^{(n+1)} = (\tilde{\mathbf{T}}^T\tilde{\mathbf{T}} + \lambda_F(\mathbf{D_x^T W^{(n)} D_x} + \mathbf{D_y^T W^{(n)} D_y}))^{-1}\tilde{\mathbf{T}}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{f}}. \tag{2.68}$$

Ukazuje se, že řešení rychle konverguje již po prvních několika iteracích, což lze zjistit blízkostí $\mathbf{g^{(n+1)}}$ a $\mathbf{g^{(n)}}$.

Dále lze zavést předpoklad, že rekonstrukce bude hladší podél magnetických siločar než ve směru kolmém na ně a řešení hledat jako

$$g^{(n+1)} = (\tilde{\mathbf{T}}^T\tilde{\mathbf{T}} + \lambda_{FMag}(\eta\mathbf{D_\parallel^T W^{(n)} D_\parallel} + \frac{\mathbf{1}}{\eta}\mathbf{D_\perp^T W^{(n)} D_\perp}))^{-1}\tilde{\mathbf{T}}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{f}}, \tag{2.69}$$

kde derivační matice $\mathbf{D}_\parallel$ resp. $\mathbf{D}_\perp$ odpovídají derivacím podél resp. kolmo na magnetické siločáry a s rostoucím parametrem $\eta$ roste shlazování podél siločar. Uvedený parametr $\eta$ odpovídá parametru používanému v algoritmu pro zpracování dat.

### 2.3.3 Metoda maximální entropie

Hodnotící funkcionál při hledání profilu emisivity, můžeme zvolit i na základě toho, že od rozložení emisivity očekáváme maximální informační entropii. To je celkem reálný požadavek, jelikož by se tak mělo chovat nejpřirozenější řešení. Při tomto pohledu [32, 15, 40] uvažujeme emisivitu jednotlivých pixelů jako statisticky nezávislou náhodnou veličinu, kdy se emisivita $g_i$ i-tého pixelu rozloží do $n_i$ kvant s hodnotou $\epsilon$ jako

$$g_i = n_i\epsilon \tag{2.70}$$

Označme $n$ celkový počet kvant při $N$ pixelech. Pak máme

$$n = \sum_{i=1}^{N} n_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{g_i}{\epsilon} = \frac{I_0}{\epsilon}, \tag{2.71}$$

kde $I_0$ je celková emisivita pro snímek, čili konstanta. Pravděpodobnost, že i-tý pixel bude mít právě $n_i$ kvant je

$$p_i = \frac{n_i}{n} \tag{2.72}$$

Rozložení emisivity do $N$ pixelů bude mít multinomické rozdělení a počet možností uspořádání (multiplicita, či počet permutací) $n$ kvant bude

$$W = \frac{n!}{\Pi_{i=1}^{N} n_i!}. \tag{2.73}$$

Místo maximalizace $W$ lze maximalizovat libovolnou rostoucí funkci $W$. Pokud vezmeme za tuto funkci

$$\frac{1}{n}\ln W, \tag{2.74}$$

lze přechodem $n \to \infty$, tedy $\epsilon \ll 1$ a s využitím Stirlingovy formule převést původní maximalizaci $W$ na maximalizaci entropie $S$

$$S = -\sum_{i=1}^{N} p_i ln p_i \approx -\sum_{i=1}^{N} g_i ln g_i. \tag{2.75}$$

Označíme-li nový regularizační funkcionál pro maximum entropie

$$\Omega_{ME} = -\sum_{i=1}^{N} g_i ln g_i, \tag{2.76}$$

můžeme jej dosadit jako hodnotící funkcionál do 2.45 s lagrangeovým multiplikátorem $\lambda_{ME}$, a poté maximalizujeme

$$\Lambda_{ME} = \frac{1}{2}\chi^2 + \lambda_{ME}\Omega_{ME}. \tag{2.77}$$

Jiné odvození s pomocí tzv. Bayesovské maximální entropie nabízí např. [2]. Nevýhodou přístupu s maximem entropie [2] je právě nezávislost pixelů, která je již deklarována od počátku. Pro vyzařovací profil plazmatu jsou ale pixely přirozeně silně korelovány. Využití principu maximální entropie tak může vést k zašuměné nespolehlivé rekonstrukci. Ačkoliv existují postupy, jak dodat podmínku lokální hladkosti, přináší to významné zpomalení výpočtu rekonstrukce, která však také nemusí odpovídat realitě.

# Kapitola 3

# AXUV na tokamku GOLEM

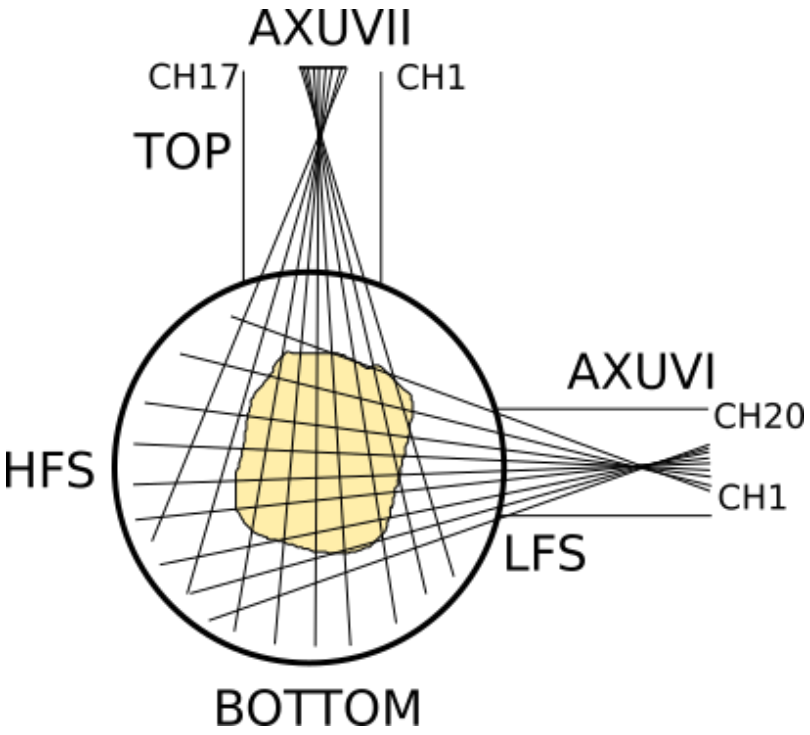
AXUV detektory viditelného a SXR záření byly již instalovány na původním tokamaku CASTOR (viz [10]) a technická dokumentace [44]. Tato práce zároveň navazuje na bakalářské práci na stejné téma, kdy byl tokamak GOLEM osazen přírubou s označením I. s testovacím detektorem AXUV0 na bočním portu (viz [25]), kdy byl pro zesílení byl použit původní zesilovač z tokamaku CASTOR. Cílem této práce je zavedení i druhého detektoru do systému diagnostik tokamaku GOLEM. K tomu bylo zapotřebí těchto kroků:

1. navrhnout a otestovat nové zesilovače pro oba detektory,
2. revidovat I. detektor a zkompletovat detektor na přírubě č. II.,
3. provést základní otestování zesilovačů společně s detektory mimo tokamak a v systému tokamaku,
4. provést prostorovou kalibraci obou detektorů,
5. osazení detektorů a jejich zavedení do systému.

## 3.1 Uspořádání experimentu

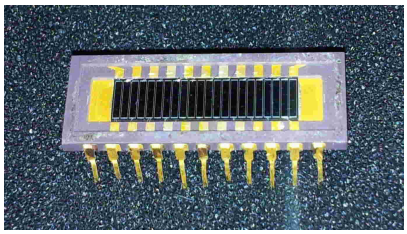
Detektor AXUVI je umístěn na boční přírubě a AXUVII na horní. Oba detektory ve stejné toroidálně jihovýchodní pozici. Schéma umístění detektorů na tokamaku je společně s kanály detektorů na obrázku 3.1. Vzdálenosti štěrbin detektorů od osy komory jsou: $L_1 = 342{,}4$ mm a $L_2 = 264{,}7$ mm. Štěrbiny mají rozměry pro AXUVI 0,2 x 4 mm a 0,196 x 4 mm pro AXUVII.

Parametry čipu detektoru AXUV20ELG jsou v tabulce 3.1 a samotné pole fotodiod je na obrázku 3.2. Detektory jsou umístěny do patice v silikonových podložkách a zabudované do schránek (viz obr. 3.3). Schránka detektoru AXUVII je na obrázku 3.4. Detektor je umístěn na silikonové podložce. Vzdálenost podložky a spodní části schránky vymezují dva silikonové distančníky se závitem M2. Detektor tak lze polohovat pomocí šroubů M2 o délce cca 20 mm a maticí ze spodní strany schránky. To umožňuje měnit vzdálenost detektoru od štěrbiny a popřípadě i pozorovací úhel.




Obrázek 3.1: Umístění detektorů v poloidálním řezu a pohledy jednotlivých kanálů detektorů.

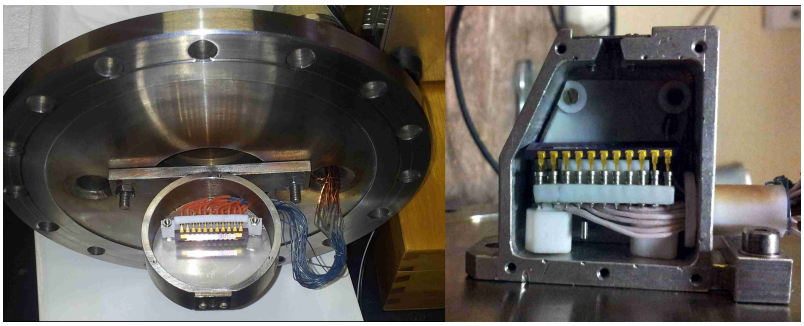
Každá manipulace vyžaduje novou prostorovou kalibraci. Detektor AXUVII byl obnoven do pracovního stavu. Nevýhoda kompletu detektorů je v jejich odlišných výstupních konektorech pro signál. Zatímco AXUVI je vybaven klasickým D-sub konektorem o 25 pinech, AXUVII má na nevakuové straně kruhový 19pinový konektor MS3476L14-19S, který bylo nutné krimpovat. Zesilovače tedy nelze univerzálně použít, pokud nechceme prodlužovat cestu signálu další redukcí a zároveň nemá druhý konektor ani potřebný počet pinů, tedy 20 pro signál a jeden pro zem detektorů. Starý a zrekonstruovaný detektor AXUVII je na obrázku 3.5



Obrázek 3.2: Foto čipu AXUV20ELG.

| | |
|---|---|
| Citlivá plocha | $3 \times 19$ mm$^2$ |
| Šířka diody | 0,75 mm |
| Výška diody | 4 mm |
| Délka mezery mezi diodami | 0,144 mm |
| Vzdálenost středů diod | 0,894 mm |
| Šířka užitného pole AXUVI (20 kanálů) resp. AXUVII (17 kanálů) | 17,73 mm resp. 15,05 mm |
| Zkratovací odpor | 300 MΩ |
| Citlivost diod | 0,26 A/W (pro energie fotonů $h\nu$ 1-5 keV) |
| Doba náběhu (10-90%) | 0,2 µs |

Tabulka 3.1: Základní charakteristika fotodiod.



Obrázek 3.3: Foto příruby s detektory pro AXUVI vlevo, AXUVII vpravo.

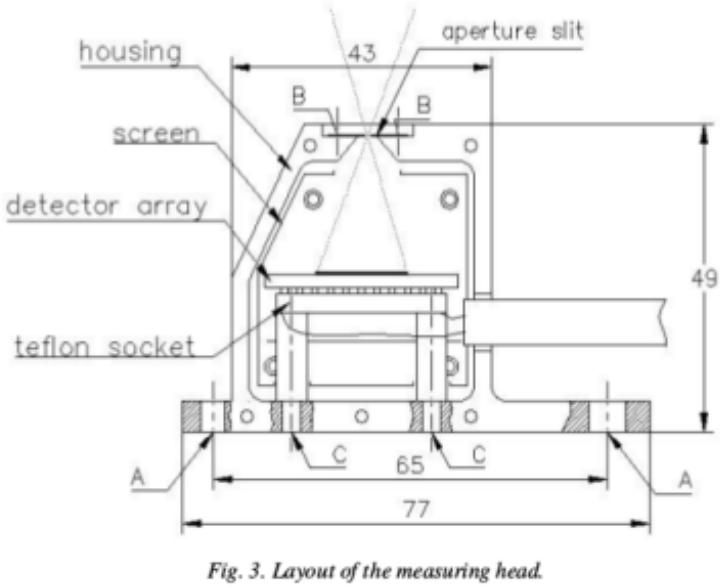
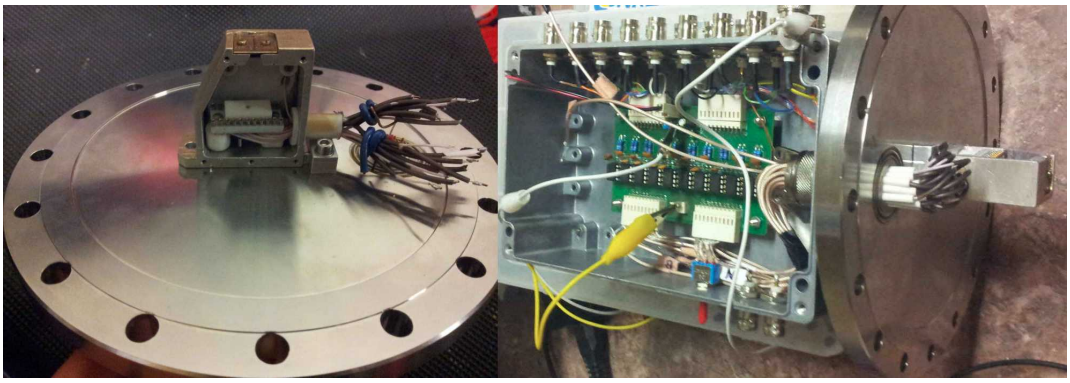



*Fig. 3. Layout of the measuring head.*

Obrázek 3.4: Nákres schránky pro AXUVII, převzato z [44].



Obrázek 3.5: Foto detektoru AXUVII před a po rekonstrukci s novým zesilovačem.

## 3.2 Geometrie

Abychom mohli určit pozorovací úhly jednotlivých diod a kolmou vzdálenost detektoru od apertury, je zapotřebí provést prostorovou kalibraci. Se znalostí geometrie umístění detektorů lze poté zjistit přepočítávající koeficienty pro jednotlivé detektory zohledňující efektivní plochu detektoru, plochu štěrbiny a omezení výhledu detektoru diagnostickým portem. Dále určíme derivační matici **D** a geometrickou matici **T**, danou vztahem 2.20

$$f_i = \sum_{j=1}^{N} T_{ij} g_j,$$

kde $f_i$ jsou naměřené hodnoty pro jednotlivé detektory a $g_j$ jsou příspěvky jednotlivých pixelů.

### 3.2.1 Prostorová kalibrace detektorů

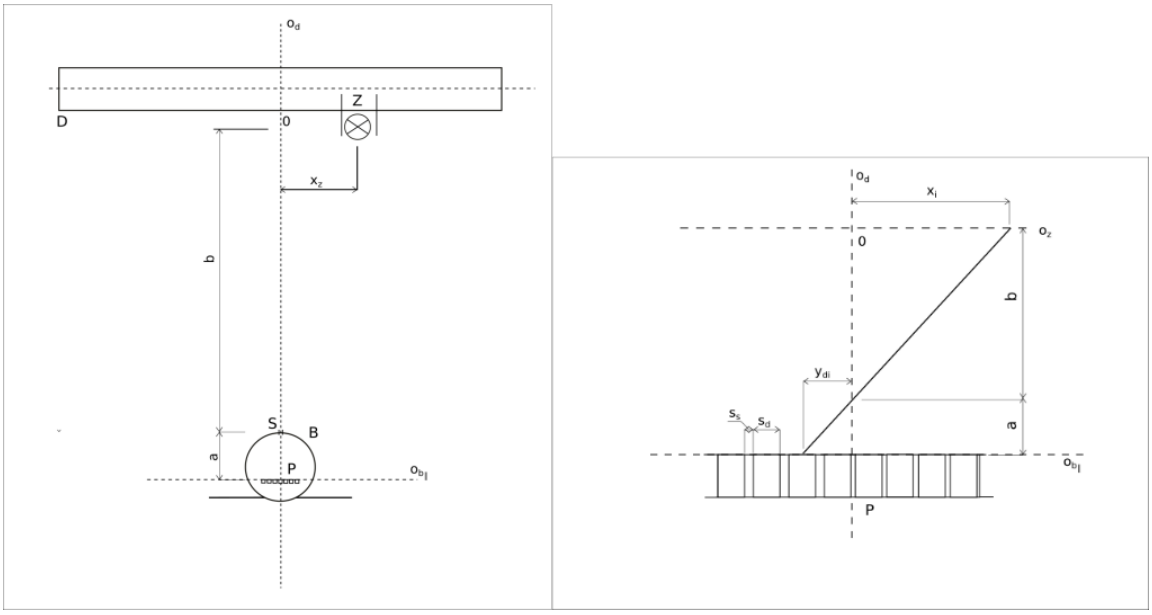
Geometrickou matici **T** generujeme na základě znalosti jednotlivých chord, proto potřebujeme znát pozorovací úhly $\alpha_i$ vzhledem k ose detektoru, umístění detektorů $y_{Di}$ vůči pozorovacím štěrbinám a polohu na tokamaku.

Kalibrace byla prováděna pomocí světelného zdroje, který byl považován za bodový vůči ose podél pole detektorů. Schéma pro kalibraci obou detektorů je na obrázku 3.6. Ve vzdálenosti $b$ byla od štěrbiny umístěna dráha se žárovkou o stabilizovaném výkonu 40 W [24] s vláknem, které bylo připojeno lineárně (její schéma je na obrázku 3.7). Vzdálenosti $b$ byly $b_1 = 371{,}3$ mm a $b_2 = 374{,}3$ mm. Cílem bylo zjistit polohy středů diod vůči ose detektoru, která je kolmá na pole diod a prochází štěrbinou a vzdálenost detektorů od štěrbiny $a$.

Výběr žárovky je důležitý, jelikož pro různé pozorovací úhly můžeme při špatné volbě dostat jinou intenzitu i ve stejné vzdálenosti. Tento fakt nebyl v [25] odhalen a je možné, že způsobil snížení maxim u středových detektorů, který byl přičítán napařeninám. Pro určení pozorovacích úhlů by však tento fakt neměl mít velkou váhu. Pohyb žárovky byl zajištěn pomocí krokového motorku. Měřena byla odezva detektorů na intenzitu záření procházející přes štěrbinu a dopadající na jednotlivé diody při

různých vzdálenostech $x_z$ žárovky od osy detektoru $o_d$. Signál byl kromě standardního zesílení I. stupně (viz 3.3) ještě 4x zesílen II. stupněm sběru dat pro AXUVI a 8x pro AXUVII. Dostaneme maxima signálu při poloze žárovky $x_i$ odpovídající polohám středům diod $y_{di}$ od $o_d$. Z podobnosti trojúhelníků dostaneme

$$y_{di} = -\frac{x_i a}{b}. \tag{3.1}$$




Obrázek 3.6: Schéma značení pro prostorovou kalibraci detektorů AXUVI a AXUVII.

Pokud budeme považovat rozměry diod za přesné, můžeme vztáhnout ostatní vzdálenosti k prvnímu maximu $y_{d1}$ jako

$$y_{di} = y_{d1} - (s_d + s_s)(i-1), \tag{3.2}$$

kde $s_d$ je šířka detektoru a $s_s$ šířka štěrbiny. Označíme rozdíl obou předchozích vztahů pro $y_{di}$ s sečteme jejich kvadráty.

$$\psi = \sum_{i=1}^{Ch_{NUM}} (y_{d1} + \frac{a x_i}{b} - (s_d + s_s)(i-1))^2 \tag{3.3}$$

kde $Ch_{NUM}$ značí počet diod celého detektoru. Pomocí metody nejmenších čtverců můžeme odvodit parametr prvního maxima $y_{d1}$ na ose detektorů, odkud počítáme polohy $y_{di}$ a kolmou vzdálenost detektoru od štěrbiny $a$ (viz [25]). Položením derivace $\psi$ podle těchto parametrů rovno nule po úpravách dostaneme

pro $y_{d1}$

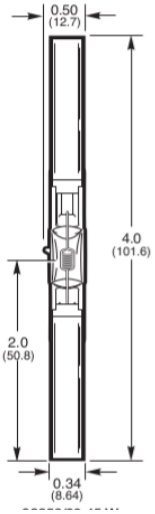
$$y_{d1} = \frac{1}{CH_{NUM}} \left( (s_d + s_s) \sum_{i=1}^{CH_{NUM}} (i-1) - \frac{a}{b} \sum_{i=1}^{CH_{NUM}} x_i \right) \tag{3.4}$$

a pro $a$

$$a = \frac{b(s_d + s_s)(\sum_{i=1}^{CH_{NUM}} x_i(i-1) - \frac{(CH_{NUM}-1)}{2} \sum_{i=1}^{CH_{NUM}} x_i)}{\sum_{i=1}^{CH_{NUM}} x_i^2 - \frac{1}{CH_{NUM}} (\sum_{i=1}^{CH_{NUM}} x_i)^2} \tag{3.5}$$

kde $CH_{NUM}$ označuje počet detektorů, $s_d$ šířku detektoru, $s_s$ velikost neaktivní štěrbiny mezi dvěma detektory, $b$ vzdálenost štěrbiny od dráhy se zdrojem světla. Pro oba detektory dostaneme $a_1 = 29{,}05$ mm a $a_2 = 21{,}04$ mm.

Naměřené signály pro jednotlivé polohy žárovky jsou uvedeny na obrázku 3.8 pro AXUVI a obrázku 3.9 pro AXUVII. Zároveň jsou zde značeny jednotlivé kanály a směr do něhož se dívají v tokamaku (viz obr. 3.1). Jednotlivé signály byly fitovány Gaussovou křivkou, odkud byly získány polohy maxim intenzity $x_i$ pro další výpočty.



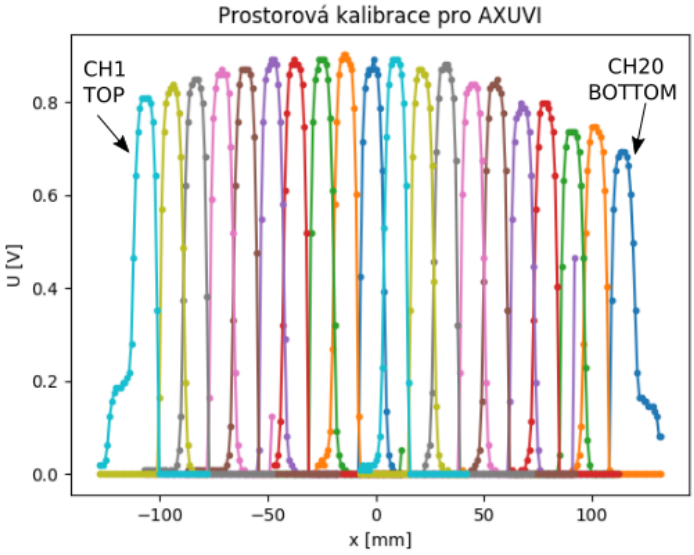

Obrázek 3.7: Schéma žárovky, převzato z [24].

Dále bylo zapotřebí započítat geometrii umístění detektorů na tokamak a omezení výhledu kvůli portům. Polohy obou štěrbin vůči portům jsou na obrázku 3.10, kde S označuje osu štěrbin.

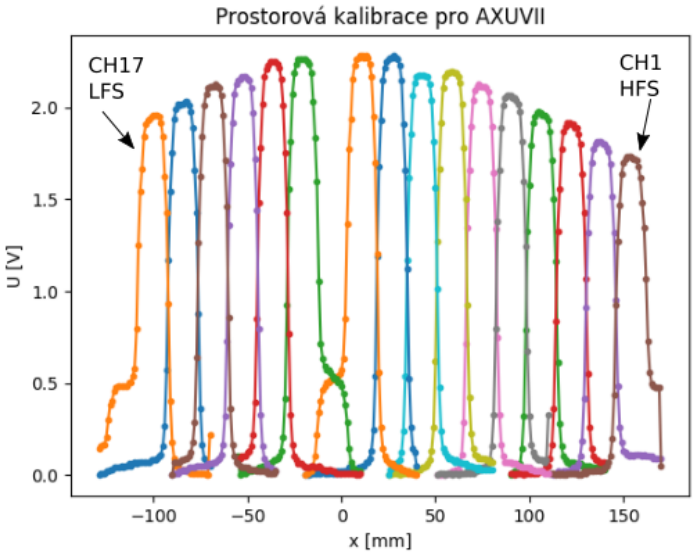
Pro zvolené uspořádání bylo zjištěno, že krajní zorná pole AXUVI, tedy detektoru umístěného na bočním portu, a které se dívají směrem na TOP a BOTTOM, jsou tímto portem omezeny, což se potvrzuje i na signálu.

Výpočet omezení detektorů je podrobně popsán v [10, 25]. Zatímco u detektoru AXUVI, umístěného na bočním portu je šířka portu omezující toroidální pohled stejná, pro detektor AXUVII tomu tak není a za šířku portu byly brány šířky portu v místě průchodu osy detektoru z portu do komory, zároveň bylo nutné započítat posun osy detektoru směrem k LFS $\Delta X_c = 9{,}5$ mm. Výpočet koeficientů pro přepočet detekovaného napětí na výkon vyzařovaný plazmatem v oboru citlivosti detektorů je popsán v následující části.

Při jednom měření bylo také otestováno, zda je možné detektory kalibrovat uvnitř tokamaku, kde vzdálenost $b$ je cca 35 cm. Žárovka byla zasouvána do tokamaku s intervalem 1 mm. Test proběhl pouze orientačně s nepřesným měřením vzdálenosti.

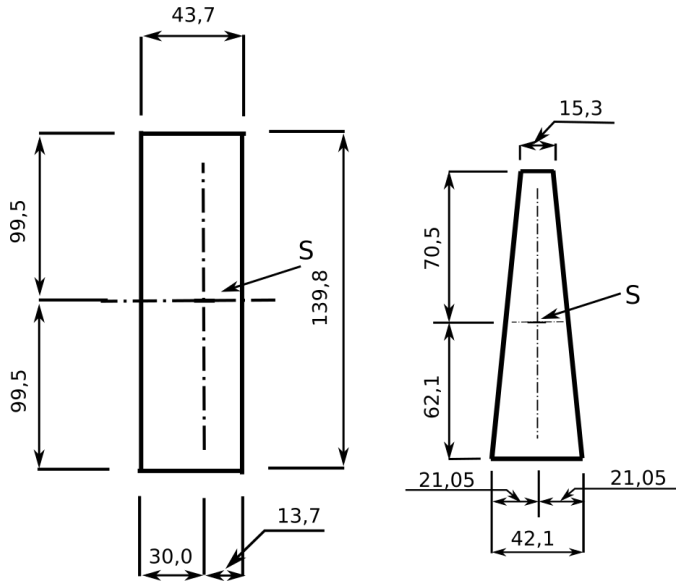



Obrázek 3.8: Kalibrace detektoru AXUVI - závislost signálu $U$ [V] na poloze žárovky $x$ [mm].




Obrázek 3.9: Kalibrace detektoru AXUVII - závislost signálu $U$ [V] na poloze žárovky $x$ [mm].

Nicméně přesto je možné říci, že při přesnějším měření by výsledek byl použitelný. Naměřené signály jsou uvedeny v příloze na obrázku 1.




Obrázek 3.10: Rozměry portů a umístění os štěrbin $S$ obou detektorů - boční příruba vlevo (port LFS), horní příruba vpravo (horní TOP port)

### 3.2.2 Vyzařovaný výkon

Vrátíme se zpět k tomografickému problému

$$f_i = \int d\mathbf{r} g(\mathbf{r}) \tag{3.6}$$

Určujeme tedy emisivitu plazmatu, která má obecně spektrální závislost a značíme ji $G(\mathbf{r}, \nu)$ [$\mathrm{Wm^{-3}Hz^{-1}}$]. Za předpokladu izotropního vyzařování do prostorového úhlu $\Omega = 4\pi$, lze popsat radiační výkon detekovaný jedním detektorem jako

$$P_{RAD_i} = \int_{S_i} d\mathbf{r} \int d\nu \eta_i(\nu) \frac{\Omega_i(\mathbf{r})}{\Omega} G(\mathbf{r}, \nu), \tag{3.7}$$

kde $\eta_i(\nu)$ je spektrální účinnost detektoru a $\Omega_i(\mathbf{r})$ pozorovací prostorový úhel detektoru. Přitom prostorová integrace probíhá přes chordu detektoru. Zjednodušíme-li předchozí vztah na integraci přes přímku, přejde $d\mathbf{r}$ na $A(s)_i \times ds$, kde $A_i$ je plocha, kterou vidí detektor ve vzdálenosti s. Dále využijeme vlastnosti étendue $= A_i\Omega_i$, které se v případě Gaussovské geometrické optiky zachovává [39] a můžeme jej předsunout před integrál:

$$P_{RAD_i} = \frac{A_i\Omega_i}{\Omega} \int_{S_i} d\mathbf{s} \int d\nu \eta_i(\nu) G(\mathbf{r}, \nu). \tag{3.8}$$

Pro náš případ uvažujeme zjednodušení a spektrální účinnost $\eta_i(\nu)$ budeme aproximovat pro použité detektory střední hodnotou $< \eta_i(\nu) >$, přes tzv. efektivní citlivost detektorů $S_{eff}$. Citlivost je popsána pro AXUV v sekci 1.3.2 a jedná se o převrácenou hodnotu účinnosti. Uvažujeme $S_{eff} = 0{,}26$ A/W. Emisivitu pak získáme integrací spektrální verze přes všechny frekvence. Zde je vidět slabina AXUV. Jelikož nemají

stejnoměrnou citlivost a v oblasti UV je dokonce výrazně snížena, je nutno odhadovaný výkon brát s rezervou.

Proud $I_i$ vzniklý v diodách je konvertován přes zesilovač na napětí se zesilovacím odporem $R_f = 510$ kΩ. Výkon převedený ze signálu dostaneme jako

$$P_i = \frac{I_i}{S_{eff}} = \frac{U_i}{R_f S_{eff}}. \tag{3.9}$$

Mezi vyzářeným výkonem plazmatu v oblasti detektoru přepočteným na celý tokamak $P_{RAD_i}$ a $P_i$ platí vztah

$$P_{RAD_i} = \frac{A_{eff} 4\pi}{A_i \Omega_i} P_i, \tag{3.10}$$

kde $A_{eff}$ je efektivní plocha, kterou detektor pozoruje plazma a bere se za ni plocha, kterou vytíná zorné pole jednoho detektoru na midplane. V případě horního detektoru AXUVII, kdy se diody dívají na plazma v různé vzdálenosti od centrální osy, bude mít $A_{eff}$ tvar

$$A_{eff} = 2\pi(R_{TOK} + R_i cos(\alpha_i)) q_{pi}, \tag{3.11}$$

kde $\alpha_i$ je úhel i-tého detektoru mezi hlavní osou detektorového pole a pozorovací přímkou detektoru (viz obr. 3.11), $R_i$ jsou kolmé vzdálenosti od osy komory na osy pozorovacích úhlů, $q_{pi}$ značí úsečku, kterou vytíná pozorovací pole na ose komory, a $R_{TOK}$ je vedlejší poloměr.

Étendue vyjádříme jako

$$\Omega_i A_i = \frac{q_{DR_i} h_S \cdot q_{pi} H_{fl_{Ri}} \cdot cos(\alpha_i)^2}{L_{DR_i}^2}, \tag{3.12}$$

kde $q_{DR_i}$ je průmět šířky štěrbiny na detektor, $h_S = 4$ mm značí délku štěrbiny, $L_{DR_i}$ je vzdálenost mezi středem detektoru a průnikem osy detektoru s kolmici ze středu komory na tuto osu a $H_{fl_{Ri}}$ je obraz výšky detektoru v toroidálním směru. $A_i \Omega_i$ tedy zohledňuje velikost štěrbiny, detektoru a pozorovací úhly.

Pro $P_{RAD_i}$ pak máme

$$P_{RAD_i} = \frac{U_i}{R_f A_{eff}} \cdot \frac{S_{eff} 4\pi}{A_i \Omega_i} = K_i U_i, \tag{3.13}$$

kde $K_i$ jsme označili kalibrační koeficienty, převádějící detekovaný signál na výkon

$$K_i = \frac{1}{R_f A_{eff}} \cdot \frac{S_{eff} 4\pi}{A_i \Omega_i}. \tag{3.14}$$

Odhad celkového vyzařovaného výkonu plazmatu v celém tokamaku v oblasti citlivosti detektorů pak získáme sumací přes všechny detektory jako

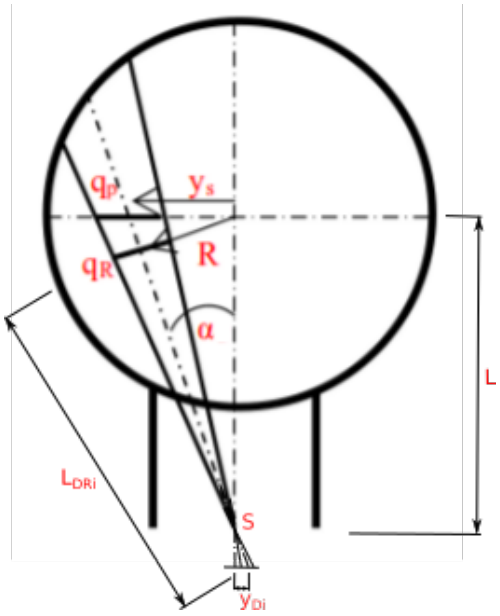
$$P_{RAD} = \sum_{i=1}^{L} K_i U_i. \tag{3.15}$$

Získali jsme tedy převodní koeficienty $K_i$ [W/V] viz tabulka 1 pro přepočet detekovaného signálu na vyzářený výkon a můžeme určit odhad $P_{RAD}$.

Z tomografické rekonstrukce získáme emisivitu $\mathbf{g}$ [$\mathrm{Wm}^{-3}$], což je vektor o velikosti $N$, kde $N$ je počet pixelů. Plazmatem vyzářený výkon v oblasti citlivosti detektorů pak určíme vynásobením každého pixelu jeho objemem a součtem přes všechny pixely jako

$$P_{RAD_g}[W] = \sum_{i}^{N} s_i(\Delta x)^2 g_i, \tag{3.16}$$

kde $s_i$ je délka pixelu rozšířeného podél osy komory přes celý tokamak. Zároveň uvažujeme čtvercové pixely tj. mající stejnou délku kroku $\Delta x$.



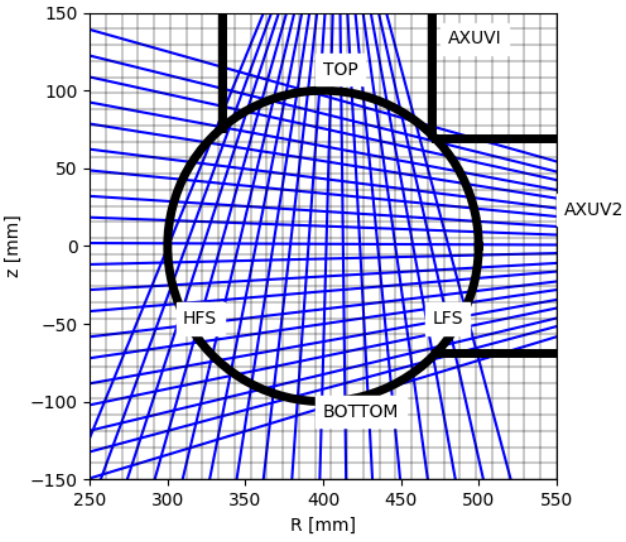

Obrázek 3.11: Poloidální řez komorou - značení hlavních parametrů, převzato z [10]

### 3.2.3 Geometrická matice

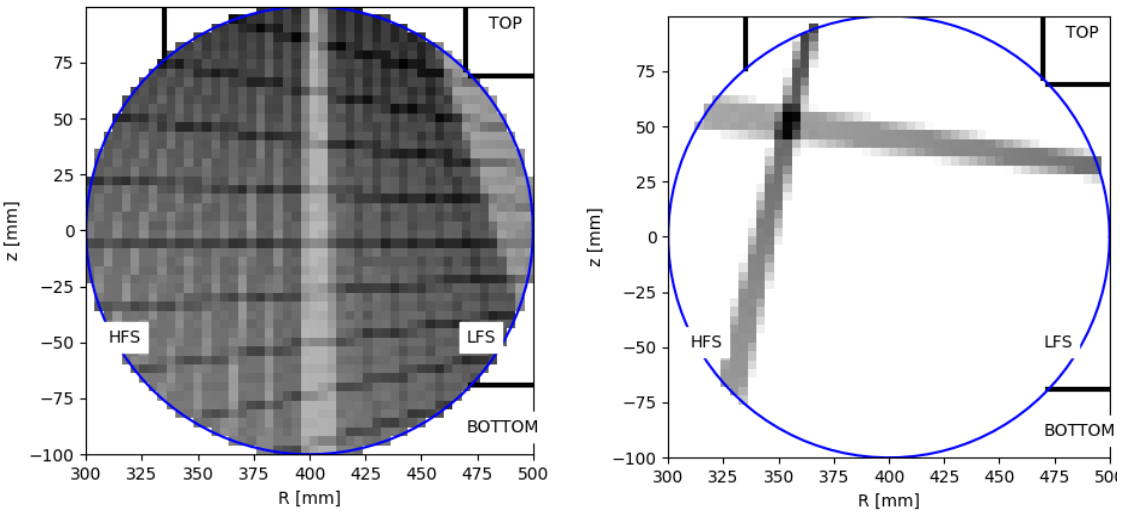
Příspěvky jednotlivých pixelů jsou obsaženy v geometrické matici $T_{ij}$ s rozměry $L$ x $N$ (počet detektorů x počet pixelů). Příspěvek každé chordy má tedy svůj řádek, kam se započítává vliv jednotlivých pixelů. Zároveň je vhodné použít místo přímkových chord rozbíhavé zorné pole, což více odpovídá skutečnosti a definovat chordy pomocí tří bodů místo dvou. S rozbíhavostí je však nutné počítat se zachováním étendue, takže vliv $g(x, y)$ bude klesat s $1/r$ od detektoru. Zorné pole lze poté rozdělit do několika tzv. virtuálních chord. Místo mnoha nepokrytých bodů tak vznikne reálnější plošné rovnoměrné pokrytí a díky tomu zahrneme i okrajové efekty jako vznik polostínu na okrajích pozorovacího pole. Geometrická matice $\mathbf{T}$ pak bude mít více nenulových prvků, což sice zpomalí výpočet, ale zato zpřesní výsledek.

Příspěvek jednotlivých pixelů je v použitém algoritmu počítán modifikovaným Xiaolin Wu algoritmem [47]. V případě virtuálních chord se tyto sloučí řádku geometrické matice odpovídající reálné chordě.

Příklad dvou chord je uveden v pravé části obrázku 3.13 a všechny chordy s vynecháním jednoho detektoru č. 11 AXUV2. Pokud je některý z detektorů poškozen, vznikne částečně nepokrytá oblast, což může mít vliv na následující rekonstrukci. Kromě vnitřních částí komory je zapotřebí vyřešit i vnější část, která se v použitém algoritmu nuluje pomocí zadaných bodů hranice komory. Nicméně pixely mohou ležet na hranici, což může vést k chybě rekonstrukce, kdy se hledá příspěvek do řešení na hranici komory či trochu mimo.




Obrázek 3.12: Uspořádání pozorovacích chord pro oba detektory s vymezením portů s čtvercovou sítí 30 x 30 px, přímkové chordy.




Obrázek 3.13: Vlevo - zobrazení matice gometrie pro všechny chordy AXUV1 a AXUV2 kromě 11. chordy AXUVII, vpravo - páté chordy obou detektorů. Použitá mřížka - 50 x 50 pixelů, s virtuálními chordami.

### 3.2.4 Derivační matice

Matici směrových derivací **D** potřebujeme ve většině regularizačních metod uvedených v 2.3. Jelikož se pohybujeme v diskrétním oboru, musíme nahradit spojitou derivaci konečnými diferencemi. Při použití regularizace s MFI si vystačíme se směrovými diferencemi v prvním řádu. Zde uvedeme příklad prvních a druhých diferencí a další případy lze nalézt např. v [4]. K tomu můžeme využít například dopředné nebo centrální diference. Dopředné diference využívají jednoho kroku $\Delta x = \Delta y$ na čtvercové síti. Označíme diskrétní polohy $x \in 1..X$ a $y \in 1..Y$. Pro dopředné diference pak dostaneme v x-tém kroku tvar

$$\frac{\partial g}{\partial x}|_{dop} = \frac{g_{x+1} - g_x}{\Delta x} \tag{3.17}$$

a centrální diference

$$\frac{\partial g}{\partial x}|_{centr} = \frac{g_{x+1} - g_{x-1}}{2\Delta x} \tag{3.18}$$

Derivační matice pro vztah $\mathbf{D_x^T g D_x}$ potom dostaneme jako

$$\mathbf{D_x}|_{\mathbf{dop}} = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

a pro centrální diference v x máme

$$\mathbf{D_x}|_{\mathbf{centr}} = \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Okraje jsou řešeny dopřednou diferencí. Podobně můžeme postupovat i pro druhý řád derivací. V ose x bude mít diference tvar

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x} = \frac{g_{x+1} - 2g_x + g_{x+1}}{(\Delta x)^2}. \tag{3.21}$$

Okraje můžeme řešit například pomocí dopředné diference nebo jako polovinu druhého resp předposledního kroku. Derivační matice bude

$$\mathbf{D_{xx}} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Obdobně bychom řešili i pro druhou souřadnici. Okraje jsou uvedeny spíše pro příklad, jelikož v praxi jsou okrajové pixely, které většinou leží mimo komoru nulové, a proto se derivační matice generuje jednoduše se stejným vzorem v celé matici. Chyba derivace je dána délkou kroku a zatímco pro jednoduchou diferenci s krokem $\Delta x$ klesá s prvním řádem kroku, u centrální diference s krokem $2\Delta x$ klesá s jeho druhou mocninou, a je tedy druhého řádu přesnosti. Nicméně centrální diference aproximuje derivaci přes dva kroky, a má tedy méně lokální charakter než dopředná náhrada. Dopředné diference využívá i algoritmus uvedený v závěrečné kapitole pro zpracování naměřených dat.

## 3.3 Zesilovače

Zesilovače pro AXUV fotodiody musí splňovat několik základních požadavků. Hlavní důraz je kladen na nízký šum, dostatečné zesílení a z důvodu požadavku napájení bateriemi i nízký odběr. Schéma původního zesilovače je na obrázku 3.16. Zapojení diod je ve vodivostním směru, takže katoda diody má výstup na invertující vstup zesilovače (-) a jsou zdrojem záporného proudu. Je také možné zavést malý 0,3 V bias. U AXUV diod známe úměru proud/výkon detekovaného záření [A/W], měříme napětí, a proto potřebujeme zesilovač proud/napětí, tedy tzv. transimpedanční zapojení (viz Obr. 3.15).

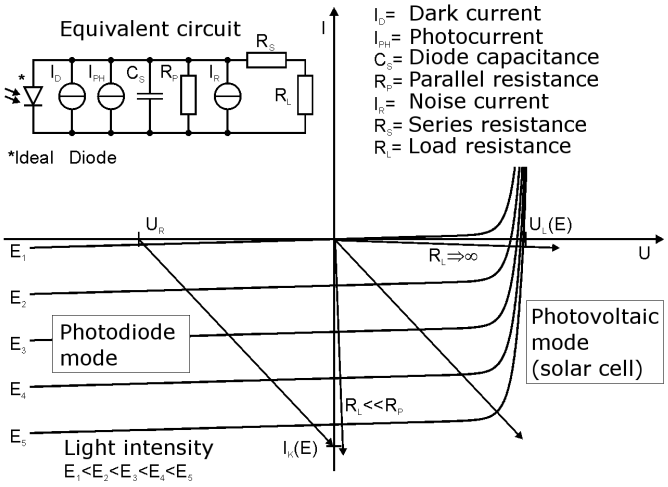
Proud AXUV diod je velmi malý (řádově μA) a proto je zapotřebí výstup co nejméně zatížit. Při volbě operačního zesilovače je tak nutné brát ohledy na proudový bias $I_B$, který určuje nejmenší detekovatelný proud s fyzikálním významem. Pokud je $I_B$ moc vysoký, srovnatelný nebo vyšší než pracovní proud diod, ztratili bychom informaci o jejich signálu. Z tohoto důvodu byl nakonec vybrán operační zesilovač MCP6022 na bázi CMOS s $I_B = 1$ pA. Schéma nového zesilovače je na obrázku 3.16. Původní zapojení obsahuje mezi diodou a invertujícím vstupem odpor $R_1 = 3{,}9$ kΩ a zesílení V/A (tzv. gain) je tak úměrné $R_f/R_1$, kde $R_f$ je tzv. zesilovací odpor (u starého zesilovače $R_f = 510$ kΩ). U nového zesilovače byl kvůli snaze o potlačení možného šumu na $R_1$ tento odpor vynechán. U transimpedančního zesilovače je zesílení $-R_f$ a výstup má díky invertujícímu zapojení opačnou polaritu. Velikost $R_f$ byla volena tak, aby byl signál dostatečně silný a zároveň nedocházelo při běžném provozu k saturaci výstupního napětí, které je omezené napájecím napětím zesilovače. To je udržováno pomocí regulátoru napětí na hodnotě 5 V. Paralelní kondenzátor $c_1 = 3{,}3$ pF, který má za úkol bránit šumu při vyšších frekvencích byl z původního návrhu ponechán. Detektory mají společnou katodu a pracují ve fotovodivostním režimu viz voltampérová charakteristika fotodiody společně s náhradním schématem na obrázku 3.14. Výstupní signál je pro nízké frekvence

$$U = R_f \cdot I_{IN}, \tag{3.23}$$

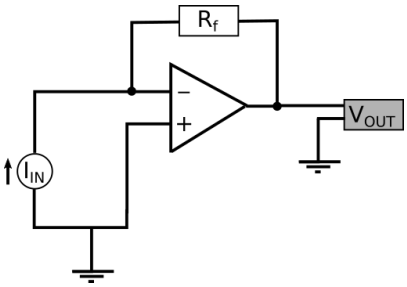
Pro vysoké frekvence může hrát roli kapacita fotodiod a vstupní kapacita zesilovače. Při nahrazení starého modulu AD822AN bylo nejprve zvoleno několik typů zesilovačů s nevhodným tzv. split-supply napájením a tedy zesilujícím jak kladné tak záporné signály, zároveň měly vysoké $I_B$ a dalšími parametry. Nás ovšem zajímá pouze proud generovaný diodou při fotovoltaickém režimu, stačí nám tedy tzv. napájení single supply.

Společně se schématem (viz obr. 3.16), bylo odzkoušeno v první fázi i zapojení s kondenzátory paralelně k diodě a zapojení s biasem 0,4 V pomocí Schottkyho diody, které vytváří referenční napětí. Základní požadavky však splnilo i nejjednodušší řešení, a proto bylo zvoleno i pro první prototypy zesilovačů. K navržení desky plošného spoje byl použit program KiCad [21]. Návrh a osazená deska jsou na obrázku 3.17

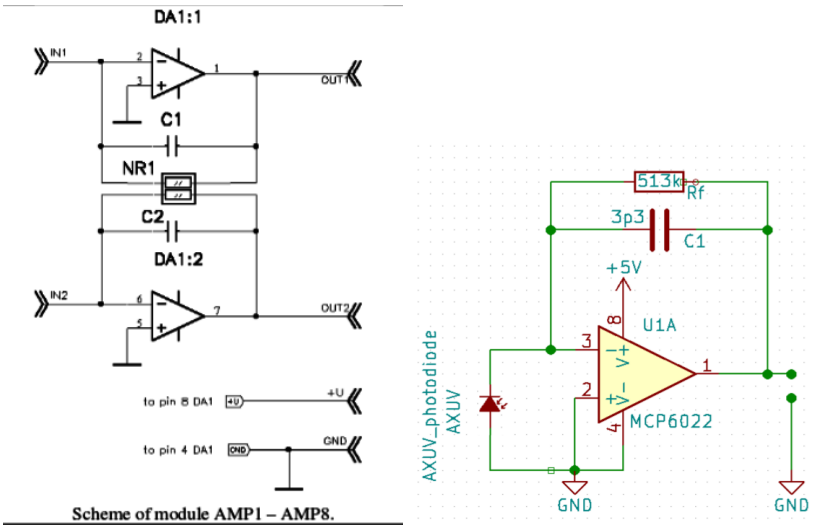
Porovnání parametrů obou zesilovačů jsou uvedeny v tabulce 3.2



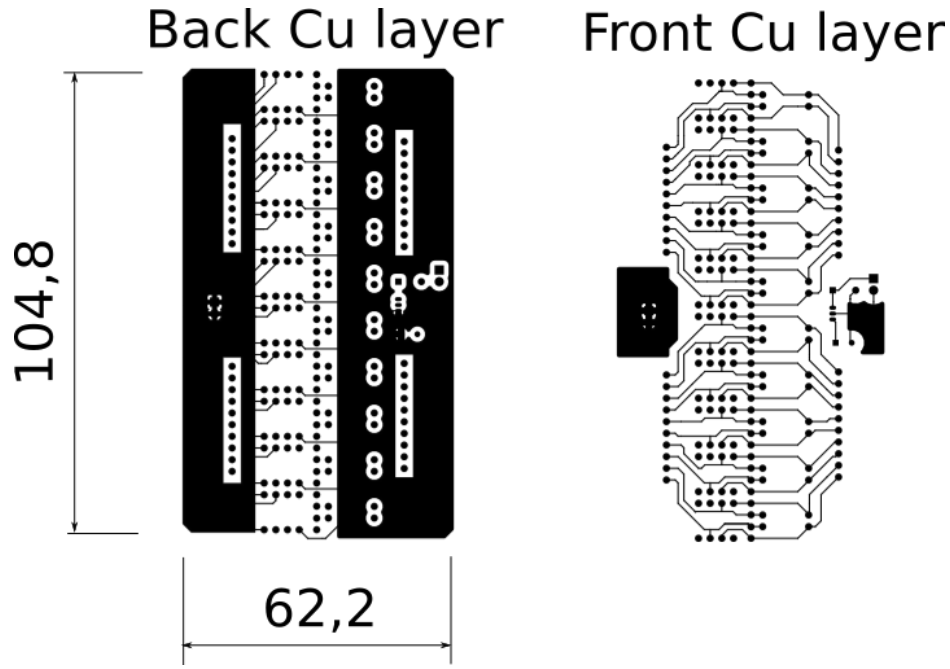

Obrázek 3.14: Voltampérová charakteristika fotodiody. Převzato z http://www.wikipedia.org.




Obrázek 3.15: Schéma trasimpedančního zesilovače




Obrázek 3.16: Schéma původního zesilovače - vlevo [44], nový zesilovač - vpravo




Obrázek 3.17: Přední a zadní strana plošného spoje nového zesilovače

| Parametry | Původní zesilovač | Nový zesilovač |
|---|---|---|
| Modul | AD822AN | MCP6022 |
| Typ | FET | CMOS |
| Vstupní klidový proud $I_B$ | 0.5 nA (max. při $T_{max}$ = + 85° C) | 150 pA při $T_{max}$ |
| Vstupní napětí | 1,2 mV (max. při $T_{max}$ = + 85° C) | 0,5 mV při $T_{max}$ |
| Šířka pásma | 1,8 MHz | 10 MHz |
| Rychlost přeběhu | 3 V/µs | 7 V/µs |
| hustota šumu vstupního napětí | 16 nV/Hz$^{1/2}$ pro f = 1 kHz | 8,7 nV/Hz$^{1/2}$ pro f = 1 kHz |
| hustota šumu vstupního proudu | 0,8 fA/Hz$^{1/2}$ pro f = 1 kHz | 3 fA/Hz$^{1/2}$ pro f = 1 kHz |
| Klidový proud | 2× 0,8 mA | 1 mA |

Tabulka 3.2: Srovnání parametrů starého a nových zesilovačů

# Kapitola 4

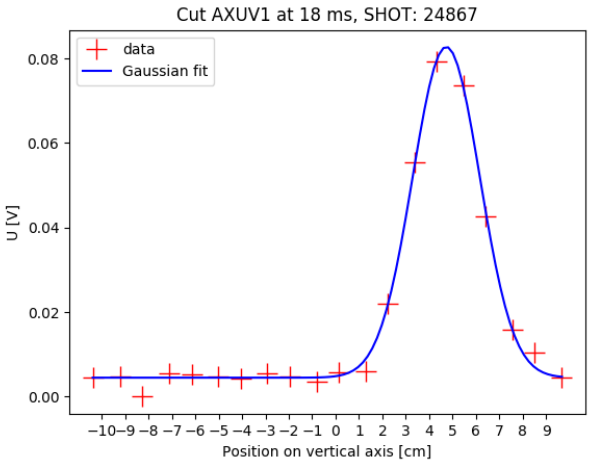
# Měření na tokamaku GOLEM a analýza dat

## 4.1 Určení polohy a výkonu plazmatu

Prostorová kalibrace nám dává informaci, jakou část plazmatu konkrétní detektor vidí. Promítneme-li detekované signály na osu poloidálního řezu komory horizontální pro AXUVII a vertikální pro AXUVI, můžeme určit profil a zároveň polohu těžiště signálu, které více odpovídá poloze středu vyzařování než hledání maxima. Nejjednodušší varianta je jednotlivé profily pro konkrétní časový řez fitovat jednou nebo více Gaussovými křivkami

$$f(x) = a\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, . \tag{4.1}$$

Funkce $f(x)$ má v $x = \mu$ vrchol a $\sigma$ určuje šířku zvonu. Fitování více křivkami se podrobněji věnuje práce [10]. Výstup pro výboj č. 24867 je na obrázku 4.1



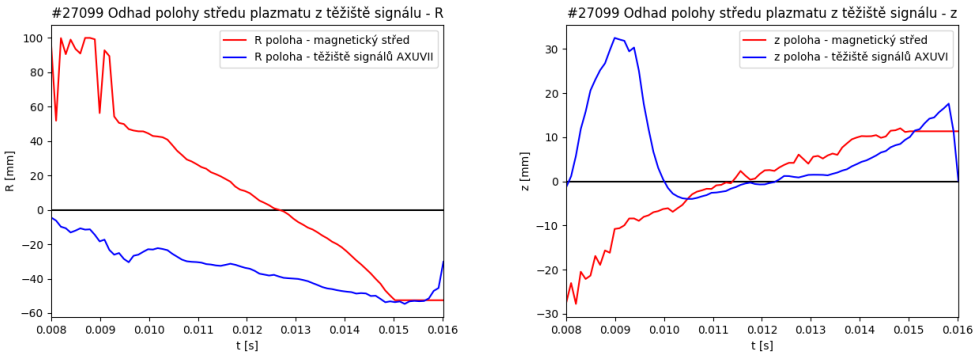

Obrázek 4.1: Řez pro výboj č. 24867 v čase 18 ms, fitování jednoduchou Gaussovou křivkou - modře

Můžeme také počítat těžiště signálu jako

$$x_T = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}, \tag{4.2}$$

kde $x_i$ jsou polohy průniku os detektorů na pozorované ose poloidálního řezu, tedy $z$ pro AXUVI a $R$ pro AXUVII.

Polohu maxima zároveň můžeme porovnat s polohou počítanou z Mirnovových cívek sledující polohu plazmatu skrze poloidální magnetické pole. Na obrázku 4.2 jsou porovnány odhady polohy z dat z Mirnovových cívek a z těžiště signálů z AXUVI a AXUVII. Pro okolní výboje však signál pro určení magnetického středu byl zatížen posunem, který prakticky znemožňoval integraci, takže je tento výsledek nutno brát s rezervou. Zároveň na začátku výboje není rekonstrukce příliš věrohodná, jelikož byl signál poměrně slabý, a bylo by proto vhodné sérii měření provést za lepších podmínek např. po čištění komory pomocí doutnavého výboje a vypékání. Lepší srovnání poskytlo měření s původním zesilovačem (viz obr 4.5), kde je vidět poměrně dobrá shoda odhadu vertikální polohy z vyzařování se magnetickým středem plazmatu ze signálů z Mirnovových cívek. Poloha těžiště vyzařování a magnetický střed se však může lišit, nejvíce na počátku a na konci výboje.



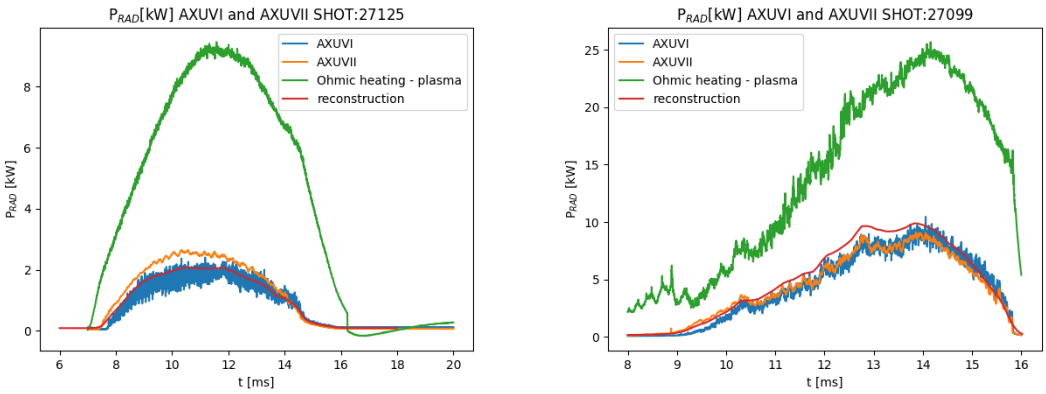

Obrázek 4.2: Odhad polohy plazmatu pomocí těžiště signálů z AXUVI a AXUVII ve srovnání s polohou magnetického středu z Mirnovových cívek

Vyzařovaný výkon plazmatu je počítán sumací přepočítaných signálů z rovnice 3.15 a pro rekonstruovanou emisivitu $\mathbf{g}$ je výkon počítán z rovnice 3.16. Na obrázku 4.3 jsou srovnány detekované výkony obou detektorů s ohmickým výkonem ohřívající plazma a výkonem z rekonstrukce. Pro srovnání jsou uvedeny výboje 27125 a 27099. Je zde vidět zvýšený signál AXUVII proti AXUVI se značně menším šumem. Výkon ohmického ohřevu plazmatu uváděný na stránce shotu při těchto výbojích byl $\tilde{P}_{OH} = 7{,}15$ kW pro výboj č. 27125 a $\tilde{P}_{OH} = 13{,}65$ kW pro výboj č. 27099 a je počítán jako součin medianu napětí na závit $U_{loop}$ a medianu proudu plazmatem $I_P$

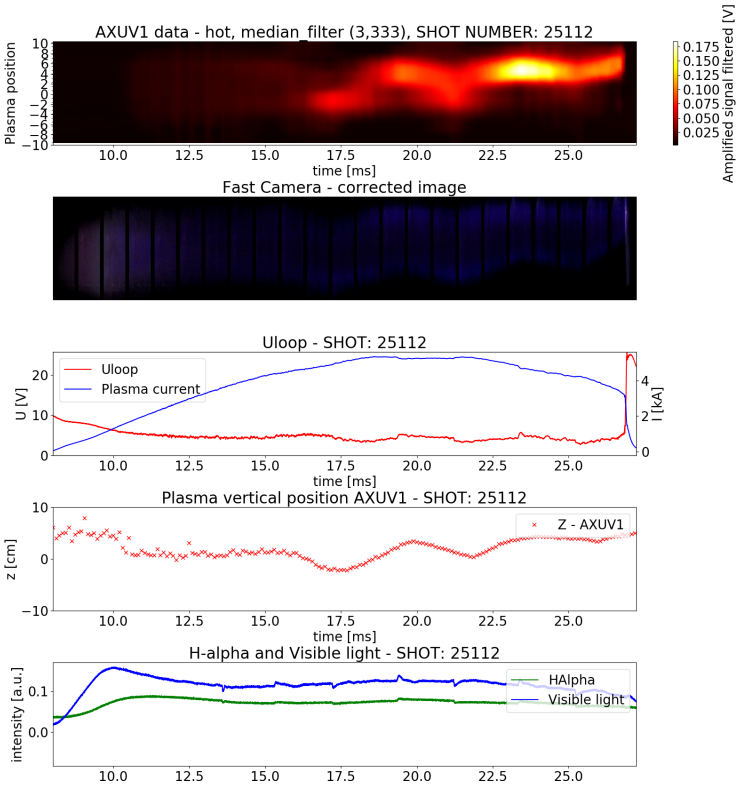
$$\tilde{P}_{OH} = \tilde{U}_{loop}\tilde{I}_P. \tag{4.3}$$

Celková diagnostika zahrnuje i porovnání konturového grafu se snímkem z rychlých kamer, detekovaným zářením fotodiodou pro viditelné záření a diodou $H_\alpha$ filtrem pro

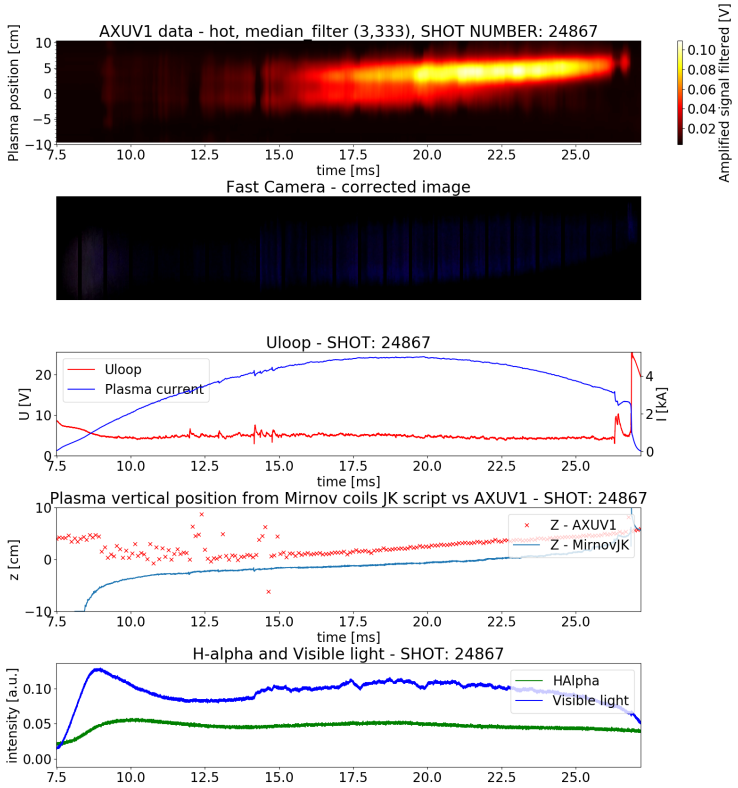
detekci vodíkové čáry $H_\alpha$. Standardní výstup funkce make_multiplot skriptu plots.py pro výstřel 25112 je na obrázku 4.4. Pro tento výboj byla zároveň použita vertikální stabilizace pro pohyb plazmatem. Srovnání polohy určené z maxima fitu jednoduchou Gaussovou křivkou s polohou určenou ze signálů Mirnovových cívek je na obrázku 4.5.




Obrázek 4.3: Celkový vyzařovaný výkon plazmatu $P_{RAD}$ v oblasti citlivosti detektorů pro výboje č. 27125 a 27099.




Obrázek 4.4: Porovnání konturového grafu AXUVI se starým zesilovačem při hýbání plazmatem pomocí vertikální stabilizace, odhad vertikální polohy z fitování jednoduchou Gaussovou křivkou.




Obrázek 4.5: Odhad vertikální polohy z fitování jednoduchou Gaussovou křivkou v porovnání s polohou z Mirnovových cívek pro výboj č. 24867.

## 4.2 Rekonstrukce pomocí algoritmu s MFR

### 4.2.1 Popis použitého algoritmu

K rekonstrukci vyzařovacího profilu byl použit modifikovaný program, sloužící v různých úpravách na na tokamaku COMPASS. Umožňuje jak rekonstrukci pomocí minimalizace Fisherovy informace s izotropním shlazováním, tak anizotropní shlazování podél magnetických siločar, které jsou zjednodušeně počítány jako soustředné kružnice kolem magnetického středu plazmatu, určeného ze signálů z Mirnovových cívek. Dále je možné volit odhad odchylky rekonstruovaných dat $\sigma$ nebo počet virtuálních chord.

Algoritmus výpočtu s minimem Fisherovy informace obsahuje dva hlavní cykly. Ve vnějším se počítá minimum Fisherovy informace, kde se linearizuje váhová matice $\mathbf{W}$. Pro první běh cyklu se volí jednotková matice a v dalších iteracích je váhová matice ještě normována podle maxima ze všech pixelů (index $k$) předchozího řešení $g^{(n-1)}$, takže máme

$$W_{ij}^{(1)} = \delta_{ij}, W_{ij}^{(n)} = \frac{\delta_{ij} max_k[g_k^{(n-1)}]}{g_j^{(n-1)}}, \tag{4.4}$$

a následuje výpočet $\mathbf{g} = \mathbf{Mf}$. Kritérium konvergence je nastaveno požadavkem na $\Delta g = |g^{(n)} - g^{(n-1)}|$. Vnější algoritmus většinou konverguje v několika krocích.

Ve vnitřním cyklu je Newtonovou metodou hledán optimální regularizační parametr $\lambda$, aby byla s danou přesností splněna podmínka

$$\chi^2(g(\lambda)) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left(\frac{f_i - \sum_{j=1}^{N} g_{ij}}{\sigma_i^2}\right)^2 = 1. \tag{4.5}$$

kde $N$ je počet pixelů, $L$ celkový počet detektorů a $\sigma_i$ očekávaná chyba i-tého detektoru. Zároveň se všechny snímky normují, aby měla data při výpočtu podobný řád. Předchozí podmínka se logaritmuje a zavedeme tím novou funkci $\psi(\lambda)$ jako

$$\psi(\lambda) = ln(\chi^2(\lambda)) = ln\left(\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left(\frac{f_i - \sum_{j=1}^{N} g_{ij}}{\sigma_i^2}\right)^2\right) = 0 \tag{4.6}$$

a poté řešíme Newtonovou metodou. Pro $\lambda_{n+1}$ pak máme

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{\psi(\lambda_n)}{\psi'(\lambda_n)} = \lambda_n - \frac{ln(\chi^2(\lambda_n))(\lambda_n - \lambda_{n-1})}{ln(\chi^2(\lambda_n)) - ln(\chi^2(\lambda_{n-1}))}. \tag{4.7}$$

Počáteční dvě hodnoty $\lambda_0$ a $\lambda_1$ se zvolí a dále se iteruje dokud není splněna zvolená omezující podmínka $|\chi^2 - 1| < 0.05$ nebo maximální počet iterací pro výpočet $\lambda$ nedosáhne v použitém programu zvoleného $n_{max} = 10$.

Dále je možné nulovat záporné řešení a řešení mimo komoru. V prvním případě je nejjednodušší variantou nulovat všechny záporné hodnoty, ale poté rekonstrukce nemusí kolem těchto hodnot být hladká. Tato podmínka je využita i v použitém algoritmu společně s nulováním řešení mimo komoru.

Druhou možností, jak se vypořádat se zápornými hodnotami je zavést další podmínku na řešení [32] ve tvaru

$$\sum_{g_i<0} g_i = 0. \tag{4.8}$$

Nevýhodou je implementace této podmínky do algoritmu a pravděpodobně i zhoršení konvergence a prodloužení výpočtu [32].

Další varianta popsaná v [32] je využití tzv. virtuálních senzorů, které hlídají záporné body, aby v nich byla nula. Přitom se volí síla, s jakou je prosazováno nezáporné řešení.

Pro urychlení výpočtu je možné využít paralelizaci viz [27, 15, 32], při které probíhá výpočet několika snímků najednou. Předpokládá se zde, že určitých $S$ snímků blízko sebe v čase si je vzájemně podobných. Pro rapid verzi má podmínka $\chi^2 = 1$ tvar

$$\chi^2 = \frac{1}{S}\frac{1}{L}\sum_{t=1}^{S}\sum_{i=1}^{L}\left(\frac{f_{it} - \sum_{j=1}^{N} g_{ij}}{\sigma_i^2}\right)^2 = 1. \tag{4.9}$$

V praxi takový postup dává přibližně S/3-krát rychlejší výpočet [32]. V této práci tato metoda využita není, nicméně používaný program ji umožňuje.

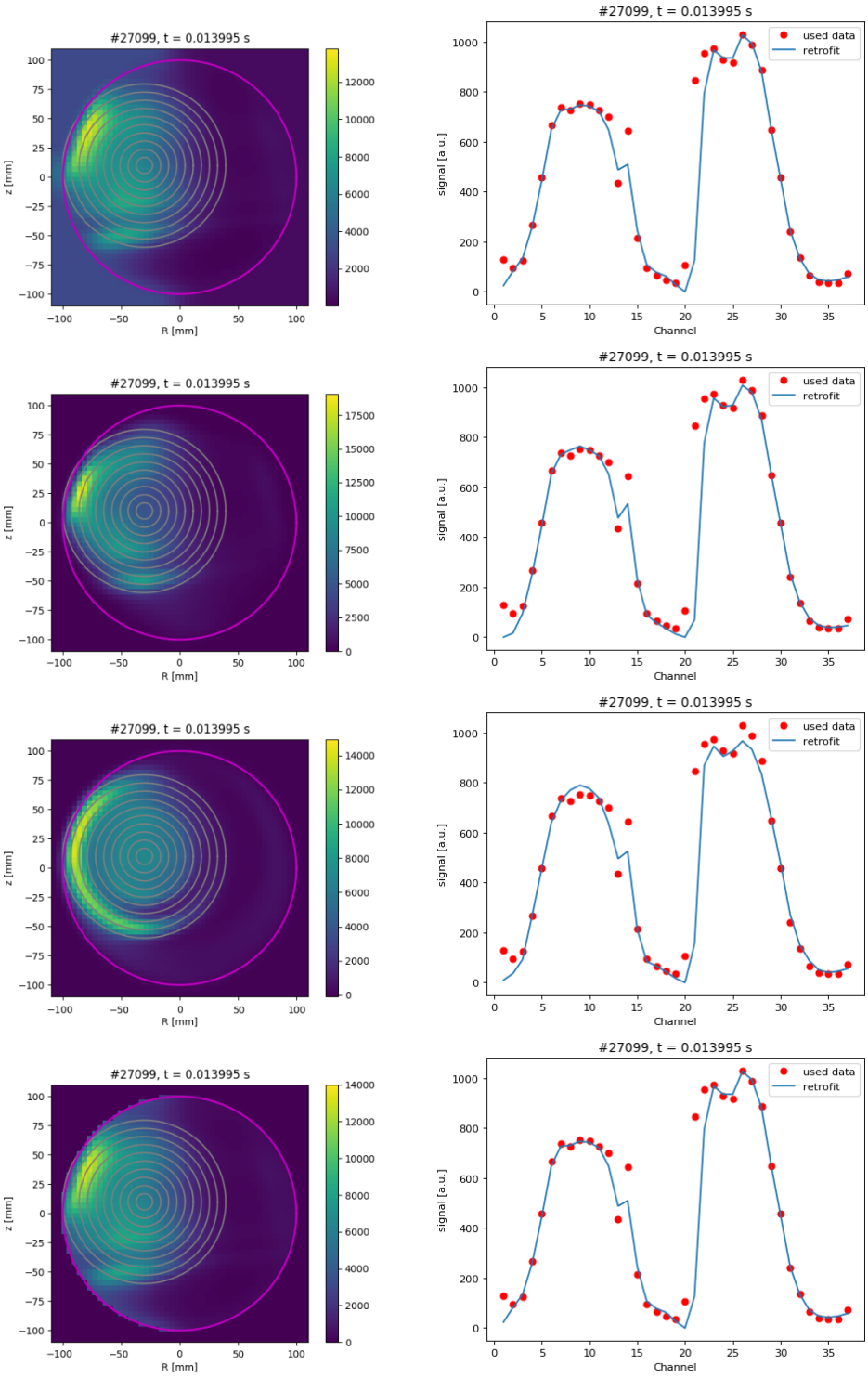
### 4.2.2 Použití algoritmu s MFI pro naměřená data

Jak již bylo zmíněno v 4.2.1, použitý algoritmus umožňuje izotropní i anizotropní shlazování. Nejprve bylo zapotřebí vyřadit okrajové detektory, které jsou stíněné komorou.

Porovnání rekonstrukcí pro shlazování podél mřížky tj. v $R, z$ s variantou shlazování podél magnetických siločar s parametrem $B_{\parallel}/B_{\perp} = 1{,}5$ a 20 a s odhadovanou chybou $\sigma = 0,03$ je na obrázku 4.6. Velikost mřížky byla 50 x 50 px. Pro shlazování podél magnetických siločar byl zaveden pro srovnání slabší a silný předpoklad kruhového plazmatu, kdy střed magnetického pole je počítán z dat z Mirnovových cívek a siločáry voleny zjednodušeně jako kruhové, což se dá na tokamaku GOLEM do jisté míry očekávat. Nicméně program lze upravit do varianty využívající výpočet magnetických silokřivek ze znalosti proudů v cívkách a plazmatu. Pro srovnání je zde i rekonstrukce bez virtuálních chord, která vychází velmi podobně, ovšem je zde vidět mírně deformovaný tvar rekonstrukce podél chord a jejich obrysy. Všechny případy konvergovaly s $\chi^2 \approx 1$ v několika krocích. V pravém sloupci jsou zobrazeny data obou detektorů v řezu společně s retrofitem nalezeného řešení k původním datům. Poloha silokřivek je v tomto případě určena jako maximum fitování profilu jednoduchou Gaussovou křivkou. Magnetické silokřivky jsou pro lepší názornost zobrazeny i u ostatních grafů.

V některých případech je vhodné použít podmínku nezápornosti. Záporné hodnoty mohou v rekonstrukci nastat například při různém profilu obou detektorů. Algoritmus poté hledá vyšší řešení mimo zorné pole druhého detektoru, což může být v některých případech pohybu na kraji plazmatu reálné, ale jinak nikoliv. Další možností, kdy mohou záporné hodnoty vzniknout jsou velké gradienty. Při rekonstrukci byly zároveň odebrány krajní detektory AXUVI, které získávají velmi malý signál. Jelikož není použito referenční napětí, které by udržovalo detektor stále ve fotovodivostním režimu, projeví se malý signál přechodem do fotovoltaického režimu a zákmitem. Dalším krokem by tedy mělo být vylepšení zesilovačů o možnost nastavení referenčního napětí. Ofset se pak snadno odečte a v získaném signálu by se neměly projevit přechody. V případě prototypu zesilovačů byla použita jednodušší varianta.

Dalším problémem, který bylo zapotřebí vyřešit bylo velké zesílení, které v případě výbojů kolem 15 ms se stabilizací plazmatu, kdy je emisivita plazmatu vyšší, docházelo k saturaci signálu. Při testovacích výbojích byla běžná hodnota maximálního signálu 1-2 V, kdy cca 6 V je hranice daná regulátorem napětí, takže zde byla jistá předpokládaná rezerva. Zesilovací odpor byl tak na detektoru AXUVII vyměněn z 510 kΩ na 100 kΩ. Nicméně dříve než by mohla být celá soustava otestována, došlo k poškození detektoru, když došlo k průrazu tří fotodiod.




Obrázek 4.6: Rekonstrukce vyzařovaného profilu plazmatu pro výboj č. 27099 pro shlazování podél magnetických siločar a podél souřadnic $R, z$ společně s retrofitem nalezeného řešení vůči původním datům (AXUVI - kanály 1-20, AXUVII - kanály 21-37). Shora - izotropní shlazování, slabé anizotropní shlazování podél magnetických siločar $B_{\parallel}/B_{\perp} = 1{,}5$, silné shlazování $B_{\parallel}/B_{\perp} = 20$, bez shlazování a bez virtuálních chord.

# Kapitola 5

# Diskuse

Kalibrace AXUV byla provedena v laboratořích tokamaku COMPASS AV ČR, jako světelný zdroj byla použita žárovka se stabilizovaným zdrojem o výkonu 40 W. Pro další kalibraci by bylo vhodné vyrobit patici pro uchycení příruby s detektorem, jelikož příruby obou tokamaků nejsou kompatibilní.

Při kalibraci bylo zjištěno, že záleží na volbě kalibrační žárovky a nejvhodnější je použití lineárního uchycení vlákna.

Zároveň byla vyzkoušena zjednodušená kalibrace uvnitř tokamaku pro potvrzení myšlenky, že by se detektory mohly kalibrovat tzv. insitu. V tomto případě byla vzdálenost detektoru od žárovky přibližně 38 cm a signály jednotlivých detektorů jsou zobrazeny v příloze na obr. 1. Použitá metoda neumožňovala přesné nastavení polohy žárovky, přesto jsou výsledky postačující k vyvození závěru, že by taková kalibrace byla možná. Posun žárovky by poté mohl zajistit její pohyb po závitové tyči a zároveň by bylo vodné proces zautomatizovat pomocí krokového motorku s vyčítáním sběru dat po každém posunu žárovky.

Určení výkonu vyzařovaného plazmatem odpovídalo přibližně 1/3 celkového výkonu ohmického ohřevu plazmatu (viz obr. 4.3). Tuto hodnotu však musíme brát s rezervou, jelikož započítáváme citlivost fotodiod jako $S_{eff} = 0,26$ A/W, zatímco pro očekávané energie záření ≈10 eV udává výrobce pro AXUV pokles citlivosti (viz obr. 1.6) a skutečný radiační výkon by tak měl být vyšší.

Pro porovnání polohy plazmatu určené ze signálů AXUV detektorů a tomografické rekonstrukce těchto signálů se snímkem z rychlé kamery a polohou magnetického středu, určenou pomocí Mirnovových cívek, prakticky chybí použitelné výboje, pro něž by všechny diagnostiky fungovaly tak, aby se daly srovnávat. V signálu z Mirnovových cívek se v těchto nepoužitelných výbojích vyskytuje několik zákmitů na počátku, které poté znemožňují správnou integraci. Ukázka srovnání pro nově zavedenou diagnostiku je na obrázku 4.2. Zde je vidět značný rozdíl mezi rekonstrukcí a polohou magnetického středu prakticky po celý výboj až na jeho závěr. To je pravděpodobně způsobeno krátkým výbojem s nedostatečnou energií, kdy těžiště záření může být posunuto směrem ke stěně nemusí odpovídat středu plazmatu. Zároveň se může obecně lišit poloha těžiště záření a poloha magnetického středu. Bylo by proto vhodné srovnání provést pro sérii výbojů po doutnavém výboji a vypékání.

Lepší výsledky byly získány při použití AXUVI se starým zesilovačem pro výboje

č. 24867 a 25112 (viz obr. 4.5 a obr. 4.4 (bez určení polohy magnetického středu)). Je zde vidět i srovnání s rychlou kamerou pro dva výboje, jednak klidnější výboj č. 24867, kdy je vidět mírný rozdíl odhadovaného středu vyzařování od magnetického středu, který je pravděpodobně způsoben tím, že pro testování na konfiguraci se starým detektorem nebyla prováděna kalibrace a poloha byla odhadnuta z dřívější kalibrace. Tyto dvě polohy se však mohou lišit. Vhodnější srovnání nám proto dává rychlá kamera. V případě výboje č. 24867, byla stabilizace použita pro několikanásobný posun plazmatu nahoru a dolů.

Pro tomografickou rekonstrukci je použita Tichonovova regularizace s využitím minima Fisherovy informace jako hodnotícího funkcionálu. Srovnání pro různé typy vyhlazení a použití virtuálních chord je na obrázku 4.6. Zda-li regularizace nezanáší do rekonstrukce chybu, bychom mohli odhalit pomocí NBF, které mají sice horší vlastnosti rekonstrukce, ale nepřidávají další a priory informace [16]

Detektor AXUVII byl cca po měsíci provozu stažen, jelikož došlo k jeho poruše a data pro oba detektory v provozu ve stejném čase jsou tedy limitována na srovnání poloh určené rekonstrukcí vyzařovaného profilu s daty z Mirnovových cívek. Bohužel tak chybí porovnání s rychlou kamerou. Nicméně porovnání polohy plazmatu všech tří diagnostik je k dispozici alespoň pro starý zesilovač (viz obr. 4.5 a 4.4).

Dále by bylo vhodné na zesilovačích místo jednoduchého obvodu přidat referenční napětí, aby se fotodiody stále nalézaly v pracovním režimu a nedocházelo k překmitům. Kvůli zajímavým výbojům po dostupném wall conditioningu jako vypékání a doutnavý výboj by také bylo vhodné snížit zesilovací odpor u obou zesilovačů, jelikož při takových výbojích docházelo k saturaci signálu.

# Závěr

Cílem této práce byla konstrukce nových zesilovačů pro detektory viditelného a slabého rentgenového záření tokamaku GOLEM pomocí AXUV fotodiod. Dalším cílem byla rekonstrukce detektoru AXUVII, kalibrace obou detektorů a jejich zařazení do stávající skupiny diagnostik tokamaku GOLEM společně s vyhodnocením naměřených dat pomocí tomografické rekonstrukce za použití upraveného programu z tokamaku COMPASS.

Pro diagnostiku AXUVI a AXUVII na tokamak GOLEM byly po prototypu navrženy a vyrobeny dva nové transimpedanční zesilovače. Obsahují operační zesilovače na bázi CMOS a jejich ideální zesílení je dáno hodnotou odporu zpětné vazby $R_f = 510$ kΩ. Bylo zjištěno, že při výbojích kolem 15 ms dochází k saturaci výstupního napětí, a proto byla zpětná vazba snížena na $R_{f2} = 100$ kΩ. Tato úprava byla provedena zatím pouze u zesilovače pro AXUVII. Zesilovače byly nejprve otestovány v jednokanálovém provedení, poté byly osazeny na tištěný spoj a otestovány v systému tokamaku GOLEM. Pro návrh desky plošného spoje (viz obr. 3.17) byl použit volně dostupný program KiCad [21].

Značný prostor byl dán i prostorové kalibraci, při níž byl zjištěn značný vliv volby žárovky sloužící jako bodový zdroj, kdy vlákno žárovky může vyzařovat v rovině detekce nehomogenně kvůli rozložení vlákna žárovky. Kalibrace byla nakonec provedena na ÚFP AV pomocí stabilizovaného 40 W zdroje se žárovkou jejíž vlákno je napojeno v lineárním směru. Zjištěné vzdálenosti aperturek od detektorů byly $a_1 = 21,04$ mm a $a_2 = 29,5$ mm. Detekované intenzity vzhledem k polohám kalibrační žárovky jsou uvedeny na obrázku 3.8 a 3.9. Kalibrační koeficienty $K_i$ z rovnice 3.15 jsou uvedeny v tabulce 1.

Detektory byly následně osazeny na tokamak GOLEM. V systému jsme ovšem limitováni sběrem dat, který má jen 36 kanálů, z nichž 1-2 nefungují, zatímco kanálů AXUVI je 20 a AXUVII 17. Z prostorové kalibrace bylo ovšem zjištěno, že krajní kanály AXUVI jsou omezeny portem a tudíž je není možné využít.

Program pro tomografickou rekonstrukci využívá Tichonovovu regularizaci s minimem Fisherovy informace jako hodnotícího funkcionálu. Srovnání pro různé typy vyhlazení a použití virtuálních chord je na obrázku 4.6. Uvedené rekonstrukce konvergovaly pro různé varianty shlazování jak anizotropicky podél magnetických siločar tak se standardním shlazováním pro zvolenou předpokládanou odchylku dat $\sigma_i < 0.03$ a rekonstrukce jsou velmi podobné. Ke konvergenci v potřebných několika krocích však nedošlo v případě velké změny emisivity či při rychlém pohybu plazmatu. Takové snímky jsou pak vyřazeny na základě volitelného kritéria, např. při $|\chi^2 - 1| > 0,05$.

Těžistě získané emisivity bylo porovnáno s polohou středu plazmatu určenou ze signálů Mirnovových cívek v případě nových detektorů (viz obr. 4.2). a věrohodnější výsledek byl získán u delších a stabilnějších výbojů při použití vertikální stabilizace a starého zesilovače (viz obr. 4.5), kde byla zároveň použita rychlá kamera.

Z rekonstruované emisivity $\mathbf{g}$ byl získán odhad vyzářených ztrát plazmatu ve spektrálním oboru citlivosti detektorů, který pro různé výboje odpovídal přibližně 1/3 výkonu ohmického ohřevu plazmatu a zároveň odpovídá výkonu získaného zvlášť ze signálů obou detektorů přepočteného pomocí kalibračních konstant. Srovnání výkonů je na obrázku (4.3). Bylo také zjištěno, že shlazování podél magnetických siločar nemá na výkon určený z rekonstrukce příliš velký vliv a že výkon určený z rekonstrukce a ze signálů jednotlivých detektorů si odpovídají.

Podařilo se tedy vytvořit zesilovače pro oba detektory AXUVI a AXUVII, kalibrovat diagnostiku a následně provést tomografickou rekonstrukci získaných signálů a na základě ní porovnat odhadnutou polohu a zářivý výkon s ostatními diagnostikami, což bylo hlavním cílem této práce.

# Seznam použitých zdrojů


[1] Agency International Energy, *World Energy Outlook 2018*. 2018. doi: 10.1787/weo-2018-en. Dostupné z: https://www.oecd-ilibrary.org/content/publication/weo-2018-en, [cit. 20. 12. 2018].

[2] Anton M., Weisen H., Dutch J. M., Linden W., Buhlmann F., Chavan R., Marletaz B., Marmillod P. and Paris P., X-ray tomography on the TCV tokamak, Plasma Physics and Controlled Fusion, vol. 38, no. 11, p. 1849, 1996. ISSN: 0741-3335.

[3] Byonocore H. M., Brody W. R. and Macovski A., A Natural Pixel Decomposition for Two-Dimensional Image Reconstruction, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. BME-28, p. 69–78. IEEE, 1981.

[4] C. Ingesson L., The Mathematics of some Tomography Algorithms Used at JET. JET-R(99)08, 03 2000.

[5] Camacho F. J. and Granetz S. R., Soft xray tomography diagnostic for the Alcator C tokamak, Review of Scientific Instruments, vol. 57, p. 417–425, 04 1986.

[6] Chen F. F., *Úvod do fyziky plazmatu*. Academia, 1984.

[7] Chien C., *The Hall Effect and Its Applications*. Springer US, 2013. ISBN: 9781475713671. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=TqrVBwAAQBAJ, [cit. 5.1.2019].

[8] Cormack A. M., Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications, Journal of Applied Physics, vol. 34, no. 9, p. 2722–2727, 1963.

[9] Cormack A. M., Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications. II, Journal of Applied Physics, vol. 35, no. 10, p. 2908–2913, 1964.

[10] Dufková E., Bolometrická měření celkového vyzářeného výkonu vysokoteplotního plazmatu tokamaku CASTOR: diplomová práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2008.

[11] Frieden B. R., *Science from Fisher Information: A Unification*. Cambridge University Press, 2004. ISBN: 9780511616907.

[12] Granetz R. S. Smeulders P., X-ray tomography on JET, Nuclear Fusion, vol. 28, no. 3, p. 457, 1988.

[13] Herman G. T., *Image reconstruction from projections : the fundamentals of computerized tomography*. Academic Press San Francisco, 1980. ISBN: 0123420504.

[14] Hutchinson I. H., *Principles of Plasma Diagnostics*. Cambridge University Press, 2005. ISBN: 10 0-521-67574-X.

[15] Imríšek M., Tomografie měkkého rentgenového záření na tokamaku JET: diplomová práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2011.

[16] Ingesson L. C., A Tomographic Reconstruction Method with Generalized Natural Basis Functions and a priori Information, Abingdon, 1999. JET–P(99)46.

[17] Ingesson L. C., Chen H., Helander P. and Mantsinen M. J., Comparison of basis functions in soft x-ray tomography and observation of poloidal asymmetries in impurity density, Plasma Physics and Controlled Fusion, vol. 42, no. 2, p. 161–180, 2000.

[18] Ingesson L. C. and others, Tomography diagnostics: Bolometry and Soft X-ray Detection, Fusion Science and Technology, vol. 53, p. 528–576, 2 2008.

[19] International Atomic Energy Agency , Energy, Electricity and Nuclear Power Estimates for the Period up to 2050, 2017. Dostupné z: http://www-pub.iaea.org/books/IAEABooks/12266/Energy-Electricity-and-Nuclear-Power-Estimates-for-the-Period-up-to-2050, [cit. 19. 12. 2018].

[20] IRD , Brožura International Radiation Detectors pro AXUV/SXUV/UVG, 2011. Dostupné z: https://confluence.aps.anl.gov/download/attachments/6226377/IRD2011.pdf?version=1&modificationDate=1361829923000&api=v2, [cit. 20. 12. 2018].

[21] Kicad , Freeware CAD program pro kreslení plošných spojů, 2018. Dostupné z: http://kicad-pcb.org.

[22] Kikuchi M., Lackner K. and Tran M. Q., *Fusion Physics*. International Atomic Energy Agency, 2012.

[23] Kocman J., Řízení polohy plazmatického prstence na tokamaku GOLEM: diplomová práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2015.

[24] Laboratorní přístroje Newport. Dostupné z: https://www.newport.com/, [cit. 20. 12. 2018].

[25] Leitl B., Bolometrická měření na tokamaku GOLEM: bakalářská práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2014.

[26] Lewit R. M., Reconstruction Algorithms: Transform Methods, In *Reconstruction Algorithms: Transform Methods*, 1983.

[27] Löffelmann V., Tomografie měkkého rentgenového záření pro řízení tokamaku v reálném čase, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská: bakalářská práce, 2012.

[28] Löffelmann V., Praktika FTTF - Tomografie z rychlých kamer, 2015. Dostupné z: http://golem.fjfi.cvut.cz/wiki/TrainingCourses/FTTF/2014-2015/ViktLoff/index, [cit. 10. 1. 2019].

[29] McCaughey D. and Andrews H., Degrees of freedom for projection imaging, Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 25, p. 63–73, 03 1977.

[30] McCracken G. M. Stott P., *Fusion: The Energy of the Universe*. Academic Press, 1st edition, 2005. ISBN: 9780124818514.

[31] Mlynář J., Pixels method computer tomography coordinates, Czechoslovak Journal of Physics, vol. 45, no. 10, p. 799–816, Oct 1995. ISSN: 1572-9486.

[32] Odstrčil M., Tomografie plazmatu na tokamaku COMPASS: bakalářská práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2010.

[33] Odstrčil M., Basic introduction to tomographic reconstruction, 2012. Dostupné z: http://golem.fjfi.cvut.cz/wiki/Education/ExperimentMenu/Tomography/index, [cit. 6. 1. 2019].

[34] Palmisano G. and Palumbo Pennisi G. S., *CMOS Current Amplifiers*. Springer US, 1999. ISBN: 9780792384694. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=Q5PDms6CC7AC.

[35] Radon J., Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Berichte Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften, vol. 69, p. 262–277. Math.-Phys. Kl. P., 1917.

[36] Rivetti A., *CMOS: Front-End Electronics for Radiation Sensors*. CRC Press, 2015. ISBN: 9781466563117. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=Zuf5CQAAQBAJ.

[37] Scheffel J. and Brunsell P., *Fusion physics, introduction to the physics behind the fusion energy*. Stockholm, 2007.

[38] Stacey W. M., *Fusion Plasma Physics*. Wiley, 2005. ISBN: 9783527405862. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=7CdRAAAAMAAJ.

[39] Thorne A. P., *Spectrophysics*. Springer Netherlands, 1st edition, 1988. ISBN: 978-0-412-27470-1.

[40] Thurner S., Hanel R. and Klimek P., *Introduction to the Theory of Complex Systems*. OUP Oxford, 2018. ISBN: 9780192555076.

[41] Úlehla I., Suk M. and Trka Z., *Atomy, jádra, částice*. Academia, Praha, 1990. ISBN: 80-200-0135-2.

[42] Vácha M., Detection systems for measurements of high-temperature plasma radiation on the COMPASS tokamak by fast bolometers and soft X-ray detectors: diplomová práce, Faculty of Mathematics and Physics, 2009.

[43] Řípa M., Mlynář J., Weinzettl V. and Žáček F., *Řízená termojaderná fúze pro každého*. TA. Print, s.r.o., 2011.

[44] Weinzettl V., Bolometric System for the CASTOR Tokamak, Technical description, 2011. Dostupné z: http://http://golem.fjfi.cvut.cz/wiki/Diagnostics/Radiation/Bolometry/EditaD/bol_descr.pdf, [cit. 10. 1. 2019].

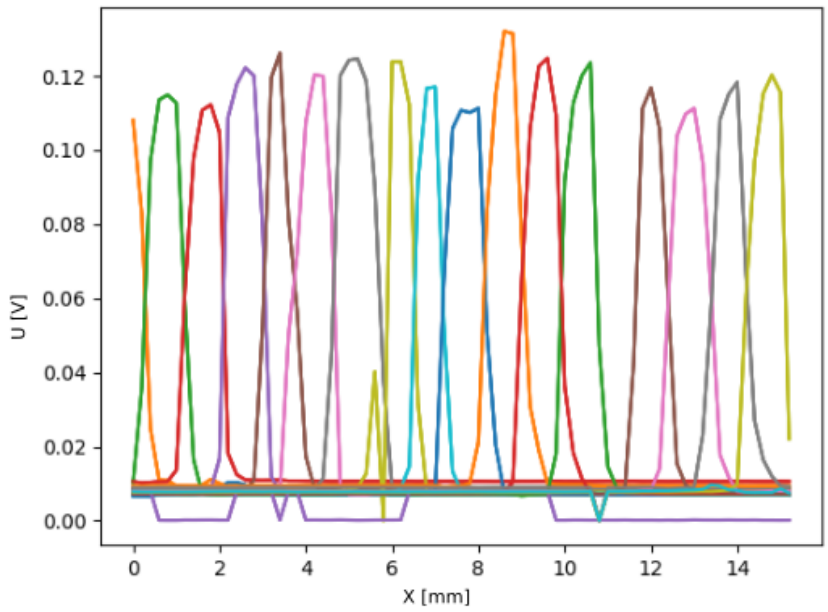
[45] Wesson J., *Tokamaks*. Clarendon Press - Oxford, 2004.

[46] Wiki tokamaku Golem. Dostupné z: http://golem.fjfi.cvut.cz/wiki/, [cit. 5. 1. 2019].

[47] Xiaolin W., An efficient antialiasing technique, ACM Siggraph Computer Graphics, vol. 25, p. 143–152, 07 1991.

[48] Zheng L., *Advanced Tokamak Stability Theory*. IOP Concise Physics, 1st edition, 2015. ISBN: 1627054227.

# Přílohy




Obrázek 1: Naměřené signály pro ověření možnosti insitu kalibrace AXUVI.

| AXUVI | | AXUVII | |
|---|---|---|---|
| **detektor** | **Koeficient [W/V]** | **detektor** | **Koeficient [W/V]** |
| 1 | 769.44 | 1 | 813.32 |
| 2 | 735.84 | 2 | 729.81 |
| 3 | 716.81 | 3 | 675.11 |
| 4 | 699.99 | 4 | 631.05 |
| 5 | 689.11 | 5 | 595.11 |
| 6 | 679.30 | 6 | 566.45 |
| 7 | 673.24 | 7 | 542.78 |
| 8 | 668.08 | 8 | 523.39 |
| 9 | 665.49 | 9 | 506.57 |
| 10 | 664.24 | 10 | 513.42 |
| 11 | 664.74 | 11 | 483.71 |
| 12 | 667.18 | 12 | 476.49 |
| 13 | 670.87 | 13 | 471.19 |
| 14 | 677.39 | 14 | 468.20 |
| 15 | 684.84 | 15 | 467.42 |
| 16 | 696.54 | 16 | 468.92 |
| 17 | 709.49 | 17 | 472.85 |
| 18 | 730.09 | | |
| 19 | 753.70 | | |
| 20 | 802.77 | | |

Tabulka 1: Kalibrační koeficienty pro AXUVI a AXUVII definované ve vztahu 3.14 vypočtené z výsledků klasické kalibrace.