

# 2. ELEKTROSTATIKA

## 1. Elektrický náboj

Základními stavebními kameny látky jsou elementární částice (elektrony, protony, neutrony), které vytvářejí složitější struktury (atomová jádra, atomy, molekuly). Částice mezi sebou interagují, vzájemně na sebe působí. Dnes známe čtyři typy takového vzájemného působení neboli čtyři druhy sil:

1. gravitační
2. slabé
3. *elektromagnetické*
4. silné.

S gravitačními silami jsme se setkali v mechanice; jejich velikost udává Newtonův gravitační zákon a jejich podstatu se snaží objasnit OTR. Se slabými silami se setkáváme u některých druhů radioaktivních přeměn za účasti neutrina, silné síly drží pohromadě atomová jádra a jsou zdrojem jaderné energie. V roce 1983 se podařilo experimentálně prokázat, že elektromagnetické a slabé síly jsou projevem téže elektroslabé síly, takže se počet základních typů sil zredukoval na tři. V denním životě se vedle gravitace setkáváme především s působením elektromagnetickým, které je také nejlépe prozkoumáno. Síly tření, přilnavost, soudržnost těles a kapilarita, chemické vazby a reakce živé hmoty včetně svalové činnosti, sluneční záření i magnetické síly, to vše má svůj původ v elektromagnetických interakcích.

Elektromagnetické působení se projevuje pouze mezi některými částicemi, o nichž pravíme, že jsou elektricky nabité, že nesou *elektrický náboj*. Tyto částice pak mohou vytvářet složité struktury, mohou se složitým způsobem pohybovat, a elektromagnetické síly mezi těmito strukturami mohou mít velmi složitou povahu - nemusí být centrální ani izotropní, mohou různým způsobem záviset na vzdálenosti a rychlostech částic a nemusí ani splňovat Newtonův zákon akce a reakce.

Podstatu elektrického náboje neznáme a jeho existence je pro nás základní experimentální fakt. Můžeme pouze uvést jeho vlastnosti; na rozdíl od matematických pojmů soubor těchto vlastností nebude nikdy úplný, experimentálně mohou být objevovány další, nové vlastnosti. Stručně tyto vlastnosti shrneme:

1. Náboj neexistuje jako samostatná substance, je vždy *vázán na nabité částice* a charakterizuje jejich elektromagnetické silové působení. Je možné ho zjistit jen prostřednictvím tohoto silového působení; jediný osamocený náboj ve vesmíru by se nijak neprojevoval.

2. Na rozdíl od gravitačních sil jsou síly mezi náboji jak přitažlivé tak odpudivé. To lze vysvětlit nejjednodušeji tak, že existují *dva druhy náboje* - *kladný a záporný*, při čemž náboje stejného znamení se vzájemně odpuzují, náboje opačného znamení se přitahují. S hlediska elektrických sil se nic nezmění, vyměníme-li znaménka u všech nábojů. Ukazuje se, že v přírodě existuje symetrie mezi částicemi a antičásticemi: ke každé částici existuje antičástice s opačným znaménkem elektrického náboje (a některých dalších tzv. kvantových čísel). Tato podivuhodná symetrie souvisí i s vlastnostmi prostoru a času - názorně lze říci, že zrcadlový obraz částice má i opačný náboj.

3. Platí *zákon zachování náboje*. Náboj je nestvořitelný a nezničitelný, při reakcích mezi částicemi je celkový náboj před reakcí vždy roven celkovému náboji po reakci. Celkové množství elektrického náboje v elektricky izolované soustavě (tj. takové, jejíž hranicí nemohou procházet náboje) zůstává stejné. Experimentální důkaz tohoto zákona podal M. Faraday r. 1843.

4. Náboj se nemění při pohybu, je *relativisticky invariantní*. Velikost náboje je stejná ve všech vztažných soustavách. Toto tvrzení podporuje i skutečnost, že atomy a molekuly tvořené nabitými částicemi jsou jako celek elektricky neutrální.<sup>1</sup>

5. Náboj je *kvantován*. Existuje nejmenší možný takzvaný *elementární náboj* a všechny náboje jsou jeho celými násobky. Pro tento fakt nemá fyzika dosud uspokojivé vysvětlení; kdyby se však podařilo experimentálně prokázat existenci takzvaného *magnetického monopolu*, tj. částice nesoucí jen jeden magnetický pól, vyplynulo by kvantování elektrického náboje z teorie kvantové fyziky.

Náš vesmír je elektricky *kvazineutrální*, tj. v každém dostatečně velkém objemu je vždy stejně velký kladný a záporný náboj. Kdykoliv by došlo k oddělení kladných a záporných nábojů, projevíly by se mezi takovými oblastmi obrovské elektrické síly, které by se snažily kvazineutralitu obnovit. Přitom podle posledních poznatků astrofyziky v našem vesmíru převažují částice nad antičásticemi; tato asymetrie je důsledkem malé převahy počtu částic nad antičásticemi na raných stádiích vývoje vesmíru (v poměru asi  $1 : 10^9$ ). Poté, když převážná většina částic anihilovala s antičásticemi za vzniku záření (tzv. reliktové záření), staly se zbylé částice materiálem k tvorbě látkových struktur našeho vesmíru.

Předpokládejme, že máme dva statické (nehybné) bodové náboje ve vakuu ve vzájemné vzdálenosti  $r_{21}$ . *Bodovým nábojem* rozumíme určitou abstrakci, fyzikální model nabitě částice

---

<sup>1</sup>Svazky atomů a molekul se neodchylují v silných elektrických a magnetických polích. Experimentálně to ověřovali v r. 1960 J.G.King na molekulách vodíku a v roce 1963 J.C.Zorn na atomech cesia s přesností až  $10^{-20} e$ , kde  $e$  je elementární náboj. Elektrické náboje protonů a elektronů se v atomech dokonale kompenzují i tehdy, jsou-li tyto systémy tvořeny týmiž částicemi pohybujícími se naprosto odlišným způsobem, například v atomu helia a molekule deuteria.

nebo tělesa, jehož rozměry jsou zanedbatelné ve srovnání se vzdáleností mezi tělesy. Jak uvidíme později, je-li náboj těles konečné velikosti rozložen s kulovou symetrií, můžeme je považovat přesně za bodové náboje umístěné ve středu této symetrie.

Také předpoklad o tom, že náboje jsou statické je abstrakcí - reálné náboje jsou vždy v pohybu. Vzniká proto otázka, zda je elektrostatika, věda o elektrických nábojích v klidu, vůbec oprávněna. Později uvidíme, že její opodstatnění ve skutečnosti vyplývá pouze z možnosti vystředovat rychlé chaotické pohyby nábojů.

Podle *Coulombova zákona* síla, kterou statický bodový náboj  $q_1$  působí na náboj  $q_2$  ve vzdálenosti  $r_{21}$  ve vakuu, klesá se čtvercem vzdálenosti podobně jako síla gravitační a je dána vztahem

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \vec{r}_{21}^0 = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}. \quad (2.1)$$

Tato síla je *centrální* (míří podél spojnice dané jednotkovým vektorem  $\vec{r}_{21}^0$ ), je přitažlivá nebo odpudivá podle toho zda náboje mají nesouhlasná nebo souhlasná znamení (její velikost přitom na znaménkách nábojů nezávisí) a je *izotropní*, tj. nezávisí na směru v prostoru.

Máme-li v prostoru soustavu  $N$  bodových nábojů  $q_\alpha$ , které všechny působí na zkušební náboj  $q_0$ , od něhož jsou vzdáleny  $r_{0\alpha}$ , potom se jejich silové účinky nezávisle vektorově sčítají (*princip superpozice*), takže výsledná síla působící na náboj  $q_0$  bude

$$\vec{F}_0 = k q_0 \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_\alpha}{r_{0\alpha}^2} \vec{r}_{0\alpha}^0. \quad (2.2)$$

Podstatným tvrzením Coulombova zákona je, že síla klesá se čtvercem vzdálenosti; to je ovšem nutno ověřit experimentálně. Prímý experimentální důkaz provedl Ch. A. Coulomb v

roce 1785 pomocí torzních vah, které sám zkonstruoval (obr. 2.1).

Vahadélko z hedvábné navoskované niti délky  $2r$  bylo zavěšeno na tenkém stříbrném drátku délky  $l = 76$  cm. Na jednom konci vahadélka byla malá kulička z bezové duše vyvážená na druhém konci papírovým kotoučkem. Po doteku se stejnou upevněnou elektricky nabitou kuličkou se obě kuličky nabily stejným nábojem a jejich vzájemná odpudivá síla byla vyrovnávána torzní silou drátku. Úhel zkrutu  $\alpha$  mohl být přesně měřen odrazem světelného paprsku zrcátkem Z, celé zařízení bylo umístěno ve skleněném válci a elektricky izolováno. Moment tečné složky Coulombovy síly musí být roven momentu torznímu:

$$rF_t = \frac{\pi}{2} \frac{GR^4}{l} \alpha, \quad F_{21} = \frac{F_t}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

obr. 2.1

( $G$  je modul smyku a  $R$  poloměr drátku).

Přes vysokou citlivost torzních vah dosahovala přesnost Coulombových experimentů 5 - 10% . Později byl experiment zpřesňován a prováděn i pro síly přitažlivé. Coulomb sám měřil tímto způsobem i síly mezi póly dlouhých tyčových magnetů a ustanovil i Coulombův zákon pro náboje magnetické. Dnes víme, že magnetické pole je vytvářeno elektrickými proudy a otázka existence magnetického náboje (monopólu) zůstává stále otevřena.

Přesnější způsob, jak dokázat, že síly mezi bodovými náboji klesají se čtvercem vzdálenosti, je ověřit, že u dutých vodičů sídlí náboje jen na *vnějším* povrchu; jak uvidíme, je to tvrzení ekvivalentní. Byl si toho vědom už H.Cavendish, který tímto způsobem ověřil Coulombův zákon již v roce 1772. Jeho práce byly však publikovány až Maxwellem o sto let později. Moderní přesný experiment tohoto typu provedli v r. 1936 S.J. Plimpton a W.E.Lawton. Zákon převrácených čtverců byl tak experimentálně dokázán s přesností  $10^{-9}$ . Zatím nejsou známy meze platnosti Coulombova zákona - platí jak pro vesmírné vzdálenosti tak pro vzdálenosti jaderné. Existují i další možnosti ověřování tohoto zákona - kdyby se jen nepatrně odchyloval od zákonitosti převrácených čtverců, fotony by musely mít nenulovou klidovou hmotnost a pozorovali bychom disperzi elektromagnetických vln ve vakuu.

Dosud jsme užívali termín elektrický náboj ve dvou významech - jako fyzikální jev, vlastnost částic a jako fyzikální veličinu. Abychom mohli měřit *velikost elektrického náboje*, musíme zvolit konstantu  $k$  v (2.1) a zvolit tak jednotku náboje. V absolutní soustavě jednotek je tato konstanta kladena  $k = 1$ , v námi užívané soustavě SI ji klademe

obr. 2.2

$$k = c^2 \cdot 10^{-7} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 0,8988 \cdot 10^{10} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2} . \quad (2.3)$$

Konstanta v Coulombově zákonu je tak přímo vázána s rychlostí světla ve vakuu. Jednotka pro měření velikosti náboje takto zavedená se nazývá coulomb (C) a má fyzikální rozměr [TI] (čas krát proud).<sup>2</sup> Podle (2.3) jsme zavedli též další konstantu  $\epsilon_0$  nazývanou *permittivita vakua* nebo též elektrická konstanta. Vyjadřuje se v jednotkách farad na metr ( $\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$ ) a má hodnotu  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ . Tato konstanta nemá ovšem žádný bezprostřední fyzikální význam a souvisí pouze s volbou soustavy jednotek SI.

Po zavedení jednotky elektrického náboje se můžeme ptát, jakou má velikost *elementární náboj*, nejmenší možný náboj, jaký nesou elementární částice. Přímý způsob stanovení elementárního náboje (a zároveň důkaz kvantování náboje) představuje *Millikanův experiment* z roku 1911 (viz obr. 2.2). Při tomto experimentu jsou do prostoru mezi vodorovně orientovanými deskami kondenzátoru vstřikovány drobné olejové kapičky a je mikroskopem pozorován jejich pohyb. Systém je umístěn ve vakuové komoře za sníženého tlaku vzduchu a termostatován. Kapičky nesou malé elektrické náboje získané třením při rozstřikování; jejich náboj je možno případně měnit ionizujícím zářením. Pokud na kondenzátor není podáno napětí, budou

---

<sup>2</sup>Coulomb je tedy ampérsekunda.

se kapičky pohybovat vertikálně dolů pod vlivem tíže, vztlaku a odporu prostředí, který je možno popsat Stokesovou silou

$$F_S = 6\pi\eta r v ,$$

kde  $r$  je poloměr kapiček,  $v$  jejich rychlost a  $\eta$  dynamická viskozita vzduchu při daném tlaku. Díky odporu prostředí se rychlost kapiček  $v_g$  ustálí jako konstantní. Podáme-li na kondenzátor napětí, bude se táž kapička pohybovat vzhůru k opačně nabitě desce kondenzátoru, opět konstantní rychlostí  $v_E$ . Změříme-li rychlost kapičky v obou případech, můžeme z pohybových rovnic (označíme  $m$  hmotnost kapičky,  $m'$  hmotnost objemu vytlačeného vzduchu,  $\sigma$  hustotu oleje,  $\rho$  hustotu vzduchu)

$$F_g = mg - m'g - 6\pi\eta r v_g = 0 , \quad F_E = qE - mg + m'g - 6\pi\eta r v_E = 0$$

určit poloměr kapičky (obtížně měřitelný) a její náboj:

$$r = 3\sqrt{\frac{\eta v_g}{2(\sigma - \rho)g}} , \quad q = \frac{6\pi\eta r}{E}(v_g + v_E) .$$

Statistickým proměřováním mnoha kapiček zjistíme, že jejich náboje nejsou rozloženy spojitě, že jsou celými násobky nejmenšího, elementárního náboje. Typické hodnoty pozorované Millikanem byly:  $r = 2 - 4 \mu m$ ,  $E = 10^4 - 10^5 \text{ V.m}^{-1}$ ,  $v \approx 0,1 \text{ mm.s}^{-1}$ . Pro elementární náboj Millikan dostal  $e = (1,591 \pm 0,003) \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Jeho kapičky nesly 5 - 25 elektronů.

I když Millikanův experiment byl později různě zdokonalován, jeho přesnost není příliš vysoká. Jinou možností, jak určit elementární náboj poskytuje elektrolýza. Měřením proudu a doby můžeme určit náboj přenesený ionty v elektrolytu. Jde-li o jednovazné ionty (např.  $\text{Ag}^+$ ), potom k vyloučení jednoho molu stříbra je zapotřebí takzvaného *Faradayova náboje*  $F = 9,649 \cdot 10^4 \text{ C.mol}^{-1}$ . Elementární náboj pak získáme, dělíme-li Faradayův náboj Avogadrovou konstantou:

$$e = \frac{F}{N_A} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} . \quad (2.4)$$

Existuje řada poměrně přesných metod umožňujících měřit takzvaný měrný náboj částic, tj. poměr náboje a hmotnosti částice; jde například o pozorování pohybu nabitých částic v elektrických a magnetických polích. Pro elektron dostáváme měrný náboj  $\frac{qe}{m_e} = -1,759 \cdot 10^{11} \text{ C.kg}^{-1}$ . Pak můžeme ze znalosti náboje částice určit její hmotnost a naopak.

Nabitě částice mohou být rozloženy s velkou hustotou tak, že se náboj může jevit spojitým. Ve skutečnosti ovšem jak představa o soustavě bodových nábojů, tak o spojitě rozloženém náboji jsou pouhými abstrakcemi, modely více či méně vystihujícími skutečný stav. Jsou-li náboje rozloženy v prostoru a je-li v daném objemu  $V$  celkový náboj  $q = \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha$ , můžeme definovat střední hustotu náboje v tomto objemu jako  $\bar{\rho} = \frac{q}{V}$ . Zvolíme-li v okolí daného bodu

o souřadnicích  $x, y, z$  malý objem  $\Delta V$ , který obsahuje náboj  $\Delta q$ , a budeme jej kolem tohoto bodu stahovat, můžeme definovat *objemovou hustotu náboje* vztahem

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} . \quad (2.5)$$

Tento vztah bývá někdy zapisován jako derivace  $\frac{dq}{dV}$ ; není to však korektní, neboť ve skutečnosti neznáme funkční vztah  $q(V)$ . Naproti tomu celkový náboj v daném objemu  $V$  můžeme vyjádřit jako

$$q = \int_V \rho(x, y, z) dV . \quad (2.6)$$

Také tento vztah můžeme považovat za definici objemové hustoty náboje.

Jak uvidíme, všechny veličiny a vztahy můžeme vyjadřovat buď ve formě integrální (vázány na nějaký objem, plochu či křivku) nebo diferenciální (jako funkce souřadnic daného bodu). S tohoto hlediska je náboj veličina integrální a objemová hustota náboje odpovídající veličina diferenciální. Měříme ji zřejmě v  $\text{C.m}^{-3}$ . Vedle objemové hustoty náboje můžeme zavést *plošnou hustotu náboje*  $\sigma$  a *lineární hustotu náboje*  $\tau$ , nahradíme-li objemový integrál v (2.6) integrálem plošným nebo křivkovým. Plošnou hustotu pak měříme v  $\text{C.m}^{-2}$ , lineární v  $\text{C.m}^{-1}$ .

Elektrické náboje se projevují pouze svým silovým působením; to ovšem znamená, že při jejich vzájemném přemísťování je třeba konat práci. Uvažujme nějakou soustavu bodových nábojů rozmístěných v daných bodech prostoru a ptejme se, jak tato soustava vznikla. Můžeme si představovat, že náboje byly původně vzdáleny v nekonečnu a postupně byly přibližovány do výsledných poloh. Vnější síly přitom konaly práci - kladnou, pokud překonávaly odpudivé síly mezi náboji, zápornou, pokud působily proti přitažlivým silám nábojů.

Coulombova síla mezi dvěma náboji, podobně jako Newtonova síla gravitační, může být vyjádřena jako záporně vzatý gradient potenciální energie  $W$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}} .$$

Tato energie závisí pouze na velikostech obou nábojů a jejich vzdálenosti a nikoli na tom, po jaké dráze byl druhý náboj k prvnímu z nekonečna přibližován. Coulombovy síly jsou, podobně jako síly gravitační, konzervativní.

Budeme-li nyní ke dvěma nábojům přibližovat další, uplatní se princip superpozice a výsledná práce nebude záviset ani na pořadí ani na dráze po níž náboje přibližujeme. Tato práce vnějších sil představuje tedy celkovou *elektrostatickou energii soustavy*, která má charakter energie potenciální (je funkcí vzdáleností) a můžeme ji zapsat ve tvaru dvojnásobné sumy

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha, \beta=1, \beta \neq \alpha}^N \frac{q_\alpha q_\beta}{r_{\alpha\beta}} . \quad (2.7)$$

Koeficient  $1/2$  je uveden z toho důvodu že v sumě je každá dvojice nábojů započtena dvakrát.

Uvedeme vlastnosti některých konkrétních nábojových soustav.

### 1. Rovnováha soustavy bodových nábojů

Existují takové způsoby rozmístění bodových nábojů, že všechny náboje jsou v rovnováze, tj. působí na ně nulová výsledná síla. Umístíme například  $n$  stejných nábojů  $q$  symetricky po obvodu kružnice a umístíme do středu kružnice náboj  $q_0$ . K dosažení rovnováhy musíme zřejmě volit pro

$$\begin{aligned} n = 2 & & q_0 &= -\frac{q}{4} \\ n = 3 & & q_0 &= -\frac{q}{\sqrt{3}} \\ n = 4 & & q_0 &= -\frac{2\sqrt{2}+1}{4} q. \end{aligned}$$

Můžeme ověřit, že ve všech těchto případech bude elektrostatická energie rovna nule. Důležitá je ovšem otázka, zda rovnováha těchto soustav je stabilní či labilní. Přitom musíme uvažovat malé vychýlení nábojů z jejich rovnovážných poloh a zjišťovat, zda síly ostatních nábojů budou výchylku dále zvětšovat nebo zda budou vracet náboj do rovnovážné polohy. Můžeme též zjistit, zda potenciální energie jako funkce takové výchylky má maximum či minimum. Tímto způsobem ověříme, že rovnováha soustavy bodových nábojů je *vždy nestabilní* a že náboje nelze udržovat ve stabilní rovnováze čistě elektrostatickými silami. Toto tvrzení je obsahem tzv. *Earnshawovy věty* a později je zdůvodníme obecně.

### 2. Elektrostatická energie lineárního krystalu

Mějme nekonečnou řadu bodových nábojů střídavě kladných a záporných, téže velikosti (například rovné elementárnímu náboji) rozložených podél přímky ve vzájemných vzdálenostech  $a$ . Takovému uspořádání někdy říkáme lineární krystal. Snadno určíme elektrostatickou energii připadající na jeden náboj:

$$W = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} 2 \left( -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots \right) = -2 \ln 2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 a} = -2,30 \cdot 10^{-28} \frac{\alpha}{a}.$$

Jako  $\alpha$  jsme zde označili veličinu  $\alpha = 2 \ln 2 = 1,386$  nazývanou Madelungova konstanta, řádu jednotky. Položíme-li  $a$  rovné řádově typické vzdálenosti iontů v krystalu  $10^{-10}$ m, vidíme, že energie na jeden náboj je záporná a řádově velikosti  $10^{-18}$  joulu. Rovnováha lineárního krystalu vůči příčnému vychýlení je stabilní, vůči podélnému nestabilní.

### 3. Prostorový iontový krystal

Iontové krystaly představují prostorové uspořádání elektrických nábojů. Uvažme například element takového krystalu v podobě krychle o hraně  $a$ , v jejíchž rozích jsou rozmístěny záporné



elementární náboje a v jejímž centru leží kladný elementární náboj. Elektrostatická energie takového krystalu bude

$$W = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left( 12 + \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{16}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad \alpha = 13.6.$$

Výpočet energie prostorového krystalu připadající na jeden iont vyžaduje počítač. Výsledná energie je záporná a liší se od energie lineárního krystalu pouze hodnotou Madelungovy konstanty. Tak pro krystal chloridu sodného dostáváme  $\alpha = 1.747$ , pro oxid zinečnatý  $\alpha = 1.638$  atd. Záporná energie iontového krystalu s klesajícím  $a$  klesá a krystal má tedy tendenci se zhroutit. Jeho stabilitu tedy musí zajišťovat jiné než elektrostatické síly.

#### 4. Kulově symetrický spojitě rozložený náboj

Uvažme objemově nabitou kouli poloměru  $R$  o nábojové hustotě  $\rho$ . Energie takového spojitě uspořádaní náboje se musí rovnat práci vynaložené na jeho vytvoření. Představme si, že jsme kouli vytvářeli tak jako se lepí sněhové koule; ke kulovému náboji poloměru  $r$  jsme vždy přidávali další kulovou slupku tloušťky  $dr$ . Protože kulový náboj se navenek chová jako bodový náboj umístěný v centru, můžeme práci vynaloženou na přidání další slupky přirovnat energii dvou bodových nábojů ve vzdálenosti  $r$ . Integrací pak dostaneme

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{4\pi r^2 \rho dr}{r} = \frac{4\pi R^5 \rho^2}{15\epsilon_0} = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R},$$

kde  $Q$  je celkový náboj koule. Kdybychom považovali například elektron za takovou objemově nabitou kouli, mohli bychom tuto energii přirovnat relativistické klidové energii částice  $m_e c^2$  a určit tak její poloměr. Pro elektron (s vynecháním koeficientu  $3/5$ ) najdeme takzvaný "klasický poloměr elektronu"

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

Přestože takový model elektronu je s hlediska moderní fyziky neudržitelný (není také jasné, které obrovské síly by mohly držet takový náboj pohromadě), odpovídá získaný poloměr přibližně rozměrům elementárních částic.

Pokud by uvažovaný kulově symetrický náboj byl plošný, můžeme jeho energii určit opět tak, že k částečnému plošnému náboji  $Q'$ , který se chová navenek jako bodový náboj v centru, přidáváme další náboj  $dQ'$ . Oba náboje teď zůstávají ve stálé vzdálenosti  $R$ . Pak máme

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{Q' dQ'}{R} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}.$$

## 2. Elektrostatické pole

Vraťme se k soustavě bodových nábojů  $q_1, \dots, q_N$ , které všechny působí na zkušební náboj  $q_0$  sídlící v bodě o souřadnicích  $x, y, z$ . Sílu na náboj  $q_0$  vyjádřenou vztahem (2.2) můžeme zapsat takto:

$$\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}(x, y, z), \quad \text{kde} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_\alpha}{r_{0\alpha}^2} \vec{r}_{0\alpha}^0. \quad (2.8)$$

Vektor  $\vec{E}$ , který jsme zavedli vztahem (2.8), se nazývá *intenzitou elektrostatického pole* vytvářeného soustavou bodových nábojů. Má fyzikální význam síly působící v daném bodě na jednotkový zkušební náboj a měří se v jednotkách newton na coulomb, kterou obvykle zapisujeme jako volt na metr ( $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ ), kde voltem rozumíme joule na coulomb. Vztah (2.8) nám umožňuje určit sílu na daný náboj se strany ostatních nábojů tak, že nejdříve určíme v každém bodě intenzitu elektrostatického pole (pak můžeme zapomenout na náboje, které toto pole vytvářejí) a potom vynásobíme vektor intenzity pole nábojem v daném místě. Znalost rozložení nábojů a znalost intenzity pole, které tyto náboje vytvářejí je ekvivalentní.

Může vzniknout otázka nakolik je elektrostatické pole fyzikálně reálné, nakolik vektor  $\vec{E}(x, y, z)$  popisuje nějaký fyzikální stav prostoru, v němž elektrostatické síly působí. V rámci elektrostatiky nelze tuto otázku zodpovědět, neboť elektrostatické pole se projevuje pouze silovým působením na zkušební náboj, a to můžeme popsat ekvivalentním způsobem superpozicí Coulombových sil se strany ostatních nábojů. Jak uvidíme, teprve časově proměnné, elektromagnetické pole se projevuje jako nová fyzikální realita, schopná existovat mimo elektrické náboje, s vlastní energií, hybností atd. Elektrostatické pole pak můžeme chápat jako zvláštní případ elektromagnetického pole, navíc matematicky vystředovaný, protože reálné náboje nejsou nikdy statické.

Existuje výhodný způsob názorného zobrazování elektrostatického pole *siločarami*. Jsou to křivky, jejichž tečna má v každém bodě směr síly působící na kladný jednotkový zkušební elektrický náboj a hustota siločar je úměrná velikosti této síly. Možnost jejich zavedení vyplývá z Coulombova zákona. Mějme bodový kladný náboj  $q$  a definujme, že z něho vychází  $N$  siločar; ty zřejmě probíhají radiálně po přímkách vycházejících z náboje a jsou v prostoru rozděleny izotropně, se stejnou hustotou ve všech směrech. Veličina  $N$  tedy představuje celkový tok siločar vycházejících z náboje a protínajících kolmo kulové plochy poloměru  $r$  se středem v bodě, kde je umístěn náboj. Hustota toku siločar, tj. počet siločar procházejících kolmo jednotkovou plochy bude  $\frac{N}{4\pi r^2}$ . Budeme-li normovat hustotu toku siločar tak, že jej přirovnáme velikosti intenzity

obr. 2.3

elektrického pole, dostaneme

$$\frac{N}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

a tedy

$$N = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Můžeme tedy říci, že z každého kladného náboje vychází právě  $\frac{q}{\epsilon_0}$  siločar a do záporného náboje stejný počet siločar vstupuje. Kromě toho mohou siločáry také odcházet nebo přicházet z nekonečna. Protože platí zákon zachování náboje a veličina  $q$  se nemění ani za pohybu, můžeme postulovat že celkový počet siločar vycházející z elektrického náboje se zachovává a nemění se ani při pohybu náboje. Pro pohybující se náboje nebude ovšem už platit Coulombův zákon a siločáry se mohou v prostoru různě zhušťovat a zakřivovat, ale žádná se nemůže ztratit ani vzniknout. Můžeme říci, že siločáry jsou jakési "vlasy" elektrického náboje, které mají tu vzácnou vlastnost, že principiálně nemohou vypadávat. Na obr. 2.3 vidíme rozložení siločar bodových nábojů a dvojic nábojů stejného a opačných znamení.

Názorný pojem siločáry ovšem ani nemusíme zavádět. Stačí definovat integrální veličinu *tok intenzity elektrického pole* plochou  $S$  vztahem

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (2.9)$$

obr. 2.4

obr. 2.5

Tento tok je skalární veličina a měří se v jednotkách volt krát metr (V.m). Hustota toku, tj. intenzita elektrického pole je pak odpovídající veličinou diferenciální a je to vektor. Tok vektoru malou rovinnou ploškou je zřejmě maximální, je-li rovnoběžný s normálou k této plošce a nulový, je-li k této normále kolmý; to právě vyjadřuje skalární součin v integrálu (2.9).

Určíme nyní tok intenzity elektrického pole uzavřenou plochou obklopující bodový kladný náboj. Přijmeme přitom dohodu, že tok vytékající z objemu uzavřené plochou budeme považovat za kladný, tok vtékající za záporný. Je-li tato plocha kulová a náboj  $q$  v jejím středu, máme zřejmě

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \oint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Bude-li plocha obklopující náboj obecného tvaru (obr. 2.4), můžeme uvnitř této plochy vést plochu kulovou se středem v náboji a ukázat, že toky oběma těmito plochami jsou stejné.

Vedeme-li kuželovou plochu s malým vrcholovým úhlem, která vytne na kulové ploše plošku  $dS'$  a na obecné ploše plošku  $dS$ , budou toky těmito ploškami  $d\Phi' = E(r) dS'$  a  $d\Phi = E(R) dS \cos\theta$ . Přitom však intenzity pole jsou v převráceném poměru čtverců vzdáleností a velikosti plošek v poměru  $\frac{dS'}{dS} = \frac{r^2 \cos\theta}{R^2}$ . Máme tedy  $d\Phi' = d\Phi$ . Názorně je zřejmé, že každá siločára, která protne myšlenou kulovou plochu, protne i obklopující plochu obecného tvaru. Tento závěr bude platit i tehdy, nebudou-li siločáry rozděleny v prostoru izotropně a dokonce i budou-li zakřiveny. Důkaz lze snadno rozšířit na případ nebude-li plocha konvexní (siločára protne plochu vícenásobně) a bude-li náboj ležet vně plochy; v tomto případě bude zřejmě

tok nulový. Můžeme to zdůvodnit i podle obr. 2.5. Leží-li náboj mimo plochu  $S$ , obklopíme jej opět myšlenou kulovou plochou  $S'$ , která se plochy  $S$  těsně dotýká a propojíme obě plochy malým spojovacím kanálkem. Náboj teď leží uvnitř spojené plochy  $S + S'$  a tok touto plochou je  $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ . Tento tok však připadá celý na kulovou plochu  $S'$ , takže tok plochou  $S$  je nulový.

Bude-li uvnitř uzavřené plochy více nábojů, můžeme použít princip superpozice a zformulovat obecný *Gaussův zákon*:

*Tok intenzity elektrického pole libovolnou uzavřenou plochou je roven celkovému náboji obklopenému touto plochou dělenému  $\epsilon_0$ .*

Matematicky můžeme Gaussův zákon zapsat pro případ bodových nábojů a spojitě rozložených nábojů takto:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV . \quad (2.10)$$

Gaussův zákon jsme sice odvozovali pro pole elektrostatické, ale protože se velikost náboje a tedy i celkový tok siločar vyjádřený jako tok intenzity elektrického pole nemění ani jsou-li náboje v pohybu, můžeme předpokládat, že Gaussův zákon platí zcela obecně i pro pohybující se náboje a časově proměnná elektrická pole. Je to jeden z nejobecnějších přírodních zákonů a ve zvláštním případě statických bodových nábojů z něho plyne zákon Coulombův.

Podstatným tvrzením Gaussova i Coulombova zákona je, že intenzita elektrostatického pole bodového náboje klesá se čtvercem vzdálenosti. Ukážeme, že toto tvrzení je ekvivalentní skutečnosti, že *na vnitřním povrchu dutých vodičů nejsou elektrické náboje*. Představme si tenkostěnnou dutou vodivou kouli nabitou elektrickým nábojem. Protože náboje se mohou v objemu vodiče volně pohybovat, rozmístí se na povrchu vodiče takovým způsobem, aby elektrostatické pole uvnitř vodiče bylo nulové. Kdyby tomu tak nebylo, nastal by další pohyb nábojů ve vodiči a museli bychom vyčkat, až se rozložení nábojů ustálí. Vzhledem ke kulové symetrii můžeme dále očekávat, že rozložení nábojů bude rovněž kulově symetrické, s plošnou hustotou  $\sigma$ .

Vyjdeme-li z předpokladu, že platí Gaussův zákon, můžeme vést uvnitř vodiče myšlenou kulovou Gaussovou plochu. Tok intenzity elektrického pole touto plochou bude roven nule, a tedy i náboj uvnitř musí být nulový. Znamená to, že na vnitřním povrchu vodiče nebudou náboje. Potom i intenzita elektrostatického pole v celé dutině bude rovna nule.

Zpětně vyjdeme z předpokladu, že pole uvnitř dutiny je nulové. V každém bodě dutiny můžeme vést dvojkužel s vrcholem v tomto bodě tak, že nám vytne na opačných koncích kulové plošky  $\Delta S$ ,  $\Delta S'$  (viz obr. 2.6). Prostorový úhel vymezený kuželovou plochou označíme  $\Delta\Omega$ . Nabité plošky můžeme považovat za bodové náboje o velikosti  $\sigma\Delta S$ ,  $\sigma\Delta S'$ . Předpokládejme dále, že pole bodového náboje klesá se vzdáleností jako neznámá funkce  $f(r)$ . Podle principu superpozice vytváří vybraná dvojice plošek v bodě  $A$  pole o velikosti  $E = k\sigma[\Delta S f(r_1) - \Delta S' f(r_2)]$ . Protože však celý povrch koule můžeme takto pokrýt dvojicemi plošek vyřátými úzkými kuželíky, musí být v každém případě příspěvek takových dvojic bodových nábojů roven

obr. 2.6

obr. 2.7

nule. Musí tedy platit

$$\frac{f(r_1)}{f(r_2)} = \frac{\Delta S'}{\Delta S} = \left( r_2^2 \frac{\Delta \Omega}{\cos \theta} \right) : \left( r_1^2 \frac{\Delta \Omega}{\cos \theta} \right) = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Vidíme tedy, že neznámá funkce  $f$  klesá se čtvercem vzdálenosti. Experimentální ověření skutečnosti, že na vnitřním povrchu vodičů nejsou náboje je možno provádět s velkou přesností a ověřovat tak Coulombův, resp. Gaussův zákon (obr. 2.7). Na tomto principu je založen van

de Graaffův elektrostatický generátor (obr. 2.8).

obr. 2.8

Ze střídavého zdroje se přes usměrňovač nabíjí nekonečný pás z pogumovaného hedvábí; pás se pohybuje rychlostí několika desítek metrů za sekundu. Náboj se tak přenáší na vnitřní povrch velké duté vodivé koule a odtud se sám okamžitě přemisťuje na vnější povrch. Tak lze kouli nabít značným nábojem na potenciál několika milionů voltů.

Gaussův zákon (2.10) můžeme pomocí Gaussovy věty vektorové analýzy vyjádřit i v diferenciálním tvaru. Platí

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV .$$

Vzhledem k tomu, že rovnost těchto dvou objemových integrálů musí být splněna pro libovolný objem, musí se rovnat i integrované funkce. Vedle toho z podmínky konzervativnosti elektrostatického pole a s použitím Stokesovy věty máme

$$\Gamma = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 .$$

Dostáváme tak soustavu *Maxwellových rovnic* pro elektrostatické pole:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (2.11)$$

První z těchto rovnic je tedy vlastně Gaussův zákon v diferenciálním tvaru a nazývá se též rovnicí Poissonovou. Druhá rovnice vyjadřuje, že elektrostatické pole je potenciální a umožňuje zavést skalární elektrostatický *potenciál*  $\varphi(x, y, z)$  vztahem

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (2.12)$$

Znaménko u gradientu potenciálu bylo zvoleno tak, aby *potenciální rozdíl*

$$\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 d\varphi = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

vyjadřoval práci vnějších sil při přemísťování jednotkového elektrického náboje proti silám pole. Je-li tato práce kladná, zvyšuje potenciál náboje.

Naproti tomu zavádíme veličinu opačnou potenciálnímu rozdílu, která vyjadřuje práci sil pole a nazývá se *napětí*:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Potenciál je určen s přesností na aditivní konstantu a nulový potenciál můžeme volit kdekoli. Jsou-li všechny náboje rozmístěny v konečné oblasti prostoru, můžeme zvolit nulový potenciál v nekonečnu. Potom

$$\varphi = - \int_{\infty}^{A(x,y,z)} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Je zřejmé, že všechny tři veličiny, potenciál, potenciální rozdíl a napětí mají též fyzikální rozměr a měří se v týchž jednotkách joule na coulomb, kterou nazýváme volt (V).

Zavedením skalárního potenciálu je nyní druhá z rovnic (2.11) splněna automaticky a dosažením do první z nich dostáváme

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

neboli

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.13)$$

Tato rovnice se nazývá *Laplaceova - Poissonova*.

V té části prostoru, kde je hustota nábojů nulová, musí potenciál splňovat *Laplaceovu rovnici*

$$\Delta \varphi = 0, \quad (2.14)$$

s příslušnými okrajovými (hraničními) podmínkami. Funkce, které vyhovují Laplaceově rovnici se nazývají harmonické a mají celou řadu zajímavých vlastností. Jednu z nich vyjadřuje tzv.



”věta o střední hodnotě potenciálu”. Podle ní je *hodnota potenciálu ve středu kulové plochy rovna střední hodnotě potenciálu na této ploše*. Můžeme se o tom přesvědčit jednoduchou fyzikální úvahou. Mějme v nějakém místě náboj  $q$ , který vyvolává v bodě  $A$  potenciál  $\varphi$ . Přivedeme-li do bodu  $A$  z nekonečna náboj  $q'$ , potom energie takto vzniklé soustavy bude rovna  $q'\varphi$ . Náboj  $q'$  se však navenek chová stejně, jako kdyby byl rovnoměrně rozprostřen na kulové ploše se středem v  $A$ , kde náboj  $q$  budí střední hodnotu potenciálu  $\bar{\varphi}$ . Je tedy  $q'\varphi = q'\bar{\varphi}$ . Z věty o střední hodnotě potenciálu například plyne, že v místě, kde nejsou náboje, nemůže mít potenciál minimum a elektrostatické pole tak nemůže udržovat vložený náboj ve stabilní rovnováze (*Earnshawova věta*). Je-li potenciál na hranici nějaké oblasti nulový, nemůže mít nikde v této oblasti extrém a musí zde být tudíž všude roven nule.

V kartézských souřadnicích můžeme Laplaceovu rovnici zapsat jako

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Odtud je rovněž zřejmé, že potenciál nemůže mít extrém - v takovém místě by všechny druhé partiální derivace musely být buď kladné nebo záporné.

Potenciál elektrostatického pole bodového náboje je zřejmě

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (2.15)$$

Soustava  $N$  bodových nábojů tak vytvoří v bodě o souřadnicích  $x, y, z$  potenciál

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\beta} \frac{q_{\beta}}{r_{\beta}}. \quad (2.16)$$

Pomocí (2.16) můžeme zapsat energii soustavy bodových nábojů (2.7) jako

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha} \varphi_{\alpha} \quad (2.17)$$

( $\varphi_{\alpha}$  je potenciál vytvářený všemi ostatními náboji v místě, kde sídlí náboj  $q_{\alpha}$ ). Je-li náboj rozložen spojitě v objemu  $V$ , přejde suma v (2.17) na integrál a s použitím Laplaceovy - Poissonovy rovnice a Gaussova zákona můžeme vyjádřit energii v tomto objemu jako

$$\begin{aligned} W_V &= \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \varphi \Delta \varphi dV = -\frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int_V \operatorname{div}(\varphi \nabla \varphi) dV - \int_V (\nabla \varphi)^2 dV \right] = \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \left[ \oint_S (\varphi \nabla \varphi) dS - \int_V (\nabla \varphi)^2 dV \right]. \end{aligned}$$

Plochu  $S$  ohraničující objem  $V$  můžeme nyní rozpínat do nekonečna; přitom bude integrand v plošném integrálu klesat jako  $\frac{1}{r}$  a v nekonečnu tento integrál vymizí. Zbývá tedy objemový integrál, který se nyní rozprostře na celý prostor:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} E^2 dV = \int_{\infty} w dV. \quad (2.18)$$

obr. 2.9

Zde jsme označili *hustotu energie elektrostatického pole*

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} . \quad (2.19)$$

Energii prostorově rozložených statických nábojů můžeme tedy vyjádřit buď pomocí nábojů a jejich vzdáleností nebo na základě znalosti jimi vyztvářeného elektrostatického pole; oba způsoby jsou matematicky ekvivalentní. Hustotu energie *elektrostatického* pole nemůžeme v prostoru nijak zjistit, fyzikální význam má pouze celková energie soustavy daná integrálem (2.18).

Zabývejme se nyní úlohou určit elektrostatické pole a potenciál daného rozložení elektrických nábojů. Nechť tyto náboje jsou rozloženy v objemu  $V$  a my máme určit pole a potenciál v bodě  $A$  o polohovém vektoru  $\vec{r}$ . Podle principu superpozice můžeme objem  $V$  rozdělit na malé, bodové náboje  $\rho dV$  s polohovými vektory  $\vec{r}'$ . Označme dále vektor průvodiče daného bodového náboje s bodem  $A$  jako  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  (viz obr. 2.9). Intenzitu elektrostatického pole a potenciál pak najdeme integrováním

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z') \vec{R}}{R^3} dV, \quad \varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{R} dV. \quad (2.20)$$

Je-li náboj rozložen plošně nebo lineárně, nastoupí místo objemových integrálů a hustot integrály a hustoty plošné, resp. lineární.

Je otázka, zda integrály (2.20) budou poskytovat konečné a spojitě hodnoty, zejména v tomto případě, bude-li bod  $A$  ležet uvnitř objemu  $V$ . Potom totiž bude ve jmenovateli integrované funkce nula a integrál může, ale nemusí konvergovat. Z obecné teorie potenciálu vyplývá

pro objemové rozložení nábojů:

1. Je-li funkce  $\rho$  konečná a dostatečně hladká uvnitř objemu  $V$ , bude pole  $\vec{E}$  *všude* konečné a spojitě a potenciál  $\varphi$  bude mít navíc i parciální derivace alespoň prvního řádu.

2. Je-li náboj rozložen plošně s hustotou  $\sigma$ , není na nabitě ploše intenzita pole definována a potenciál zde nemá derivaci. Při průchodu touto plochou zůstávají tečné složky intenzity pole spojitě, zatímco normálové se mění skokem o  $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ .

Uvedené hraniční podmínky na nabitě ploše snadno získáme z Gaussovy a Stokesovy věty. Představíme-li si nízký válcový objem těsně přimykající k této ploše, s osou ve směru normály, potom můžeme zanedbat tok pole pláštěm a uvažovat jen tok podstavami  $\Delta S$ . Z Gaussova zákona pak máme

$$(E_{1n} - E_{2n}) \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} .$$

Vedeme-li uzavřenou křivku tak, že dvě její větve délky  $\Delta l$  procházejí těsně podél obou stran plochy, dostaneme ze Stokesovy věty

$$(E_{1t} - E_{2t}) \Delta l = 0 .$$

Na nabitě ploše je tedy potenciál spojitý a pro normálové a tečné složky intenzity pole platí

$$\text{Div } \vec{E} = E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} , \quad |\text{Rot } \vec{E}| = E_{1t} - E_{2t} = 0 . \quad (2.21)$$

Při výpočtu intenzity pole můžeme tedy použít buď přímo první z integrálů (2.20), nebo můžeme vypočítat potenciál (druhý integrál je skalární a tedy jednodušší) a pak určit intenzitu ze vztahu (2.12). Pokud je rozložení nábojů symetrické, může být výhodnější použít přímo Gaussov zákon. V případě nepravidelného rozložení náboje můžeme použít přibližné metody umožňující určit pole v dosti velké vzdálenosti od náboje; o ní pojednáme v následujícím odstavci.

Určíme nyní pole a potenciály některých nábojových uspořádání.

### 1. Nabitá přímka

Mějme elektrický náboj rozložený podél přímky s konstantní lineární hustotou  $\tau$  (obr. 2.10) a určíme intenzitu elektrostatického pole v bodě  $A$  ve vzdálenosti  $r$  od přímky. Uvažme příspěvky dvou nábojových elementů  $\tau dl$  ležících ve stejné vzdálenosti  $l$  na obě strany od paty kolmice spuštěné z bodu  $A$  na přímku. Jejich vektorový součet bude zřejmě kolmý k přímce a bude mířit od přímky, je-li náboj kladný. Jeho velikost můžeme jej zapsat jako

$$dE = 2 \cos \alpha \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\tau dl}{R^2} ,$$

obr. 2.10

kde

$$R = \frac{r}{\cos \alpha}, \quad l = r \operatorname{tg} \alpha, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Po dosazení a integraci máme

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.22)$$

Týž výsledek bychom dostali jednodušším způsobem přímo z Gaussova zákona. Na směr vektoru intenzity můžeme usoudit ze symetrie úlohy a obklopíme-li část přímky souosým válcem o poloměru podstavy  $r$  a libovolné délky  $L$ , máme pro tok intenzity pláštěm válce

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \tau L,$$

odkud ihned plyne (2.22). Pokud jde o potenciál pole, máme

$$\varphi = - \int_{\infty}^r E \, dr = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{konst}. \quad (2.23)$$

Integrační konstantu tentokrát nemůžeme vybrat tak, aby potenciál v nekonečnu byl nulový. Je to pochopitelné, neboť jsme do nekonečna umístili elektrické náboje! Jinak můžeme tuto konstantu ovšem volit libovolně.

## 2. Nabitá rovina a rovinná vrstva

Mějme elektrický náboj rozložený rovnoměrně na rovině s konstantní plošnou hustotou  $\sigma$  a určíme pole a potenciál v bodě  $A$  ve vzdálenosti  $r$  od roviny. Mohli bychom například rozdělit rovinu na dvojice rovnoběžných úzkých přímých pásů symetricky umístěných vzhledem k patě kolmice spuštěné s bodu  $A$  na rovinu, považovat tyto pásy za nabitě přímky a počítat jejich příspěvky. Ze symetrie úlohy je však zřejmé, že vektor intenzity pole bude mířit kolmo od kladně nabitě roviny. Zvolíme-li tedy Gaussovu plochu opět ve tvaru povrchu válce s osou kolmou k rovině a s podstavami libovolného tvaru a plochy  $S$  tak, aby ležely ve vzdálenosti  $r$  na obě strany od roviny, dostaneme

$$E \cdot 2S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S.$$

Odtud dostaneme pro intenzitu pole a potenciál nabitě roviny

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad \varphi = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} r + \text{konst} \quad (2.24)$$

(pole vpravo od svislé roviny budeme brát jako kladné, vlevo jako záporné). Je pozoruhodné, že velikost intenzity pole se nemění se vzdáleností od roviny; předpoklad o tom, že rovina je

obr. 2.11

obr. 2.12

obr. 2.13

nekonečná je ovšem idealizací. Průběh intenzity pole a potenciálu nabitě roviny jsou na obr. 2.11. Z něho je patrné, že na nabitě rovině má normálová složka intenzity pole nespojitost  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

Nabitou rovinu jsme považovali za nekonečně tenkou. Ve skutečnosti jde vždy o nabitou vrstvu konečné tloušťky. Je-li taková vrstva nabitá s konstantní objemovou hustotou  $\rho$  (viz obr. 2.12) a má-li šířku  $a$ , můžeme myšleně rozřezat vrstvu na nekonečně tenké roviny s plošnou hustotou náboje  $d\sigma = \rho dr$  a podle principu superpozice sčítat příspěvky takových rovinných nábojů. Tak dostaneme vně vrstvy

$$E = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\rho dr}{2\epsilon_0} = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}, \quad \varphi = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} r + \text{konst.}$$

Uvnitř vrstvy se odečtou příspěvky vrstev o tloušťce  $\frac{a}{2} + r$  a  $\frac{a}{2} - r$ :

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ \left( \frac{a}{2} + r \right) - \left( \frac{a}{2} - r \right) \right] = \frac{\rho}{\epsilon_0} r, \quad \varphi = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} r^2 + \text{konst.}$$

Protože jde o prostorově rozložený náboj, je pole na hranici vrstvy spojitě, i když tam nemá derivaci. Potenciál ovšem derivaci má.

Z principu superpozice snadno odvodíme průběh pole a potenciálu buzených dvojicemi souhlasně a nesouhlasně nabitých rovin (obr. 2.13). Jsou-li roviny nabitě opačnými náboji

téže velikosti hustoty, bude pole homogenní a bude zcela soustředěno mezi rovinami (deskový kondenzátor). Všimněte si skoků intenzity elektrického pole na nabitých rovinách.



### 3. Nabitá koule

Elektrostatické pole a potenciál objemově či povrchově nabitě koule určíme snadno pomocí Gaussova zákona.<sup>3</sup> Uvedeme proto pouze výsledky graficky zachycené na obr. 2.14.

Je-li koule o poloměru  $R$  nabitá povrchově s plošnou hustotou  $\sigma$ , nese náboj  $Q = 4\pi R^2\sigma$ , je-li nabitá objemově s hustotou  $\rho$ , má náboj  $\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ . Pro pole vně koule ( $r > R$ ) dostáváme v obou případech stejné vztahy jako pro bodový náboj umístěný ve středu koule:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (2.25)$$

Pole uvnitř ( $r < R$ ) povrchově nabitě koule bude zřejmě nulové a konstantní potenciál roven potenciálu na povrchu

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}; \quad (2.26)$$

pro objemově nabitou kouli dostáváme

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r, \quad \varphi = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r^2 + \frac{3}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}. \quad (2.27)$$

Snadno se přesvědčíme, že na hranici koule jsou splněny požadavky na normálové složky pole a potenciál.

Podobným způsobem bychom mohli najít pole a potenciál buzený nekonečným povrchově či objemově nabitým válcem. Zjistili bychom, že navenek se válec chová jako lineární náboj v ose, pole uvnitř povrchově nabitěho válce je nulové, uvnitř objemově nabitěho válce bude

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r, \quad \varphi = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + \text{konst.}$$

### 4. Pole a potenciál na ose nabitě kružnice

---

<sup>3</sup>A velmi nesnadno bez něho, Newton musel řešit obdobnou úlohu pro gravitační pole koule složitým integrováním mnoho let.

obr. 2.15

Mějme kružnici poloměru  $r$  nabitou s lineární hustotou  $\tau$ . Z důvodu symetrie můžeme usoudit, že pole na ose této kružnice bude ležet v této ose, nad rovinou kružnice bude kladné (směr vzhůru) pod rovinou záporné (směr dolů). Určíme, jak závisí toto pole na vzdálenosti od středu kružnice  $h$  (viz obr. 2.15).

Rozdělíme kružnici na dvojice protilehlých elementů délky  $dl$ , které představují bodové náboje  $\tau dl$ , a zintegrujeme příspěvky takových dvojic:

$$E = 2 \cos \alpha \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi r} \frac{\tau dl}{h^2 + r^2} = \frac{\tau r h}{2\epsilon_0 (h^2 + r^2)^{3/2}}, \quad \varphi = \frac{\tau r}{2\epsilon_0 \sqrt{h^2 + r^2}}. \quad (2.28)$$

Intenzita pole nabývá extrémů ve vzdálenostech  $h_m = r/\sqrt{2}$ , ve středu kružnice je pole samozřejmě nulové.

### 3. Elektrický dipól a vektor polarizace

Mějme objem  $V$ , v němž je nějakým způsobem rozmístěn elektrický náboj; celkový náboj v tomto objemu může přitom být nulový i nenulový. Umístěme v tomto objemu počátek souřadnic

obr. 2.16

obr. 2.17

a hledejme potenciál elektrostatického pole v bodě  $A$  ležícím ve vzdálenosti  $r$  od počátku například na ose  $z$ . Objem  $V$  rozdělíme na malé elementy  $dV$ , s nimiž budeme zacházet jako s bodovými náboji. Polohové vektory těchto elementů označíme  $\vec{r}'$ , průvodič z tohoto elementu do bodu  $A$  označíme  $\vec{R}$ , takže  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ . Princip superpozice dává

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{R} dV .$$

Předpokládejme nyní, že bod  $A$  leží ve vzdálenosti mnohem větší než jsou rozměry objemu  $V$ . Potom můžeme považovat poměr  $r'/r$  za malý a rozložit funkci  $\frac{1}{R}$  pod integrálem do Taylorova rozvoje. Jinak můžeme též použít kosinové věty (viz obr. 2.16)

$$R = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{1/2}$$

a binomického rozvoje do druhého řádu  $r'/r$ <sup>4</sup>

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} \left( \frac{r'}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \right] .$$

---

<sup>4</sup>Pro  $\alpha \ll 1$   $(1 + \alpha)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 - \frac{15}{48}\alpha^3 + \dots$

Dosadíme-li tuto řadu do integrálu pro potenciál, dostaneme takzvaný *multipólový rozvoj* elektrostatičkého pole. Potenciál v bodě dostatečně vzdáleném od uvažovaného objemu můžeme vyjádřit jako součet příspěvků, jejichž velikost postupně klesá s rostoucími mocninami vzdálenosti. V teorii elektromagnetického pole se dokazuje, že takový rozvoj vždy existuje a je jednoznačný:

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \dots \right). \quad (2.29)$$

Integrály  $K_n$  nazýváme *elektrickými multipólovými momenty*. Jsou to elektrické charakteristiky daného objemu, které závisí pouze na rozložení náboje v tomto objemu a jeho symetrii. Pokud je rozložení náboje komplikované či neznámé a nemůžeme ho vypočítat, můžeme se pokusit určit multipólové momenty experimentálně z jimi vyvolávaného pole.

Zapišeme první tři multipólové momenty vzhledem k naší volbě bodu  $A$ :

$$K_0 = \int_V \rho dV, \quad K_1 = \int_V r' \cos \theta \rho dV, \quad K_2 = \frac{1}{2} \int_V r'^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho dV.$$

První z multipólových momentů  $K_0$  odpovídá *elektrickému monopólu*, a je to vlastně celkový náboj daného objemu. Ve velké vzdálenosti se malý nabitý objem jeví jako bodový náboj, což je pochopitelné. V případě, že objem bude jako celek nenabitý, stane se rozhodujícím další člen  $K_1$ , který představuje moment *elektrického dipólu*.

Pro naši speciální volbu bodu  $A$ , kdy  $r' \cos \theta = z'$ , odpovídá integrál  $K_1$   $z$ -ové složce vektorové veličiny, kterou nazýváme *elektrický dipólový moment* a který můžeme zapsat pro případ spojitého a nespojitého rozložení nábojů jako

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho dV, \quad \vec{p} = \sum_{\alpha} r'_{\alpha} q_{\alpha}. \quad (2.30)$$

Elektrický dipólový moment je tedy vedle náboje další charakteristika elektrického působení částice či tělesa a měří se v coulombech krát metr. Potenciál odpovídající elektrickému dipólovému momentu je

$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_0}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}. \quad (2.31)$$

Na rozdíl od potenciálu náboje klesá potenciál dipólu se čtvercem vzdálenosti.

Důležitou je otázka, zda definice elektrického dipólového momentu není závislá na volbě počátku souřadnic. Přejdeme-li od počátku souřadnic  $O_1$  k novému počátku  $O_2$ , a označíme vektor spojující oba počátky jako  $\vec{a}$ , bude transformace souřadnic  $\vec{r}'_1 = \vec{r}'_2 + \vec{a}$  a dipólový moment

$$\vec{p}_1 = \sum_{\alpha} r'_{\alpha 1} q_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha 2} q_{\alpha} + \vec{a} \sum_{\alpha} q_{\alpha} = \vec{p}_2 + \vec{a} Q.$$

Elektrický dipólový moment je tedy invariantní vůči volbě počátku tehdy, je-li celkový náboj v objemu nulový. Takový objem se nazývá *polarizovaný*.

Může se stát, že jak celkový náboj v objemu, tak dipólový moment budou nulové. Převládajícím se pak stane následující člen rozvoje odpovídající *elektrickému kvadrupólu*. Definujeme jej obecně jako tenzor o složkách

$$Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho dV, \quad (2.32)$$

v případě bodových nábojů ve tvaru sumy. Z této definice je zřejmé, že tenzor kvadrupólového momentu je symetrický a součet jeho diagonálních momentů je roven nule. V hlavních osách budou všechny nediagonální momenty nulové a bude-li navíc náboj rozložen symetricky kolem osy  $z$ , dostaneme

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz}.$$

Potom je kvadrupólový moment určen jediným prvkem. Kvadrupólový moment bude nezávislý na volbě počátku souřadnic, bude-li jak celkový náboj tak dipólový moment soustavy nulový. V našem multipólovém rozvoji pro potenciál v bodě na ose  $x$  bude kvadrupólový příspěvek k potenciálu

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{Q_{zz}}{r^3}$$

a klesá s třetí mocninou vzdálenosti.

Je-li i kvadrupólový moment soustavy nulový, nastupuje moment *oktupólový*. Tak se s rostoucí symetrií rozložení náboje uplatňují stále vyšší multipóly. Nejvyšší symetrii vykazuje sférické rozložení náboje; v tom případě jsou všechny multipólové momenty nulové a nabitá koule se navenek chová přesně tak jako bodový náboj (monopól).

Všimneme si nyní blíže elektrického dipólu. *Bodovým dipólem* nazýváme elektricky neutrální útvar zanedbatelných rozměrů, který v prostoru vytváří elektrické pole o potenciálu daném vztahem (2.31). Příkladem takových útvarů mohou být například některé molekuly (nazýváme je polární). Intenzita elektrického pole bodového dipólu bude tedy

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) \vec{p} \cdot \vec{r} + \frac{\nabla(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]. \quad (2.33)$$

Je-li bodový dipól umístěn v počátku souřadnic v rovině  $x, z$  a orientován ve směru osy  $z$ , budou mít siločáry pole průběh znázorněný na obr. 2.17. Potom pro složky intenzity pole dostaneme

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pxz}{r^5}, \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right). \quad (2.34)$$

Na ose  $z$  bude  $x = 0$  a

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}, \quad (2.35)$$

obr. 2.18

obr. 2.19

na ose  $x$  bude  $z = 0$  a

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}. \quad (2.36)$$

Bodový elektrický dipól obvykle aproximujeme dvojicí bodových nábojů stejné velikosti a opačných znamení ve vzájemné vzdálenosti  $l$ . Dipól má pak velikost  $p = ql$  a je orientován od záporného náboje ke kladnému. Pole vytvářené takovou dvojicí nábojů ovšem odpovídá poli dipólu (2.33) jen na vzdálenostech  $r \gg l$ . Umístíme-li takový dipól do počátku souřadnic a orientujeme ve směru osy  $z$ , dostaneme v tomto přiblížení z principu superpozice výrazy, (2.35) resp. (2.36). Takovou dvojicí nábojů nazýváme *konečný dipól*.

Umístíme-li dipól do vnějšího homogenního elektrického pole, bude výsledná síla působící na dipól nulová, ale bude naň působit moment silové dvojice (viz obr. 2.18).

$$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (2.37)$$

Při natáčení dipólu v homogenním poli koná tento moment silové dvojice práci

$$A = \int_{\pi/2}^{\alpha} D d\alpha = \int_{\pi/2}^{\alpha} pE \sin \alpha d\alpha = -pE \cos \alpha$$

Dipól tak získá energii závislou na jeho orientaci vůči směru pole. Tato energie je rovna

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (2.38)$$

Odečet této energie jsme zvolili tak, že ji bereme jako nulovou, je-li dipól orientován kolmo k siločarám pole, zápornou je-li orientován souhlasně se směrem pole a kladnou míří-li proti poli (obr. 2.19).

obr. 2.20

V nehomogenním elektrickém poli bude na dipól působit výsledná síla. Na obr. 2.20 jsou znázorněny případy, kdy gradient pole je kolmý na směr siločar a rovnoběžný s ním. V prvním případě můžeme napsat pro  $x$ -ovou složku výsledné síly

$$F_x = F_1 - F_2 = q(E_1 - E_2) \approx q \frac{\partial E_x}{\partial z} \Delta z = p \frac{\partial E_x}{\partial z} \cos \beta = \vec{p} \cdot \text{grad } E_x .$$

I v obecném případě dostaneme přímo z (2.38)

$$\vec{F} = -\nabla W = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \nabla) \vec{E} . \quad (2.39)$$

Obecně lze říci, že dipól po vložení do vnějšího elektrického pole je vždy natáčen souhlasně se směrem pole a pak vtahován do oblasti silnějšího pole.

Atomy a molekuly mohou mít buď své vlastní elektrické dipólové momenty závislé na vnitřním uspořádání elektrických nábojů nebo mohou získat dipólový moment tak, že se ve vnějším poli zpolarizují. Takový získaný dipólový moment se nazývá *indukovaný*, bývá o několik řádů menší než vlastní momenty atomů a molekul a v prvním přiblížení bude zřejmě úměrný intenzitě vnějšího elektrického pole. Koeficient úměrnosti se nazývá *atomovou*, resp. *molekulovou polarizovatelností*:

$$\vec{p}_{ind} = \alpha \vec{E} . \quad (2.40)$$

Odhadneme velikost atomové polarizovatelnosti. Použijeme model vodíkového atomu jako záporně nabitou kouli o Bohrově poloměru  $r_B = 0,529 \cdot 10^{-10}$  m, v jejímž středu sídlí proton. Takto symetrické uspořádání nábojů zřejmě dipólový moment neprojevuje. Nechť se nyní vlivem vnějšího elektrického pole proton vychýlí ze své středové polohy na vzdálenost  $a$ . Indukovaný dipólový moment bude mít tedy velikost  $p = ea$ . Síla, která vyvolala takové posunutí je

silou mezi nábojem  $e$  a záporným nábojem uvnitř koule o poloměru  $a$ . Tuto sílu snadno určíme jako

$$F = eE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 a}{r_B^3}.$$

Odtud

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 r_B^3}{e} E, \quad \alpha = 4\pi\epsilon_0 r_B^3 = 1,65 \cdot 10^{-41} \text{ CV}^{-1} \text{ m}^2.$$

Odtud odhadneme, že například v poli o obrovské intenzitě  $E = 10^6 \text{ V.m}^{-1}$  se jádro atomu vodíku vychýlí o pouhých  $10^{-16} \text{ m}$  a indukovaný dipólový moment bude mít velikost  $p_{ind} = 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ C.m}$ .<sup>5</sup> Odtud si můžeme učinit představu u velikosti vnitroatomových elektrických polí. Molekuly, které mají vlastní dipólové momenty se nazývají polární. Typickým příkladem je molekula vody, jejíž dipólový moment směřuje od atomu kyslíku kolmo směrem k linii atomů vodíku a má velikost  $p = 6,1 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$ . K polárním molekulám patří dále molekula chlorovodíku, amoniaku, oxidu uhelnatého a další. Velikosti vlastních dipólových momentů ukazují na vnitroatomová elektrická pole řádově  $10^{11} \text{ V.m}^{-1}$ .

Podobně jako bodové náboje mohou být i dipóly rozloženy jakoby spojitě v prostoru či na ploše. Představme si nejprve obecnou plochu tvořenou dvěma nekonečně tenkými vrstvami, jednou kladně nabitou s plošnou hustotou náboje  $\sigma$ , druhou záporně nabitou s hustotou  $-\sigma$ . Takovou plochu nazýváme *elektrickou dvojrůstvou*. Vzniká například na povrchu plazmatu, kde pohyblivější elektrony se vzdalují dále od hranice plazmatu než ionty, a má dobré elektrické a tepelné izolační vlastnosti. Můžeme na ni pohlížet jako na plošně rozložené elektrické dipóly orientované ve směru normály a o plošné hustotě  $\vec{p}_S = \sigma \Delta l \vec{n}$ , kde  $\Delta l$  je vzdálenost nabitých ploch. Plocha  $S$  dvojrůstvy bude budit v bodě o polohovém vektoru  $\vec{r}$  elektrické pole o potenciálu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{p}_S \cdot \vec{R}}{R^3} dS = \frac{p_S}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{R} \cdot d\vec{S}}{R^3} = \frac{p_S \Omega}{4\pi\epsilon_0}. \quad (2.41)$$

Zde  $\Omega$  představuje prostorový úhel, pod nímž je vidět plochu dvojrůstvy z bodu  $A$ . To je pozoruhodná vlastnost dvojrůstvy - můžeme ji libovolně zmuchlat a potenciál v daném bodě se přitom nezmění, zachováme-li příslušný prostorový úhel. Plyne odtud také, že při přechodu dvojrůstvou se potenciál mění skokem o  $\frac{p_S}{\epsilon_0}$ .

Přejdeme nyní k prostorovému rozložení elektrických dipólů. Mysleme si nějaký objem, kde jsou dipóly  $\vec{p}$  rozloženy s hustotou  $N$  a všechny jsou souhlasně orientovány. Objemová hustota elektrických dipólů pak bude  $\vec{P} = N\vec{p}$  a nazýváme ji *vektorem elektrické polarizace*. Ve skutečnosti nejsou elementární dipóly (například molekulární dipóly v látce) nikdy všechny souhlasně orientovány a budeme-li se je snažit orientovat vnějším elektrickým polem, bude tepelný chaotický pohyb tuto orientaci opět narušovat. I tak můžeme však zavést vektor polarizace  $\vec{P}$  a definovat jej jako *elektrický dipólový moment jednotky objemu látky*. V případě dokonalého

<sup>5</sup>Přesný kvantově mechanický výpočet dává hodnotu atomové polarizovatelnosti pro vodík 9/2 krát větší. Hodnoty atomové polarizovatelnosti různých atomů a molekul najdeme v tabulkách.



uspořádání dipólů bude mít maximální velikost, v případě dokonale neuspořádaných dipólů bude nulový. Vektor polarizace se měří v jednotkách coulomb na metr čtverečný, a má tedy stejný rozměr jako plošná hustota elektrického náboje.

Určíme potenciál elektrostatického pole buzený v bodě o polohovém vektoru  $\vec{r}$  polarizovaným objemem s vektorem polarizace  $\vec{P}(\vec{r}')$ :

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{R}}{R^3} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_V \operatorname{div}' \left( \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{R} \right) dV - \int_V \frac{\operatorname{div}' \vec{P}(\vec{r}')}{R} dV \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}}{R} - \int_V \frac{\operatorname{div}' \vec{P}(\vec{r}')}{R} dV \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \oint_S \frac{\sigma_v(\vec{r}') dS}{R} + \int_V \frac{\rho_v(\vec{r}') dV}{R} \right],\end{aligned}$$

kde pod  $\operatorname{div}'$  se rozumí divergence derivovaná podle proměnné  $\vec{r}'$ .

Výsledný potenciál je tedy ekvivalentní potenciálu pole buzeného plošným nábojem hustoty  $\sigma_v$  vázaným na povrch tělesa a objemovým nábojem hustoty  $\rho_v$  vázaným uvnitř tělesa, kde

$$\sigma_v = \vec{P} \cdot \vec{n}, \quad \rho_v = -\operatorname{div} \vec{P} \quad (2.42)$$

( $\vec{n}$  je jednotkový vektor normály k povrchu tělesa).

Polarizovaný objem se tedy chová jako určité ekvivalentní rozdělení plošných a objemových nábojů. Vezměme například objem tvaru válce homogenně polarizovaný ve směru osy ( $\vec{P} = \text{konst}$ ). Potom  $\operatorname{div} \vec{P}$  je nulová, normála na plášti válce je kolmá k vektoru polarizace a pole takového válce bude ekvivalentní poli dvou nabitých podstav s opačným znaméním náboje (obr. 2.21). Je-li válec štíhlý, bude představovat konečný elektrický dipól s náboji  $P\Delta S$  a  $-P\Delta S$  na koncích. Přejde-li válec v nekonečnou rovinnou vrstvu, bude představovat dvojici nesouhlasně nabitých rovin s hustotami náboje  $\sigma = P$  a  $\sigma = -P$ . Pole uvnitř takové vrstvy bude tedy mířit proti směru vektoru polarizace a bude rovno

$$E_p = -\frac{P}{\epsilon_0}. \quad (2.43)$$

obr. 2.22

Pole vně vrstvy bude nulové.

Uřídíme ještě pole polarizované koule. Nechť vektor polarizace míří ve směru osy  $z$  a je opět konstantní. Na povrchu koule se vytvoří plošný náboj s proměnnou hustotou

$$\sigma_v = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos \theta .$$

Víme, že pole objemově nabitě koule se navenek chová jako pole bodového náboje v centru. Lze snadno ukázat, že také pole polarizované koule se navenek chová, jako kdyby celý dipólový moment koule

$$\vec{p} = V\vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$$

byl umístěn ve středu koule. Plošné rozložení náboje na povrchu si totiž lze představit tak, jako kdybychom měli dvě vzájemně se překrývající koule objemově nabitě opačnými náboji s nepatrně posunutými středy. V místech překrytí se náboje kompenzují, na rovníku je hustota náboje nulová, na pólech maximální a rovna  $P$  a  $-P$  (viz obr. 2.22).

Potom bude potenciál vně koule potenciálem dipólu a můžeme psát

$$\varphi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^3} z .$$

Uvnitř koule musí potenciál splňovat Laplaceovu rovnici a hraniční podmínku spojitosti na povrchu koule. Tomu však vyhoví pouze potenciál

$$\varphi_i = \frac{1}{3\epsilon_0} Pz .$$

Intenzita elektrostatického pole uvnitř koule je tedy konstantní, míří proti směru vektoru polarizace a je rovna

$$\vec{E}_i = -\nabla\varphi_i = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}. \quad (2.44)$$

Lze se přesvědčit, že tečné složky pole uvnitř a vně koule jsou spojité, normálové složky se mění skokem o  $P/\varepsilon_0$ .

Fakt, že pole uvnitř polarizované koule je homogenní se může zdát překvapivý. Ukazuje se, že je to obecná vlastnost všech polarizovaných těles tvaru elipsoidu, jehož jsou koule a nekonečná rovinná vrstva zvláštními případy.

### 1. Síly působící mezi elektrickými dipóly

Mějme dva dipóly  $\vec{p}_1$ ,  $\vec{p}_2$  v rovině  $x, z$ , přičemž dipól  $\vec{p}_1$  nechť je umístěn v počátku a orientován ve směru osy  $z$ . Pro gradienty složek pole prvního dipólu dostaneme

$$\begin{aligned} \text{grad } E_x &= \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{3z}{r^5} - \frac{15x^2z}{r^7}, 0, \frac{3x}{r^5} - \frac{15xz^2}{r^7} \right) \\ \text{grad } E_z &= \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{3x}{r^5} - \frac{15xz^2}{r^7}, 0, \frac{9z}{r^5} - \frac{15z^3}{r^7} \right). \end{aligned}$$

Složky síly, kterou tento dipól působí na obecně umístěný a orientovaný dipól  $\vec{p}_2$  najdeme jako skalární součiny vektoru  $\vec{p}_2$  a gradientu příslušné složky pole. Tak bude-li druhý dipól umístěn ve vzdálenosti  $z$  na ose  $z$  a souhlasně orientován (obr. 2.23), budou složky síly

$$F_x = \vec{p}_2 \cdot \text{grad } E_x = 0, \quad F_z = \vec{p}_2 \cdot \text{grad } E_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{6p_1p_2}{r^4}.$$

Znaménko minus ukazuje, že jde o sílu přitažlivou.

Bude-li druhý dipól umístěn ve vzdálenosti  $x$  na ose  $x$  a opět souhlasně orientován, dostaneme odpovídající sílu o složkách

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p_1p_2}{r^4}, \quad F_z = 0.$$

Nejzajímavější je případ, když druhý dipól je opět umístěn na ose  $x$ , ale orientován kolmo k prvnímu dipólu, například směrem od něho. Pak dostaneme

$$F_x = 0, \quad F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p_1p_2}{r^4}.$$

Ve všech případech klesá síla se čtvrtou mocninou vzdálenosti, ale jak ukazuje poslední případ, není obecně centrální, nemusí mířit po spojnici obou dipólů. Kdybychom například druhý dipól přibližovali k prvnímu z nekonečna kolmo natočený, nemuseli bychom překonávat žádnou sílu, nekonal bychom práci.

## 2. Energie soustavy dvou dipólů

Energii soustavy dvou dipólů ve vzájemné vzdálenosti  $r$  najdeme obecně jako energii jednoho dipólu ve vnějším poli vytvářeném druhým dipólem:

$$W = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r^3} - \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} \right).$$

## 4. Vodiče v elektrostatickém poli

Zabýváme-li se vlastnostmi elektrostatického pole v látkovém prostředí, musíme rozlišovat pole *mikroskopická* a *makroskopická*. Mikroskopická pole vyvolávaná všemi náboji v látce, protony v atomových jádrech, elektrony v atomech, atd. nemůžeme bezprostředně měřit a nadto se rychle mění v prostoru i čase. Naše měřicí přístroje udávají hodnoty vystředovaných, makroskopických polí, pro něž také formulujeme příslušné Maxwellovy rovnice. S hlediska chování látek v elektrostatickém poli můžeme rozlišit dva základní typy - *vodiče* a *dielektrika* (nevodiče, izolanty). Pod vodičem budeme rozumět těleso, v němž existují volné elektrické náboje, které se mohou pod vlivem elektrického pole v celém objemu volně pohybovat, ale nemohou jej opustit (pak by došlo k takzvané emisi).

Odtud plyne, že po vložení vodiče do vnějšího elektrostatického pole budou se v něm náboje pohybovat tak dlouho, dokud makroskopické pole nevymizí. Stane se to tak, že se elektrické

náboje budou hromadit na povrchu vodiče a vytvářet uvnitř pole opačně orientované k poli vnějšímu. Vodič se tak zpolarizuje, na jeho povrchu se naindukují elektrické náboje. Kdybychom jej uzemnili a část těchto nábojů tak odvedli, a potom opět odizolovali, mohli bychom vodič nabít, aniž bychom na něj přivedli náboje z jiného nabitého tělesa. Tento jev je znám jako *elektrostatická indukce*.

Rozložení nábojů na povrchu vodiče proběhne téměř okamžitě a tak je můžeme opět považovat za statické. Je možné popsat také tak, že elektrické siločáry vnějšího pole dopadající na povrch vodiče se na jeho povrchu zachytí na záporných nábojích a dále budou opět vycházet z kladných povrchových nábojů. Zvětší-li se intenzita vnějšího pole, dodá vodič další volné náboje, které se rozmístí tak, aby vnější pole opět vykompenzovaly. V tom spočívá *stínící účinek vodičů* (Faradayova klec). Nejde tedy vlastně o stínění, vnější pole do prostoru vodiče pronikne, ale je zde vykompenzováno polem polarizačním.

Je-li vnější pole nehomogenní, indukuje se na nenabitěm vodiči elektrický dipólový moment orientovaný souhlasně se směrem pole a takový vodič bude vtahován do oblasti silnějšího pole. Z uvedeného chování vodičů vyplývá zejména

- elektrické náboje jsou rozloženy pouze na povrchu vodiče
- makroskopické elektrostatické pole uvnitř vodiče je nulové
- elektrostatický potenciál je v celém objemu vodiče konstantní
- povrch vodiče představuje ekvipotenciální plochu
- siločáry elektrostatického pole jsou vždy kolmé k povrchu vodiče
- v těsné blízkosti povrchu vodiče je intenzita pole  $E = \sigma/\epsilon_0$  (takzvaná *Coulombova věta*, plyne ihned z Gaussova zákona)
- na hrotech vodičů dochází k prudkým změnám směru siločar a zhuštění ekvipotenciálních ploch. S tím souvisí sršení elektřiny z hrotů a efekt hromosvodu.
- v důsledku silového působení povrchových nábojů vzniká na povrchu vodiče mechanické napětí.

Velikost tohoto mechanického napětí můžeme určit následujícím způsobem. Vyřízneme-li na povrchu vodiče malou plošku  $\Delta S$ , můžeme tuto plošku považovat za rovinnou a pole v těsné blízkosti plošky na obou jejích stranách brát rovno  $\sigma/2\epsilon_0$ . Protože po opětovném vrácení plošky na povrch vodiče musí se pole uvnitř vodiče vynulovat, znamená to, že celý ostatní povrchový náboj vytváří v místě této plošky pole kolmé k povrchu a rovné  $\sigma/2\epsilon_0$ . Na plošku tedy působí síla

$$\Delta F = \sigma \Delta S \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Delta S$$

obr. 2.24

a mechanické napětí je rovno

$$T = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2, \quad (2.45)$$

kde  $E$  je intenzita elektrického pole v těsné blízkosti povrchu vodiče.

Vidíme, že toto napětí je právě rovno objemové hustotě pole v blízkosti vodiče. Tuto skutečnost si můžeme ujasnit myšleným pokusem. Mějme nabitou vodivou kouli, kterou všestranně mechanicky stlačíme. Vykonáme tím práci proti silám mechanického napětí o velikosti  $4\pi r^2 T dr$ . Tím však vytvoříme elektrostatické pole v objemu kulové slupky tloušťky  $dr$ , kde bylo dříve pole nulové. Energie takto vzniklého pole se ovšem musí rovnat vykonané práci.

Mějme nyní v prostoru soustavu vodičů, nabitých či nenabitých. Známe jejich povrchové plochy  $S_i$ , vzájemné geometrické uspořádání, náboje  $Q_i$  a potenciály jednotlivých vodičů  $\varphi_i$ . Náboje se na povrchu vodičů rozloží jednoznačným způsobem, a to tak, aby potenciální energie celé soustavy byla minimální (*Thomsonova věta*). Jejich siločáry budou vzájemně provázány, mezi vodiči vznikne tzv. *kapacitní vazba* (obr. 2.24). Přiblížíme-li k soustavě další, nenabitý vodič, bude se polarizovat a soustava jej bude přitahovat. Tím se zmenší celková potenciální energie.

Protože povrchy vodičů tvoří ekvipotenciální plochy, můžeme formulovat matematickou úlohu na řešení Laplaceovy rovnice s dobře definovanými okrajovými podmínkami. Nazýváme ji *základní úlohou elektrostatiky*:

Najít elektrostatický potenciál  $\varphi(\vec{r})$ , definovaný a spojitý i s derivacemi až do druhého řádu v daném uzavřeném objemu (nebo v celém prostoru), aby vyhovoval Laplaceově rovnici

$$\Delta\varphi = 0$$

a okrajovým podmínkám na plochách  $S_i$

$$\varphi|_{S_i} = \varphi_i = \text{konst.}$$

Je-li oborem celý prostor a jsou-li všechny vodiče v konečnu, musí platit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(\vec{r}) = 0.$$

Lze dokázat, že řešení základní úlohy elektrostatiky existuje a je jediné. Jednoznačnost řešení plyne z věty o střední hodnotě potenciálu. Uvažme dvě různá řešení úlohy  $\varphi, \chi$ , vyhovující týmž okrajovým podmínkám. Podle principu superpozice musí pak být řešením Laplaceovy rovnice také funkce  $\varphi - \chi$ , která bude ovšem na povrchu všech vodičů nulová. Podle věty o střední hodnotě potenciálu musí tato funkce být identicky rovna nule i v prostoru mezi vodiči, takže  $\varphi = \chi$ , čímž je jednoznačnost dokázána.

Při řešení základní úlohy elektrostatiky je problém vybrat z mnoha řešení Laplaceovy rovnice to, které vyhoví okrajovým podmínkám. Existuje na to řada metod, které zkoumá matematická fyzika (metoda elektrostatického zobrazení, metoda konformního zobrazení, metoda Greenových funkcí aj.) Na konci tohoto odstavce se seznámíme s použitím metody elektrostatického zobrazení.

Mějme v prostoru jeden nabitý vodič. Potenciál vytvářený tímto vodičem v libovolném bodě prostoru je zřejmě úměrný jeho náboji a jinak může záviset jen na tvaru a velikosti vodiče. Označíme potenciál na povrchu tohoto vodiče jako  $\varphi_0$ . Poměr náboje a potenciálu na povrchu vodiče

$$C = \frac{Q}{\varphi_0} \quad (2.46)$$

nazýváme *kapacitou vodiče* a měříme ji v jednotkách coulomb na volt nazývaných farad. Snadno ověříme, že kapacita koule o poloměru  $R$  je rovna  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ . Farad je příliš velká jednotka a v praxi užíváme dekadické díly. Tak považujeme-li Zemi za vodivou kouli, zjistíme, že její kapacita je pouhých 710  $\mu\text{F}$ .

Přejdeme-li nyní k soustavě vodičů zjistíme, že náboje na nich budou lineárně záviset na potenciálech všech vodičů, přičemž koeficienty úměrnosti jsou dány pouze geometrickými parametry soustavy:

$$\begin{aligned} Q_i &= C_{11} \varphi_1 + C_{12} \varphi_2 + \dots \\ Q_2 &= C_{21} \varphi_1 + C_{22} \varphi_2 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

neboli zkráceně

$$Q_i = C_{ik} \varphi_k. \quad (2.47)$$

Koeficienty  $C_{ik}$  nazýváme *kapacitní koeficienty*, je-li  $i \neq k$  *influenční koeficienty*. Vyjádříme-li naopak potenciály jako funkce nábojů

$$\varphi_i = B_{ik} Q_k, \quad (2.48)$$

dostaneme takzvané *potenciálové koeficienty*  $B_{ik}$ .

Při nabíjení soustavy vodičů konáme práci, dodáváme soustavě energii. Tato energie by neměla záviset na tom v jakém pořadí a jakou rychlostí vodiče nabíjíme. Zvolme tedy takový postup, že nabíjíme všechny vodiče současně a to tak, aby nabíjení všech vodičů bylo také současně ukončeno. Potenciály a náboje vodičů musí tedy být v každém okamžiku úměrný jejich konečným hodnotám. Jsou-li konečné potenciály a náboje na vodičích  $\varphi_i, Q_i$  a  $t$  bezrozměrný časový parametr měnící se během nabíjení od 0 do 1, budou průběžné hodnoty potenciálů a nábojů  $\varphi'_i = t\varphi_i, Q'_i = tQ_i$ . Výsledná energie pak bude rovna práci vykonané nabíjením všech vodičů

$$W = \sum_i A_i = \sum_i \int_0^{Q_i} \varphi'_i dQ'_i = \sum_i \varphi_i Q_i \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i. \quad (2.49)$$

Na základě energetické úvahy založené na tom, že výsledná energie nezávisí na pořadí nabíjení vodičů lze dokázat, že matice  $C_{ik}$  a  $B_{ik}$  jsou symetrické (*věta o vzájemnosti kapacit*).

Podle (2.49) bude energie jednoho osamocené vodiče rovna

$$W = \frac{1}{2} \varphi_0 Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C \varphi_0^2}{2}. \quad (2.50)$$

Mějme nyní soustavu dvou vodičů (budeme jim říkat elektrody) nabitě stejně velkými náboji opačného znamení tak, že všechny siločáry, které vycházejí z kladné elektrody se uzavírají na záporné. Elektrody mohou mít podobu nekonečně rozlehlých rovnoběžných rovinných desek (tj. desek velkých rozměrů ve srovnání se vzdáleností mezi deskami), koaxiálních válců nebo koncentrických koulí apod. (viz obr. 2.25). Stačí nabít jen jednu z desek a druhou uzemnit; na ní se pak naindukují stejně velký opačný náboj. Elektrické pole bude soustředěno (kondenzováno) v ohraničené oblasti prostoru mezi elektrodami. Uvedené uspořádání nazýváme *kondenzátorem*. Soustava rovnic (2.47) se pak redukuje na

$$\begin{aligned} Q &= C_{11} \varphi_1 + C_{12} \varphi_2 \\ -Q &= C_{21} \varphi_1 + C_{22} \varphi_2. \end{aligned}$$

Rozdíl potenciálů na elektrodách kondenzátoru představuje napětí  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ . Bude-li kondenzátor nenabitý, bude napětí na něm nulové a  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Z této podmínky a také ze symetrie matice kapacitních koeficientů dostáváme  $C_{11} = -C_{12} = -C_{21} = C_{22} = C$  a tak můžeme kapacitní vlastnosti kondenzátoru popsat jedinou veličinou zvanou *kapacita kondenzátoru*:

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (2.51)$$



obr. 2.25

Podobně zjistíme, že energie nahromaděná v kondenzátoru bude

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} . \quad (2.52)$$

Rovinný (deskový) kondenzátor vytváří v prostoru mezi deskami homogenní elektrické pole (s výjimkou okrajových oblastí). Je-li  $S$  plocha desek a  $d$  vzdálenost mezi deskami, bude intenzita pole v takovém kondenzátoru

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

a napětí

$$U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} .$$

Odtud kapacita deskového kondenzátoru

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} . \quad (2.53)$$

Přesnější výpočet by musel započítat i okrajové efekty (viz obr. 2.26). Lze odhadnout, že pokud je poměr vzdálenosti desek k jejich lineárnímu rozměru řádově 0,01, bude oprava na okrajové efekty činit asi 2%.

Dosadíme-li výraz pro kapacitu deskového kondenzátoru do vztahu pro energii kondenzátoru (2.52), dostaneme

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{d} (Ed)^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V = wV ,$$

kde  $w$  je hustota energie elektrického pole a  $V$  objem mezi deskami kondenzátoru.

Snadno můžeme určit *kapacitu kulového kondenzátoru* tvořeného koncentrickými kulovými elektrodami o poloměrech  $R_1 < R_2$ . Je-li například vnější elektroda uzemněna a vnitřní nabitá kladně, bude pole mezi elektrodami totožné s polem bodového náboje. Napětí určíme jako

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2},$$

odkud pro kapacitu máme

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (2.54)$$

Všimněme si, že je-li rozdíl poloměrů elektrod malý, přechází (2.54) ve výraz pro kapacitu deskového kondenzátoru.

V praxi se používají též válcové kondenzátory; za válcový kondenzátor můžeme konec konců považovat i koaxiální kabel s vnitřní a vnější válcovou elektrodou. Vnitřní válec může být plný (drát) nebo dutý. Výpočtem analogickým shora provedenému určíme *kapacitu válcového kondenzátoru a kapacitu koaxiálního kabelu na jednotku délky*:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad C_l = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (2.55)$$

Nakonec můžeme určit *kapacitu na jednotku délky dvojlinky*, tj. dvojice rovnoběžných lineárních vodičů nabitých opačnými náboji (viz obr. 2.27). Přitom sice nejde o kondenzátor v pravém smyslu, neboť pole se rozprostírá v celém prostoru. Přesto však můžeme určit potenciál integrováním pouze mezi vodiči a brát je jako superpozici polí buzených oběma vodiči. Při integrování je podstatné, že vodiče mají vždy konečný průřez; předpoklad o nekonečně tenkých vodičích by vedl k divergujícímu integrálu. Je-li  $R$  poloměr vodičů,  $l$  vzdálenost mezi jejich středy a  $\tau$  lineární hustota náboje na nich, máme

$$U = \int_R^{l-R} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{l-r} \right] dr = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{l-R}{R},$$

a

$$C_l = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{l-R}{R}}. \quad (2.56)$$

obr. 2.27

obr. 2.28

Potřebujeme-li získat kondenzátor o značné kapacitě, můžeme buď zvětšovat plochu elektrod (např. u sítkových kondenzátorů), nebo zmenšovat vzdálenost mezi nimi (elektrolytické kondenzátory, kde  $d$  dosahuje  $10^{-5}$  mm).

Z definice kapacity plynou i známá pravidla o sčítání kapacit kondenzátorů zapojených sériově (kdy se sčítají napětí na elektrodách) a paralelně (kdy se sčítají náboje) (viz obr. 2.28):

$$C_{ser} = \left( \sum_i \frac{1}{C_i} \right)^{-1}, \quad C_{par} = \sum_i C_i. \quad (2.57)$$

#### 1. Elektrostatické zobrazení

obr. 2.29

Ukážeme na způsob řešení základní úlohy elektrostatiky metodou elektrostatického zobrazení. Mějme vodivou uzemněnou vodorovnou rovinu o nulovém potenciálu a nad ní ve výšce  $h$  bodový elektrický náboj  $Q$ . Máme určit elektrostatické pole v celém poloprostoru nad rovinou (s výjimkou bodu, v němž se nachází náboj  $Q$ ). Úloha modeluje například situaci malého nabitého bouřkového mráčka nad zemským povrchem. Potenciál pole musí splňovat Laplaceovu rovnici a okrajovou podmínku  $\varphi = 0$  při  $h = 0$ . Této podmínce lze však vyhovět tak, že umístíme zrcadlově symetricky na druhou stranu roviny (kde nás řešení stejně nezajímá) stejně velký náboj opačného znamení - viz obr. 2.29. Všimněte si, že jsme spolu se zrcadlovým zobrazením změnil i znamení náboje, tedy zkombinovali prostorovou a nábojovou symetrii. Pak můžeme zapomenout na okrajovou podmínku a řešit prostě úlohu o superpozici polí dvou bodových nábojů. Pro body blízko nad uzemněnou rovinou dostaneme řešení

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qh}{(r^2 + h^2)^{3/2}},$$

kde  $r$  značí vzdálenost od paty kolmice spuštěné z náboje na rovinu. Je zřejmé, že pro  $r \gg h$  řešení přechází na pole dipólu. Na rovině se indukuje náboj opačného znamení s plošnou hustotou  $\sigma = \epsilon_0 E$ , která klesá se vzdáleností od paty kolmice. Můžeme si ověřit, že celkový indukovaný náboj bude roven právě  $-Q$ . Lze též spočítat, že polovina celkového indukovaného náboje zaujme plochu kruhu o poloměru  $\sqrt{3} h$ . Náboj  $Q$  bude k vodivé uzemněné rovině přitahován silou

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4h^2}$$

a práce potřebná ke vzdálení náboje od vodivé stěny do nekonečna bude

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4h}.$$

Všimněte si, že energie dvou nábojů  $Q$  a  $-Q$  ve vzájemné vzdálenosti  $2h$  má velikost dvakrát větší.

obr. 2.30

## 2. Kulové elektrostatické zobrazení

Mějme nyní uzemněnou vodivou kouli poloměru  $R$  a ve vzdálenosti  $x_1$  od jejího středu na ose  $x$  bodový náboj  $Q_1$  a hledejme potenciál pole vně koule (obr. 2.30). Pokusme se splnit podmínku nulového potenciálu na povrchu koule umístěním fiktivního náboje  $Q_2$  do vzdálenosti  $x_2$  uvnitř koule. Jsou-li  $r_1$ ,  $r_2$  vzdálenosti nábojů od obecného bodu  $A$  na povrchu koule, musí platit

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right) = 0 .$$

Fiktivní náboj  $Q_2$  musí splňovat podmínku

$$Q_2 = -\frac{r_2}{r_1} Q_1 .$$

Přitom ovšem musí zůstat poměr  $r_2/r_1$  konstantní pro všechny body na kulové ploše. To lze splnit při takzvané kulové inverzi, kdy

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{x_2}{R} = \frac{R}{x_1}, \quad x_1 x_2 = R^2 ,$$

jak se lze přesvědčit z podobnosti trojúhelníků na obrázku. Hraniční podmínku tedy splníme, umístíme-li do bodu o souřadnici  $x_2$  na ose  $x$  náboj  $Q_2$ , přičemž

$$x_2 = \frac{R^2}{x_1}, \quad Q_2 = -\frac{x_2}{R} Q_1 .$$

Na uzemněné kulové ploše se tedy indukuje náboj  $Q_2$  a náboj  $Q_1$  je ke kouli přitahován silou

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1^2 x_1 R}{(x_1^2 - R^2)^2}.$$

Práce potřebná ke vzdálení náboje do nekonečna je

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1^2 R}{2(x_1^2 - R^2)}.$$

Nebude-li koule uzemněna (bude-li izolována), potom zřejmě celkový na ní indukovaný náboj musí být nulový. Musíme pak doplnit uvnitř koule další fiktivní náboj  $-Q_2$  a umístit jej do středu kulové plochy, aby potenciál na ní zůstal konstantní, tj. roven

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{x_1}.$$

Snadno zjistíme, že silové působení mezi nábojem  $Q_1$  a izolovanou vodivou koulí bude nyní

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1^2 R^3 (2x_1^2 - R^2)}{x_1^3 (x_1^2 - R^2)^2}.$$

Práce potřebná ke vzdálení náboje je

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1^2 R^3}{2x_1^2 (x_1^2 - R^2)}.$$

## 5. Dielektrika v elektrostatickém poli

Dielektrika budeme považovat za tělesa tvořená elementárními elektrickými dipóly; jejich dipólové momenty odpovídají momentům atomů a molekul, z nichž dielektrikum sestává. Elektrické náboje jsou tedy v dielektriku vázány a nemohou se volně přemisťovat. Ve vnějším elektrostatickém poli se tyto dipóly budou snažit orientovat ve směru siločar pole a dielektrikum se bude polarizovat. Naproti tomu chaotický tepelný pohyb atomů a molekul bude působit proti polarizaci. Dielektrikum bude vytvářet vlastní polarizační pole, které bude oslabovat pole vnější. Nemůže ho však zcela vykompenzovat jako v případě vodičů. Je to dáno tím, že u vodičů se na vytváření vlastního polarizačního pole podílejí náboje z celého objemu, které putují na povrch, kdežto u dielektrik se mohou uplatnit pouze nevykompenzované náboje na povrchu. Je

obr. 2.31

to vidět na obrázku 2.31. V dielektriku mohou být ovšem vedle vázaných také volné náboje. Budeme proto rozlišovat objemovou hustotu nábojů volných ( $\rho$ ), vázaných ( $\rho_v$ ), a celkovou hustotu  $\rho_c = \rho + \rho_v$ . Hustota vázaných nábojů však souvisí s vektorem polarizace vztahem (2.42). Můžeme tedy psát Maxwellovu rovnici

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho_v) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \operatorname{div} \vec{P}) .$$

Vynásobíme-li tuto rovnici  $\varepsilon_0$ , převedeme  $-\operatorname{div} \vec{P}$  na levou stranu a zavedeme vektor

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} , \quad (2.58)$$

můžeme zapsat soustavu Maxwellových rovnic pro elektrostatické pole v dielektriku jako

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho , \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 . \quad (2.59)$$

Účelnost zavedení vektoru  $\vec{D}$ , který nazýváme *vektorem elektrické indukce*, je v tom, že se pak můžeme omezit pouze na zadání objemové hustoty *volných* nábojů; vlastnosti vázaných nábojů v dielektriku jsou již ve vektoru  $\vec{D}$  obsaženy. Tak Gaussův zákon pro tok elektrické indukce bude znít

$$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \, dV , \quad (2.60)$$

kde  $\rho$  je hustota volných nábojů. Nejsou-li v dielektriku volné náboje, nemají indukční čáry zdroje a musejí se uzavírat do sebe. Také je odtud zřejmo, že na hranici dvou dielektrik, tj. na ploše, kde jsou pouze vázané plošné náboje, budou normálové složky vektoru elektrické indukce spojitě na rozdíl od složek intenzity pole, které zde mají skok  $\sigma_v/\varepsilon_0$ . Naproti tomu



vektor elektrické indukce nemá tak obecný význam jako vektor intenzity elektrického pole, který určuje sílu mezi náboji. Nemůžeme také například udat obecný vztah pro rotaci  $\vec{D}$ .

Soustava rovnic (2.60) nemá plně určené řešení a bylo by ji třeba ještě doplnit o vztah mezi vektory  $\vec{E}$  a  $\vec{D}$ . Z definice je patrné, že tyto vektory nemusí mít obecně ani stejný směr. Vektor  $\vec{P}$  může být konstantní, nezávislý na vnějším elektrickém poli. Taková dielektrika nazýváme *ideálně tvrdými*. Příkladem ideálně tvrdých dielektrik mohou být takzvané *elektrety*, které představují obdobu permanentních magnetů. Získávají se například při tuhnutí směsi určitých pryskyřic, vosků a dalších látek ve vnějším elektrickém poli.

Většina dielektrik se však polarizuje teprve pod vlivem vnějšího elektrického pole. Pokud atomy či molekuly dielektrika mají vlastní elektrické dipólové momenty (takovým dielektrikům se říká *polárními*), budou se tyto dipóly ve vnějším elektrickém poli natáčet ve směru pole. Mluví o tzv. orientační polarizaci. Pokud tyto částice vlastní momenty nemají, budou se v elektrickém poli indukovat. Jak víme, indukované momenty jsou o několik řádů menší než vlastní. V obou případech můžeme očekávat, že pro nepříliš silná pole bude vektor polarizace úměrný intenzitě pole; taková dielektrika nazýváme *ideálně měkkými*. Potom

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (2.61)$$

Konstantu úměrnosti  $\chi$  nazýváme *elektrickou susceptibilitou*.

Pro dostatečně silná pole u některých dielektrik (nazývaných *feroelektrika*) pozorujeme jev *hystereze*. Spočívá v tom, že při růstu intenzity pole se přímá úměrnost (2.61) narušuje, dochází k nasycení (saturaci) polarizace, která se blíží určité hodnotě  $P_s$ . při zmenšování intenzity neklesá již polarizace po původní křivce (takzvaná panenská křivka), ale dielektrikum zůstává i při nulovém poli zpolarizováno na úrovni takzvané *remanentní polarizace*  $P_r$ . Teprve při reverzaci pole na hodnotu *koercitivního pole*  $E_k$  vrací se polarizace k nule. Proces se opakuje s polarizací v opačném směru a hodnota polarizace tak opisuje uzavřenou *hysterezní křivku* (obr. 2.32).

Vraťme se k předpokladu, že mezi polarizací a intenzitou pole platí vztah přímé úměrnosti. Potom můžeme psát

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}. \quad (2.62)$$

Vektor elektrické indukce je tedy úměrný vektoru intenzity elektrického pole s koeficientem úměrnosti  $\varepsilon$ , který nazýváme *absolutní permitivitou* dielektrika. V soustavě jednotek SI, kde byla formálně zavedena rozměrná konstanta  $\varepsilon_0$ , nazývaná permitivitou vakua, je absolutní permitivita součinem této konstanty a bezrozměrné tzv. *relativní permitivity* dielektrika  $\varepsilon_r$ . Pokud vektory elektrické indukce a intenzity pole nemají též směr (například v krystalech nebo v plazmatu umístěném v magnetickém poli), bude mít permitivita charakter tenzoru a dostaneme

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k. \quad (2.63)$$

V dielektriku jsme tedy zavedli veličinu zvanou elektrická indukce, která má v soustavě SI rozměr  $[D] = L^{-2} TI$  a měří se v coulombech na čtverečný metr a elektrický indukční tok  $\Psi$  s rozměrem  $[\Psi] = TI$  a měřený v coulombech.

obr. 2.32

obr. 2.33

Podle (2.62) platí mezi relativní permitivitou a elektrickou susceptibilitou vztah

$$\varepsilon_r = 1 + \chi ; \quad (2.64)$$

Protože v elektrostatice je elektrická susceptibilita vždy kladná, bude relativní permitivita dielektrik větší než 1. Relativní permitivita dielektrika je důležitou makroskopickou charakteristikou jeho elektrických vlastností. Vložíme-li dielektrikum do homogenního elektrického pole mezi deskami rovinného kondenzátoru, vzroste jeho kapacita  $\varepsilon_r$  - krát na

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d} . \quad (2.65)$$

Protože náboj na deskách kondenzátoru zůstává stejný, klesne napětí a intenzita pole v kondenzátoru - dielektrikum pole oslabí. Názorně je to vidět na obr. 2.33. Dielektrikum se polarizuje ve směru původního pole  $\vec{E}_0$  a na hranicích dielektrika vznikají plošné polarizační náboje opačného znamení než jsou náboje na příslušných deskách kondenzátoru. Plošná hustota těchto polarizačních nábojů je přitom rovna  $\pm P$ . Ty vytvoří polarizační pole  $\vec{E}_p = -\vec{P}/\varepsilon_0$  a pro výsledné pole a polarizaci můžeme psát

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}, \quad \vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E} . \quad (2.66)$$

Vyjádříme-li odtud výsledné pole a polarizaci vzhledem k původnímu poli ve vakuu, dostaneme

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} \vec{E}_0, \quad \vec{P} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \vec{E}_0 \quad (2.67)$$

Odtud je zřejmo, že elektrické pole v dielektriku je oslabováno  $\varepsilon_r$  - krát. V případě nehomogenního pole můžeme vždy vzít dostatečně malý objem, v němž lze pole považovat za homogenní (obr. 2.34). Tak pro Coulombův zákon a objemovou hustotu elektrického pole v dielektriku můžeme nyní psát

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2}, \quad w = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} . \quad (2.68)$$

Z vlastností vektorů  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  plynou též podmínky pro změnu jejich složek na rozhraní dvou dielektrik o permitivitách  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  (viz obr. 2.35). Na tomto rozhraní jsou plošně rozloženy pouze vázané náboje, takže normálové složky  $\vec{D}$  jsou spojitě. Spojitými zůstávají také tečné složky vektoru  $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$ , takže máme

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}, \quad (2.69)$$

neboli

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2, \quad E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 .$$

obr. 2.34

obr. 2.35

Dělením těchto vztahů dostáváme "zákon lomu" elektrických siločar (indukčních čar), který se liší od Snelliova zákona lomu světla:

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (2.70)$$

Měřením relativní permitivity dielektrik zjistíme, že existují různé skupiny takových látek, které se svým chováním, v elektrickém poli značně liší. Navíc tato permitivita jeví i teplotní závislost, kterou můžeme v prvním přiblížení vyjádřit jako

$$\varepsilon_r = C_1 + \frac{C_2}{T}. \quad (2.71)$$

Tak pro nepolární dielektrika nacházíme  $C_2 \approx 0$  a hodnoty statické permitivity  $\varepsilon_r \approx 1 - 10$ :

látka	$\varepsilon_r$
vodík	1,00026
vzduch	1,00060
oxid uhličitý	1,00097
olej	2,24
benzen	2,28
skla	3,7 – 7,0
chlorid sodný	6,0x

Pro polární dielektrika  $C_1 \approx 1$  a  $\varepsilon_r \approx 10 - 100$ :

ethanol	25,0
nitrobenzen	35,7
voda	81

Ve dvacátých letech byla zkoumána nová skupina látek zvaných *feroelektrika* (někdy též *seignettoelektrika*), které jevíly extrémně vysoké hodnoty relativní permitivity (řádově  $10^4$ ) a u nichž byl pozorován jev hystereze. Poprvé byly tyto vlastnosti pozorovány u Seignettovy soli (vínan sodnodraselný), jiným feroelektrikem je titaničitan barnatý aj. Ve feroelektrickém stavu existují v látce celé oblasti spontánní polarizace, zvané domény, které se pak ve vnějším poli orientují. Feroelektrický stav trvá jen pod tzv. *Curieovou teplotou*, při níž látka přechází do paraelektrického stavu a její permitivita prudce klesá.

Permitivita dielektrik se mění v případě časově proměnných elektrických polí; například permitivita vody ve vysokofrekvenčním poli (optických frekvencí) klesá až na hodnotu 1,77. Vedle feroelektrik existují též látky zvané *antiferoelektrika*, u nichž permitivita pod Curieovým bodem s rostoucí teplotou roste. Feroelektrické látky vykazují též takzvaný *piezoelektrický jev* spočívající v tom, že elastickou deformací se mění elektrická polarizace krystalu. Inverzní jev se nazývá *elektrostrikcí*; při změně pole, které má za následek změnu elektrické polarizace, nastává elektrostriční deformace. Piezoelektrický jev jeví i některé krystaly, které nejsou feroelektrické; klasickým příkladem je křemen, u něhož byl tento jev P. Curieem v r. 1880 poprvé pozorován. Povrchová hustota náboje u piezoelektrických krystalů je úměrná mechanickému napětí. Piezoelektrická konstanta činí pro křemen  $2,3 \cdot 10^{-12} \text{ CN}^{-1}$ , pro krystal ADP  $5,0 \cdot 10^{-11} \text{ CN}^{-1}$ , pro Seignettovu sůl  $2,3 \cdot 10^{-9} \text{ CN}^{-1}$  apod. Piezoelektrický jev má značné uplatnění při generaci ultrazvuku, stabilizaci kmitočtu apod. Souvisí s dalším, tzv. *pyroelektrickým* jevem, který byl poprvé pozorován u turmalínu, kdy při zahřátí dielektrika dochází k objemovým změnám a objevují se povrchové náboje.

### 1. Dielektrická koule ve vnějším elektrostatickém poli

Určíme intenzitu elektrického pole a polarizaci v objemu dielektrika kulového tvaru ve vnějším elektrostatickém poli  $\vec{E}$ . Budeme řešit napřed obecnější úlohu o kouli poloměru  $R$  z dielektrika s permitivitou  $\varepsilon_i$  obklopené dielektrikem o permitivitě  $\varepsilon_e$ . Na základě řešení (2.44) budeme předpokládat, že pole uvnitř koule bude homogenní a úměrné vnějšmu poli  $\vec{E}$ , pole vně koule bude superpozicí homogenního pole  $\vec{E}$  a pole dipólu, jehož moment bude rovněž úměrný poli  $\vec{E}$ . Do středu koule umístíme počátek sférické soustavy souřadnic, osu  $z$  vedeme ve směru elektrického pole  $\vec{E}$  a úhel  $\theta$  odečítáme od tohoto směru. Pro pole uvnitř a vně koule máme tedy

$$\vec{E}_i = a \vec{E}, \quad \vec{E}_e = \vec{E} + b \left( \frac{3Ez\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{E}}{r^3} \right),$$

kde  $a$  a  $b$  jsou konstanty, které musíme určit z hraničních podmínek  $E_{ti} = E_{te}$ ,  $D_{ni} = D_{ne}$  při  $r = R$ . Máme tedy

$$a E \sin \theta = E \sin \theta - b \frac{E \sin \theta}{R^3},$$

$$\varepsilon_i a E \cos \theta = \varepsilon_e \left[ E \cos \theta + \frac{3bE \cos \theta}{R^3} - \frac{bE \cos \theta}{R^3} \right].$$

obr. 2.36

obr. 2.37

Z první podmínky dostaneme vztah mezi konstantami  $a$ ,  $b$

$$a = 1 - \frac{b}{R^3}$$

a z druhé

$$\varepsilon_i \left(1 - \frac{b}{R^3}\right) = \varepsilon_e \left(1 + \frac{2b}{R^3}\right),$$

odkud

$$\frac{b}{R^3} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i},$$

takže

$$E_i = \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} E. \quad (2.72)$$

Mějme nyní kouli z měkkého dielektrika, kterou vložíme do vnějšího elektrického pole (obr. 3.36). Pole uvnitř této koule bude homogenní, bude mířit ve směru vnějšího pole  $E_0$  a položíme-li v (2.72)  $\varepsilon_e = \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_i = \varepsilon_r \varepsilon_0$ , dostaneme pro pole uvnitř koule

$$E_k = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_0. \quad (2.73)$$

K témuž výsledku dospějeme, budeme-li pole uvnitř koule považovat za superpozici pole  $E_0$  a pole polarizované koule (2.44). Ze vztahů

$$E_k = E_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0} P, \quad P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) E_k$$

plyne

$$E_k = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_0, \quad P = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} E_0. \quad (2.74)$$

Bude-li dielektrikum tvrdé, bude vektor  $\vec{P}$  konstantní, na vnějším poli nezávislý.

Máme-li v elektrickém poli obecně dielektrický elipsoid, bude pole uvnitř elipsoidu

$$\vec{E}_{el} = \vec{E}_0 - N \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}, \quad (2.75)$$

kde  $N$  se nazývá *depolarizační faktor*. Příklad  $N = 0$  odpovídá nekonečně dlouhému válci, jehož osa je rovnoběžná s polem,  $N = 1/3$  kouli,  $N = 1/2$  válci s osou kolmou k poli,  $N = 1$  rovinné vrstvě. Je-li elipsoid obecně velmi protáhlý ve směru pole, depolarizační faktor klesá. Naopak v plochém elipsoidu je depolarizační faktor blízký jedničce a pole v něm je blízké  $E_0/\varepsilon_r$ .

Určíme ještě energii polarizované dielektrické koule ve vnějším poli. U tvrdého dielektrika jde zřejmě o energii dipólu ve vnějším poli:

$$W = -(\vec{P} \cdot \vec{E}_0) V, \quad (2.76)$$

kde  $V$  je objem koule. V případě měkkého dielektrika se přičítá energie potřebná ke zpolarizování dielektrika. Změní-li se vektor polarizace o  $d\vec{P}$ , změní se energie koule o  $(E_0 \cdot d\vec{P}) V$ . Protože  $\vec{P} = k\vec{E}_0$ , bude celková práce

$$A = V \int_0^P \vec{E}_0 \cdot d\vec{P} = kV \int_0^P \vec{P} \cdot d\vec{P} = \frac{1}{2} (\vec{E}_0 \cdot \vec{P}) V.$$

Energie koule z měkkého dielektrika tedy bude

$$W = -\frac{1}{2} (\vec{P} \cdot \vec{E}_0) V. \quad (2.77)$$

## 2. Kulová dutina v dielektriku

Mějme nyní nekonečné měkké dielektrikum, v němž je homogenní elektrické pole s intenzitou  $\vec{E}$ , a v něm kulovou dutinu poloměru  $R$  (obr. 2.37). Pole uvnitř dutiny určíme z (2.72), kde položíme  $\varepsilon_i = \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_e = \varepsilon_r \varepsilon_0$ :

$$E_d = \frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1} E. \quad (2.78)$$

Někdy je třeba určit pole v kulové dutině v tvrdém dielektriku, které zůstává homogenně zpolarizováno i po vyříznutí dutiny nebo v dutině vyříznuté pouze myšleně. Potom pole v dutině bude superpozicí homogenního pole  $\vec{E}$  od něhož odečítáme pole polarizované koule

(na hranicích dutiny zůstávají naindukovány povrchové náboje opačného znamení než náboje odebrané s koulí). Potom z rovnic

$$E_d = E + \frac{1}{3\varepsilon_0}P, \quad P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

dostaneme

$$E_d = \frac{\varepsilon_r + 2}{3} E. \quad (2.79)$$

### 3. Clausiův - Mosottihovo vztah

Z mikroskopické teorie dielektrika lze určit vztah mezi atomovou polarizovatelností a elektrickou susceptibilitou, resp. relativní permitivitou dielektrika. U nepolárních látek jej vyjadřuje tzv. *Clausiův - Mosottihovo vztah*. Výsledná polarizace je zřejmě dána součtem indukovaných elektrických dipólů v jednotce objemu. Je-li koncentrace atomů rovna  $n$ , dostáváme s použitím (2.40)

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \vec{E} = \alpha n \vec{E}.$$

Odtud

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\alpha n}{\varepsilon_0}, \quad \chi = \frac{\alpha n}{\varepsilon_0}. \quad (2.80)$$

Přitom jsme však nebrali v úvahu polarizační pole, tj. vzájemné působení mezi dipóly. Při malé koncentraci částic (plyny) je můžeme zanedbat. Ne tak u kapalin a pevných látek. Za předpokladu, že vliv ostatních dipólů můžeme vyjádřit makroskopicky, tj. zanedbat v podstatě chaotická mikroskopická pole vyvolávaná nejbližšími sousedními atomy, obklopíme daný atom myšlenou kulovou plochou a použijeme výrazu pro pole uvnitř kulové dutiny v dielektriku (2.79). Tak dostaneme

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) E = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} E_d = \alpha n E_d,$$

takže

$$\varepsilon_r = \frac{1 + \frac{2\alpha n}{3\varepsilon_0}}{1 - \frac{\alpha n}{3\varepsilon_0}}, \quad \chi = \frac{\frac{\alpha n}{\varepsilon_0}}{1 - \frac{\alpha n}{3\varepsilon_0}}. \quad (2.81)$$

Uvedené výrazy vyjadřují Clausiův - Mosottihovo vztah. Vidíme, že takto určená hodnota permitivity dielektrika je teplotně nezávislá (pokud se nemění koncentrace). Při malých hodnotách  $n$  přechází výsledek (2.80) v (2.81).

### 4. Debyeova - Langevinova teorie orientační polarizace

Všimněme si nyní permitivity polárních dielektrik. Vedle konstantní, teplotně nezávislé složky atomové polarizovatelnosti se zřejmě uplatní uspořádávání již existujících dipólových



momentů ve vnějším poli, tj. orientační polarizovatelnost. Je možno očekávat, že s růstem teploty a rychlosti chaotického pohybu se bude toto uspořádání narušovat a celková polarizace se bude zmenšovat. Je-li koncentrace dipólů  $n$ , jejich velikost  $p$  a označíme-li  $\theta$  úhel, který svírá dipól se směrem pole, bude zřejmě velikost vektoru polarizace dána vztahem

$$P = n p \langle \cos \theta \rangle .$$

Je tedy třeba určit střední hodnotu  $\cos \theta$ . Protože na tomto kosinu závisí energie dipólu v elektrickém poli vztahem

$$\langle \cos \theta \rangle = -\frac{1}{pE} \langle W \rangle ,$$

jde o to určit střední hodnotu energie. Předpokládáme-li Boltzmannovo rozdělení pro počet dipólů s energií  $W$

$$n_W = \text{konst} e^{-\frac{W}{kT}}$$

( $k$  je Boltzmannova konstanta), dostaneme integrováním

$$\langle \cos \theta \rangle = -\frac{1}{pE} \frac{\int_0^\infty W e^{-\frac{W}{kT}} dW}{\int_0^\infty e^{-\frac{W}{kT}} dW} = \frac{\int_0^\pi \cos \theta e^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta} = \text{cotgh } a - \frac{1}{a} = L(a) .$$

Zde jsme označili bezrozměrnou proměnnou  $a = (pE)/(kT)$ . Výsledek integrování dá takzvanou Langevinovu funkci  $L(a)$ , kterou lze rozložit do řady pro malé hodnoty  $a$ :

$$La = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \dots .$$

Uvážíme-li jen první člen tohoto rozvoje, dostaneme

$$P = \frac{npa}{3} = \frac{np^2}{3kT} E, \quad \chi = \frac{np^2}{3\varepsilon_0 kT}, \quad \varepsilon_r = 1 + \frac{np^2}{3\varepsilon_0 kT} . \quad (2.82)$$

Jeví-li dielektrikum atomovou i orientační polarizovatelnost, bude teplotní závislost relativní permitivity dána jako (2.71) s konstantami

$$C_1 = 1 + \frac{\alpha n}{\varepsilon_0}, \quad C_2 = \frac{np^2}{3\varepsilon_0 k} . \quad (2.83)$$

Získaný výsledek platí ovšem za řady zjednodušujících předpokladů ( $pE \ll kT$ , nepřilíš velká koncentrace dipólů, možnost jejich volného otáčení, možnost zanedbat vzájemné působení mezi

dipóly), které nemusí být vždy splněny.

## Příklady

2.1 Dvě stejné malé kuličky o hmotnostech  $m = 1$  g visí na dvou nitích délky  $l = 1$  m. Nabijeme-li je souhlasným nábojem stejné velikosti  $q$ , rozestoupí se tak, že niti budou svírat pravý úhel. Určete velikost náboje  $q$ .

$$[1, 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}]$$

2.2 Na dvou stejných vodních kapkách je po jednom přebytečném elektronu, přičemž síla elektrického odpuzování je stejně velká jako síla gravitačního přitahování. Určete poloměr kapek.

$$[7, 63 \cdot 10^{-5} \text{ m}]$$

2.3 Tři náboje  $-e$ ,  $e$ ,  $-e$  jsou umístěny v uvedeném pořadí ve stejných vzdálenostech  $a$ . Určete síly působící na každý náboj a elektrostatickou energii soustavy.

$$\left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e^2}{4a^2}, \quad - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{3e^2}{a} \right]$$

2.4 Najděte takové geometrické uspořádání jednoho protonu a dvou elektronů na jedné přímce, aby elektrostatická energie soustavy byla nulová.

$$\left[ -e, -e, e, \text{ poměr vzdáleností } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$$

2.5 Najděte energii potřebnou k umístění čtyř elektronů do vrcholů čtyřstěnu o hraně  $a = 10^{-10}$  m, v jehož středu je proton.

$$[- 1, 226 \cdot 10^{-18} \text{ J}]$$

2.6 Atomová jádra těžkých prvků můžeme považovat za koule nabitě s objemovou hustotou náboje  $\rho = \frac{4}{3} \cdot 10^{25} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$ . Jak se změní elektrostatická energie při symetrickém rozpadu jádra uranu na dvě stejná jádra palladia?

$$\left[ \Delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right) = 6,65 \cdot 10^{-11} \text{ J} \right]$$

2.7 Bodový náboj je umístěn a) ve středu krychle, b) v jednom z rohů krychle. Určete tok intenzity elektrického pole každou ze stěn krychle.

$$\left[ \frac{1}{6} \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \frac{1}{24} \frac{q}{\epsilon_0}, \quad 0 \right]$$

2.8 Tenká tyč nabitá s lineární hustotou náboje  $\tau$  je umístěna na ose  $z$  mezi body  $z = a$ ,  $z = -a$ . Určete potenciál v bodech na ose  $x > 0$ .

$$\left[ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right]$$

2.9 Určete potenciál ve středu destičky nabité nábojem  $Q$ , má-li destička tvar a) kruhu o poloměru  $R$ , b) čtverce o straně  $a$ .

$$\left[ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}, \quad \frac{Q}{\pi\epsilon_0 a} \ln(1 + \sqrt{2}) \right]$$

2.10 Určete potenciál a velikost intenzity elektrického pole na ose kruhového kotouče poloměru  $R$  nabitého s plošnou hustotou náboje  $\sigma$ .

$$\left[ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + h^2} - |h|), \quad \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \pm 1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \right]$$

2.11 Určete velikost intenzity elektrického pole ve středu kulové slupky poloměru  $R$ , je-li jedna její polovina nabitá s plošnou hustotou  $\sigma$ .

$$\left[ \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \right]$$

2.12 Z vodivé mýdlové bubliny poloměru  $R = 2\text{cm}$  nabité na potenciál  $\varphi = 10^4\text{V}$  vznikne po prasknutí kapka vody o poloměru  $r = 0,05\text{cm}$ . Určete potenciál kapky.

$$[4 \cdot 10^5 \text{ V}]$$

2.13 Tenká tyč je ohnuta do tvaru téměř uzavřené kružnice poloměru  $r = 0,5\text{m}$ . Mezi konci zůstává mezera šířky  $d = 2\text{cm}$ , tyč nese náboj  $q = 3,34 \cdot 10^{-10}\text{C}$ . Určete velikost a směr elektrického pole ve středu kružnice.

$$[7,6 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}]$$

2.14 Mějme kulovou slupku poloměru  $R$  nabitou s plošnou hustotou  $\sigma$ . V okolí vybraného bodu na této ploše seřízíme malý kulový vrchlík o poloměru  $a \ll R$ . Určete velikost elektrického pole uprostřed otvoru.

$$\left[ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2} \right) \right]$$

2.15 Intenzita elektrostatického pole u povrchu Země je  $100 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$  a míří směrem dolů. Určete náboj a potenciál Země.

$$[-4 \cdot 10^5 \text{ C}, \quad -6 \cdot 10^8 \text{ V}]$$

2.16 Jaký maximální náboj se udrží na kovové kouli o poloměru  $R = 10$  cm, je-li dielektrická pevnost vzduchu  $30 \text{ kV}\cdot\text{cm}^{-1}$ ?

$$[3, 3 \cdot 10^{-6} \text{ C}]$$

2.17 Bodové náboje jsou uspořádány a) ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně  $a$  v pořadí  $q, q, -2q$ , b) ve vrcholech čtverce o straně  $a$  v pořadí  $-q, q, q, -q$ , c) v pořadí  $-q, q, -q, q$ . Určete elektrický dipólový moment soustavy.

$$[aq\sqrt{3}, \quad 2aq, \quad 0]$$

2.18 Určete elektrický dipólový moment tenké tyče délky  $l$  a) jejíž jedna polovina je nabitá kladně a druhá záporně s lineární hustotou náboje  $\tau$ , b) jejíž nábojová hustota roste lineárně od  $-\tau_0$  na jednom konci k  $+\tau_0$  na druhém konci.

$$\left[ \frac{l^2\tau}{4}, \quad \frac{l^2\tau_0}{6} \right]$$

2.19 Náboj je rozložen na povrchu koule o poloměru  $R$  tak, že na jedné polokouli je kladný náboj s hustotou  $\sigma$ , na druhé polokouli záporný náboj s hustotou  $-\sigma$ . Určete elektrický dipólový moment koule. Jaký bude tento moment, budou-li obě polokoule nabity objemově s opačnými náboji téže velikosti objemové hustoty  $\rho$ ?

$$\left[ 2\pi\sigma R^3, \quad \frac{1}{2} \pi\rho R^4 \right]$$

2.20 Elektrický dipól o momentu  $\vec{p} \equiv (0, p, 0)$  leží v bodě  $(x, 0, 0)$  v elektrickém poli bodového náboje  $q$  umístěného v počátku. Určete sílu  $\vec{F}$  a moment silové dvojice  $\vec{D}$ , které budou na dipól působit.

$$\left[ F_y = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 x^3}, \quad D_z = -\frac{qp}{4\pi\epsilon_0 x^2} \right]$$

2.21 Čtyři náboje  $q, -q, q, -q$  jsou v tomto pořadí rozmístěny v rozích čtverce o straně  $a$ . Určete hlavní kvadrupólové momenty soustavy.

$$[3qa^2, \quad -3qa^2, \quad 0]$$

2.22 Určete elektrický kvadrupólový moment rotačního elipsoidu.

$$\left[ \frac{2}{5} q (c^2 - a^2) \right]$$

2.23 Mračno malých rozměrů nesoucí náboj  $Q = 20 \text{ C}$  je ve výšce  $h = 1 \text{ km}$  nad povrchem Země. Určete intenzitu elektrostatického pole vzbuzeného tímto nábojem na povrchu Země ve vzdálenosti  $l = 3 \text{ km}$  od místa nad nímž se vznáší mrak.

[1,  $14 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1}$  ]

2.24 Náboj  $q$  je ve vzdálenosti  $2R$  od středu uzemněné vodivé koule poloměru  $R$ . Jakou práci vykonáme, vzdálíme-li tento náboj do nekonečna? Jaký bude výsledek, bude-li koule izolována?

$$\left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{6R}, \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{24R} \right]$$

2.25 Malá kulička nesoucí náboj  $1,67 \cdot 10^{-8}$  C je ve vzdálenosti 3 cm od rovinné kovové stěny, která je uzemněna. Jakou silou je kulička ke stěně přitahována?

$$[6,9 \cdot 10^{-4} \text{ N}]$$

2.26 Kolik elektronů tvoří náboj kuličky o hmotnosti  $10^{-11}$  g, jestliže je udržována v rovnováze v deskovém kondenzátoru jehož desky jsou od sebe vzdáleny 5 mm a jsou nabitý na napětí 76,5 V ?

$$[40]$$

2.27 Kovová koule poloměru  $R$  je uzemněna. Ve vzdálenosti  $2R$  od středu koule je umístěn bodový náboj  $q$ . Určete náboj  $q'$  indukovaný na kouli.

$$\left[ -\frac{q}{2} \right]$$

2.28 Jakou plochu by musely mít elektrody deskového kondenzátoru o vzdálenosti 1 mm aby kondenzátor měl kapacitu 1 F ?

$$[113 \text{ km}^2]$$

2.29 Jakou silou se přitahují desky kondenzátoru?

$$\left[ -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \right]$$

2.30 Mějme válcový kondenzátor o poloměrech elektrod  $R_1 = 3$  cm,  $R_2 = 10$  cm nabitý na napětí 450 V. Určete náboj připadající na jednotkovou délku, plošnou hustotu náboje na každém z válců a intenzitu elektrostatického pole ve středu vzdálenosti mezi válci.

$$[2,1 \cdot 10^{-8} \text{ C.m}^{-1}, \quad 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ C.m}^{-2}, \quad 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ C.m}^{-2}, \quad 58,1 \text{ V.cm}^{-1}]$$

2.31 Určete napětí mezi dvěma koncentrickými koulemi o poloměrech  $R_1 < R_2$  a nábojích  $Q_1, Q_2$ .

$$\left[ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right]$$

2.32 Určete kapacitu vedení tvořeného dvěma rovnoběžnými dráty délky 9 km, poloměru 1 mm a vzájemné vzdálenosti 15 cm.

$$[0,05 \mu\text{F}]$$

obr. 2.38

obr. 2.39

2.33 Kondenzátor (Geigerův - Müllerův počítač) je tvořen drátem o poloměru 5 mm a koaxiálním válcem poloměru 5 cm. Na jaké maximální napětí můžeme kondenzátor nabít, je-li průrazné napětí vzduchu  $30 \text{ kV}\cdot\text{cm}^{-1}$ ? Jak se bude měnit rozložení průběhu napětí mezi elektrodami, budeme-li zmenšovat poloměr vnitřní elektrody?

$$[3, 45 \cdot 10^4 \text{ V}]$$

2.34 Určete kapacitu mezi body  $A$ ,  $B$  soustavy kondenzátorů na obr. 2.38. Všechny kondenzátory mají stejnou kapacitu  $C$ .

$$\left[ \frac{11}{5} C \right]$$

2.35 Deskový kondenzátor je z poloviny zaplněn dielektrikem o relativní permitivitě  $\varepsilon_r$ , a to a) rovnoběžně s deskami, b) kolmo k deskám (viz obr. 2.40). Jak se změní jeho kapacita?

$$\left[ \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}, \quad \frac{\varepsilon_r+2}{2} \text{ krát} \right]$$

2.36 Prostor mezi deskami kondenzátoru je zaplněn dielektrikem, jehož permitivita se mění lineárně od hodnoty  $\varepsilon_1$  u jedné desky k  $\varepsilon_2$  u druhé desky. Určete jeho kapacitu.

$$\left[ \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S}{\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1) d} \right]$$

2.37 Deskový vzduchový kondenzátor má kapacitu  $C_0$ . Je připojen ke zdroji napětí  $U_0$  a je na něm nashromážděna energie  $W_0$ . Potom je ponořen do oleje o relativní permitivitě  $\varepsilon_r$ , přičemž zůstává připojen ke zdroji napětí. Jeho energie se změní na  $W_1$ . Nakonec jej odpojíme od zdroje a vyjmeme z oleje. Bude na něm napětí  $U_2$  a energie  $W_2$ . Určete  $W_1$ ,  $U_2$ ,  $W_2$ .



$$[\varepsilon_r W_0, \varepsilon_r U_0, \varepsilon_r^2 W_0]$$

2.38 Určete polarizovatelnost  $\alpha$  atomu helia, je-li jeho relativní permitivita za normálních podmínek  $\varepsilon_r = 1,000074$ .

$$\left[ \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0} = 0,219 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3 \right]$$

2.39 Indukovaný elektrický dipólový moment kuličky z vosku ( $\varepsilon_r = 3$ ) v elektrickém poli je 1,5 krát menší než u stejně velké skleněné kuličky. Jaká je relativní permitivita skla?

$$[5,5]$$

2.40 Jaká bude velikost indukovaného dipólového momentu vodivé kuličky poloměru  $R$  v poli  $E_0$ , budeme-li brát  $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ ?

$$[4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0]$$

2.41 Máme kondenzátor s olejovým dielektrikem ( $\varepsilon_r = 2,24$ ) a intenzitou elektrického pole  $E = 9 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ . V oleji vznikne bublina plynu. Jaká bude intenzita pole v bublině?

$$[1,1 \cdot 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}]$$