c) $R_2 \neq 0$, malý. Proud v sekundárním obvodě bereme jako v případě transformátoru nakrátko a dosazením dI_2/dt do rovnice pro primární obvod dostaneme rovnici

$$\mathcal{E}_1 - L_1 (1 - k^2) \frac{dI_1}{dt} = \left(R_1 + \frac{n_1^2}{n_2^2} R_2 \right) I_1 .$$

V primárním obvodu tedy působí efektivní indukčnost a efektivní odpor.

2. Kvazistacionární obvody

Nejdříve prozkoumáme takzvané *přechodové stavy* v elektrických obvodech, které nastávají při zapnutí a vypnutí zdroje emn. Na obr. 5.9 jsou znázorněny RC obvod (s odporem a kondenzátorem v sérii) a LC obvod (s odporem a cívkou v sérii) s přepínačem, který umožňuje zapnout a vypnout zdroj konstantního emn.

Je-li U napětí a Q náboj na kondenzátoru, potom v RC obvodu při zapojeném emn máme

$$\mathcal{E} - U = R I , \quad Q = C U , \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

a pro změnu náboje na kondenzátoru máme diferenciální rovnici

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{R C} Q = \frac{\mathcal{E}}{R} .$$

Obecné řešení této rovnice se skládá z obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního (zvláštního) řešení neho-

a) b)

obr. 5.9

mogenní rovnice:

$$Q(t) \;=\; \text{konst}\;.\;\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \;+\; \mathcal{E}\; C\;.$$

Konstantu musíme pak určit vždy z počátečních podmínek. Nehomogenní rovnice odpovídá zapnutému zdroji emn, homogenní rovnice stavu bez zapojeného emn. Zapneme-li zdroj v okamžiku $t = 0$, kdy je kondenzátor nenabitý, poroste na něm náboj (a napětí) podle zákona

$$Q \;=\; \mathcal{E}\; C\; \left(1 \;-\; \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\;, \qquad U \;=\; \frac{Q}{C}\;.$$

Vypneme-li zdroj v okamžiku t_0, kdy bylo na kondenzátoru dosaženo napětí U_0, bude náboj (a napětí) klesat podle zákona

$$Q \;=\; U_0\; C\; \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{RC}}\;.$$

obr. 5.10

Tento průběh změny náboje na kondenzátoru při jeho nabíjení a vybíjení vidíme na obr. 5.10.

Vidíme, že napětí na kondenzátoru nabíhá a klesá s charakteristickou dobou $\tau_C = RC$, které říkáme časová konstanta obvodu. Při vybíjení kondenzátoru klesne za tuto dobu napětí na 1/e-tinu. To je třeba mít na paměti - kondenzátory o velké kapacitě zkratované přes značný odpor potřebují dostatečný čas k tomu, aby napětí na nich pokleslo na bezpečnou hodnotu.

Charakteristický tvar napěťového pulsu na obr. 5.10 může být využit v impulsové technice; vhodnou volbou parametrů obvodu můžeme takto generovat pulsy trojúhelníkového nebo pilovitého průběhu. Podotkněmě, že pilovitá napětí potřebujeme například k rozmítání elektronového paprsku na televizní obrazovce.

Průběh proudu v obvodu dostaneme snadno zderivováním náboje podle času; při nabíjení a vybíjení tak máme:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,, \quad I = -\frac{U_0}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{RC}}\,.$$

Průběh proudu vidíme na obr. 5.11.

Podobně bychom mohli analyzovat poměry v RL obvodu. Pak bychom řešili diferenciální rovnici

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}\,I = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

s výsledkem při zapnutí a vypnutí emn

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right), \qquad I = I_0\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\,.$$

Vidíme, že tentokrát časový průběh proudu odpovídá časovému průběhu náboje u RC obvodu na obr. 5.10 s časovou konstanobr. 5.11

tou $\tau_L = L/R$.

Přejdeme nyní k sériovému RLC obvodu. Platí v něm

$$\mathcal{E} - U - L\,\frac{dI}{dt} = R\,I\,, \qquad I = \frac{dQ}{dt} = C\,\frac{dU}{dt}\,.$$

Nejvhodnější zřejmě bude vyjádřit z těchto vztahů diferenciální rovnici pro U:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L}\,\frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC}\,U = \frac{\mathcal{E}}{LC}\,. \tag{5.20}$$

To je ale rovnice pro vynucené kmity harmonického oscilátoru, kterou jsme v mechanice zapisovali ve tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\delta\,\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\,x = f\,.$$

Přitom jsme označili *vlastní frekvenci* obvodu

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{5.21}$$

(tzv. *Thomsonův vzorec*), *dekrement útlumu*

$$\delta = \frac{R}{2L} \tag{5.22}$$

a frekvenci

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,. \tag{5.23}$$

Uvažme napřed řešení homogenní rovnice, kdy emn $\mathcal{E} = 0$. V případě slabého útlumu ($\delta^2 - \omega_0^2 < 0$) se bude napětí v obvodu měnit harmonicky podle zákona

$$U(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Amplitudu U_0 a fázovou konstantu φ_0 musíme ovšem určit z počátečních podmínek. Proud I najdeme jako

$$I(t) \;=\; C\,\frac{dU}{dt} \;=\; C\,U_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,[-\,\delta\sin(\omega t{+}\varphi_0) + \omega\cos(\omega t{+}\varphi_0)] \;=$$

$$= \;\frac{CU_0\omega}{\sin\alpha}\;\mathrm{e}^{-\delta t}\;[\sin(\omega t+\varphi_0)\;\cos\alpha \;+\; \cos(\omega t+\varphi_0)\;\sin\alpha] \;=$$

$$= \; I_0\;\mathrm{e}^{-\delta t}\;\sin(\omega t+\varphi_0+\alpha)\;.$$

Přitom jsme zavedli veličinu α, která vyjadřuje fázový rozdíl mezi napětím a proudem v obvodu vztahem

$$\mathrm{cotg}\;\alpha \;=\; -\;\frac{\delta}{\omega}\;.$$

Při nulovém útlumu je cotg $\alpha = 0$ a proud je posunut vůči napětí právě o $\pi/2$. Obvod přitom kmitá na vlastní frekvenci $\omega = \omega_0$. Při kritickém útlumu ($\delta = \omega_0$) a silném útlumu ($\delta^2 - \omega_0^2 > 0$) nastává aperiodický režim a napětí i proud v obvodu klesají exponenciálně k nule.

Nechť nyní v obvodu působí harmonické emn $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\cos\Omega t$. Amplituda vynucující síly je tedy $f_0 = \mathcal{E}_0/LC$. Potom musíme řešit nehomogenní rovnici pro vynucené kmity, které je součtem obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Řešení homogení rovnice je vždy tlumeno a brzy klesne k nule. Obvod začne oscilovat na frekvenci vynucených kmitů Ω bez útlumu. Energie pohlcovaná na odporu bude dodávana zdrojem emn. Máme tak řešení

$$U(t) \;=\; U_0\;\sin(\Omega\;t \;+\; \varphi_0),$$

kde amplitudu kmitů U_0 a fázovou konstantu φ_0 můžeme najít stejným způsobem jako v případě vynucených kmitů mechanického oscilátoru. Dostaneme tak

$$\mathrm{tg}\;\varphi_0 \;=\; \frac{\omega_0^2 \;-\; \Omega^2}{2\delta\;\Omega} \;=\; \frac{1}{R}\;\left(\;\frac{1}{\Omega\;C}\;-\;\Omega\;L\;\right)\;, \qquad (5.24)$$

$$U_0 \;=\; \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}} \;=\; \frac{\mathcal{E}_0}{LC}\,\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\;\varphi_0}} \;=\; \frac{\mathcal{E}_0}{RC\Omega}\,\cos\varphi_0\;. \tag{5.25}$$

Pro proud dostaneme

$$I(t) \;=\; C\,\frac{dU}{dt} \;=\; C\,U_0\,\Omega\cos(\Omega t+\varphi_0) \;=\; I_0\;\cos(\Omega t+\varphi_0)\;, \tag{5.26}$$

takže amplituda proudu je

$$I_0 \;=\; C\,U_0\,\Omega \;=\; \frac{\mathcal{E}_0}{R}\,\cos\varphi_0\;. \tag{5.27}$$

Proud a napětí na kondenzátoru jsou tedy vzájemně posunuty o $\pi/2$ a proud je posunut vzhledem k emn o φ_0. Situace je znázorněna na obr. 5.12.

Amplituda napětí (a proudu) dosahuje maxima na rezonanční frekvenci

$$\Omega_r \;=\; \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2} \;=\; \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}}\,, \tag{5.28}$$

a to

$$U_{0max} \;=\; \frac{f_0}{2\,\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} \;=\; \frac{\mathcal{E}_0}{RC\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}\;. \tag{5.29}$$

Při $\Omega = 0$ nastává statická výchylka $U_{0st} = f_0/\omega_0^2$. Tangens φ_0 se mění od $\pi/2$ do $-\pi/2$ a při rezonanci je roven nule. To je rezonance v amplitudě.

Pokud jde o rezonanci v energii, musíme určit závislost I_0^2 na Ω. Pro energii nahromaděnou v obvodu máme

$$W \;=\; \frac{1}{2}\,L\,I_0^2 \;=\; \frac{\mathcal{E}_0^2\;\Omega^2}{2L[\;(\;\omega_0^2-\Omega^2\;)^2+4\;\delta^2\Omega^2\;]}\;. \tag{5.30}$$

obr. 5.12 obr. 5.13

Maximum energie v rezonanci odpovídá

$$W_{max} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{8L\delta^2} .$$

Z rezonanční křivky v energii (obr. 5.13) můžeme určit dekrement útlumu. Z mechaniky víme, že šířka této rezonanční křivky v polovině výšky je rovna právě 2 δ. Činitel jakosti obvodu je pak roven

$$Q = \frac{\omega_0}{2\,\delta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} . \tag{5.31}$$

Zbývá vyšetřit otázku, jaký výkon vyvíjí zdroj emn v RLC obvodu. Okamžitý výkon, závislý na čase je

$$P = \mathcal{E}\, I = \mathcal{E}_0\, I_0 \cos\Omega t \cos(\Omega t + \varphi_0) = \mathcal{E}_0\, I_0 \left(\cos^2\Omega t \cos\varphi_0 - \cos\Omega t \sin\Omega t \sin\varphi_0 \right) .$$

První člen se nazývá výkon činný, druhý výkon jalový. Vystředujeme-li totiž okamžitý výkon v čase, druhý člen vymizí a první dá

$$< P > = \frac{1}{2}\, \mathcal{E}_0\, I_0 \cos\varphi_0 = \mathcal{E}_{ef}\, I_{ef} \cos\varphi_0 . \tag{5.32}$$

Zavedli jsme efektivní hodnoty emn a proudu $\mathcal{E}_{ef} = \mathcal{E}_0/\sqrt{2}$, $I_{ef} = I_0/\sqrt{2}$. Veličinu $\cos\varphi_0$ nazýváme *účiník*. Je-li účiník roven jedné, lze tedy střední výkon určit jako součin efektivních hodnot emn a proudu. Jinak záleží i na přítomnosti kapacity a indukčnosti v obvodu. Maximální výkon je odebírán při rezonanci, naopak blíží-li se φ_0 k $\pm\pi/2$, klesá výkon k nule.

Elektrické obvody v nichž působí harmonicky proměnné emn nazýváme *střídavými*. Také pro ně můžeme používat Ohmův zákon a Kirchhoffova pravidla a řešit je jako elektrické sítě. Musíme však vzít v úvahu, že emn a proudy jsou popsány jednak svými amplitudami jednak fázovými konstantami, mohou být vzájemně fázově posunuty. Sčítání vzájemně fázově posunutých sinusových a kosinusových proudů a napětí by bylo velmi složité. Navíc předpokládáme, že v celé síti je jedna společná úhlová frekvence Ω.

Jeden způsob, jak takové sítě řešit, je přechod ke komplexním obrazům emn a proudů nazývaným *fázory.* Fázory můžeme přitom znázorňovat v komplexní rovině vektorovými diagramy. Provedeme přiřazení

$$A_0 \ \cos(\Omega t + \alpha) \quad \to A_0 \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \ = \hat{A} \ .$$

Lze se přesvědčit, že počítání s goniometrickými funcemi dá touž výslednou amplitudu a fázovou konstantu jako počítání s fázory. Výsledkem je ovšem komplexní číslo; chceme-li dostat časový průběh dané veličiny, stačí vynásobit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$ a vzít reálnou část.

Uvažme výše zkoumaný sériový RLC obvod. Emn a proudu můžeme přiřadit fázory $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0$ a $\hat{I} = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$. Pro fázory můžeme napsat Ohmův zákon v komplexním tvaru jako

$$Z \ = \ \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\hat{I}} \ = \ \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_0} \ = \ Z_0 \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_0} \ . \tag{5.33}$$

Komplexní veličina Z se nazývá *impedance* obvodu. Podle (5.24) a (5.27) zjistíme, že velikost impedance je

$$Z_0 \ = \ \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \ = \ \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$$

a tangens jejího argumentu

$$\mathrm{tg}\ \alpha \ = \ -\mathrm{tg}\ \varphi_0 \ = \ \frac{1}{R}\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) \ .$$

Je to tedy komplexní číslo

$$Z = R + \mathrm{i}\,X = R + \mathrm{i}\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) . \qquad (5.34)$$

Reálnou část impedance R nazýváme *rezistance*, imaginární část X *reaktance*. Ta se skládá z *induktance* ΩL a *kapacitance* $1/\Omega C$. Vodivosti odpovídá převrácená hodnota impedance

$$Y = \frac{1}{Z} = G + \mathrm{i}\,S$$

nazývaná *admitance*. Její reálná část G je *konduktance* a imaginární část S *susceptance*.

1. <u>Paralelní RLC obvod</u>

Na obr. 5.14 je znázorněn paralelní RLC obvod.

Při takovém paralelním zapojení se sčítají admitance:

$$Y = \mathrm{i}\,\Omega\,C + \frac{1}{R + \mathrm{i}\,\Omega\,L}$$

Tato admitance je reálná na rezonanční frekvenci

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

a v ideálním případě $R = 0$ bude na rezonančním kmitočtu nulová. V tom případě se paralelní obvod chová jako nekonečný odpor; všechna energie osciluje v obvodu a neprochází dále.

Bude-li obvod zapojen způsoby znázorněnými na obr. 5.15, 5.16, 5.17, budou odpovídající rezonanční frekvence rovny

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC - R^2C^2}} , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

obr. 5.14 obr. 5.15

obr. 5.16 obr. 5.17

2. Trojfázový proud

Při přenosu průmyslových střídavých proudů se používá trojfázové soustavy. Generátor v elektrárně produkuje tři střídavá napětí, která jsou fázově posunuta vždy o $2\pi/3$. Uspořádáme-li tato napětí do trojúhelníka (obr. 5.18) a budou-li amplitudy všech tří napětí stejné, bude zřejmě součet jejich fázorů nulový:

$$\hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \hat{U}_3 = 0 .$$

Určíme proud protékající kterýmkoli vodičem vedení. Například do vrcholu 3 vtéká větví 2-3 proud $\hat{I}_1 = I_0 e^{i\varphi}$, který se rozdělí na proud $\hat{I}_2 = I_0 e^{i(\varphi+2\pi/3)}$ ve větvi 3-1 a proud $\hat{I} = I_{max} e^{i\alpha}$ vycházející vedením z vrcholu 3. Položíme-li $\varphi = 0$, dostaneme z Kirchhoffova zákona

$$\hat{I} = \hat{I}_1 - \hat{I}_2 = I_0 \left(1 - e^{i2\pi/3} \right) = I_0 \sqrt{3}\, e^{-i\pi/6} ,$$

a tedy

$$I_{max} = \sqrt{3}\, I_0 .$$

Vektorový diagram skládání těchto proudů je na obr. (5.19).

Podobně bychom ukázali, že při uspořádání do hvězdy (obr. 5.20) bude výsledný proud čtvrtým (nulovým) vodičem roven nule. Pro napětí tentokrát platí vztah $U_{max} = \sqrt{3}\, U_0$, takže při efektivní hodnotě napětí mezi dvěma vrcholy 380 V dostáváme mezi kterýmkoli vrcholem a "nulákem" 22O V.

3. Maxwellovy rovnice elektromag-