. E L E K T R O M A G N E T I C K É P O L E

1. Elektromagnetická indukce

Vložíme-li vodič do statického (stacionárního) elektrického pole, budou se na jeho povrchu indukovat elektrické náboje. Tomuto jevu se říká elektrostatická indukce. Mohli bychom očekávat, že vložíme-li vodič ve tvaru uzavřené smyčky do vnějšího magnetického pole (tj. do pole jiné smyčky protékané stacionárním proudem), bude se ve smyčce indukovat elektrický proud. Nic takového se však neděje. Když Faraday prováděl (1831) experimenty tohoto druhu, všiml si však, že při zapnutí a vypnutí elektromotorického napětí v první smyčce se objevily krátkodobé proudové impulsy v druhé smyčce. Tak dospěl k objevu *elektromagnetické indukce*, která se projevuje u proměnných, nestacionárních proudů.

Uvažme vodič ve tvaru tyčky orientované ve směru osy x, která se pohybuje kolmo k magnetickému poli ve směru osy y rychlostí $\vec{v}$ (obr. 5.1).

Na volné náboje ve vodiči bude působit Lorentzova síla, která uvnitř vodiče vyvolá ekvivalentní elektrické pole

$$\vec{E} \;=\; -\,\vec{v}\times\vec{B}\;.$$

obr. 5.1 obr. 5.2

Tím dojde k přerozdělení náboje a polarizaci vodiče. Mohlo by se zdát divné, že uvnitř vodiče působí elektrické pole a mohli bychom se ptát, co se s tímto polem stane v soustavě souřadné spojené s vodičem. Pak jde o statický vodič a pole uvnitř musí být nulové. V tomto případě však pole skutečně vymizí, protože při přechodu ke klidové soustavě vznikne pole $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$, které vykompenzuje sílu se strany magnetického pole. Uvnitř vodiče je pak pole nulové a vně vodiče je pole vytvářeno povrchovým nábojem, který ovšem existuje v každé vztažné soustavě.

Mějme nyní uzavřenou smyčku obdélníkového tvaru (obr. 5.2) v rovině kolmé k magnetickému poli, se stranou a ve směru osy y a stranou b ve směru osy x pohybující se směrem y rychlostí $\vec{v}$. Bude-li magnetické pole homogenní, dojde pouze k přerozdělení nábojů na smyčce. Bude-li však pole ve směru pohybu smyčky nehomogenní, bude práce sil magnetického pole působících na náboj podél uzavřené smyčky různá od nuly:

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\ v\ (B_1 - B_2)\ b = \mathcal{E}^{ind}\ q,$$

kde $\mathcal{E}^{ind}$ je indukované elektromotorické napětí.

Za časový interval dt se smyčka posune o vzdálenost vdt ve směru osy y. Magnetický indukční tok smyčkou se přitom změní o

$$d\Phi = (B_2 - B_1)\ b\ v\ dt\ .$$

Porovnáním obou vztahů zjistíme, že v obvodu se indukuje elektromotorické napětí

$$\mathcal{E}^{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}\ . \qquad (5.1)$$

Vztah (5.1) vyjadřuje Faradayův *zákon elektromagnetické indukce.* Platí zcela obecně, bez ohledu na to, jakým způsobem dochází ke změně indukčního toku Φ. Naši úvahu o pohybu smyčky bychom mohli postupně zobecňovat na libovolný pohyb smyčky obecného tvaru nebo na případ, kdy smyčka zůstává v klidu a v čase se mění magnetická indukce. V elektromagnetických strojích se nejčastěji smyčka otáčí v homogenním magnetickém poli a tím se mění indukční tok.

Důležité je, že indukované elektromotorické napětí působí v opačném směru, než změna, která je vyvolala. Vyjadřuje to znaménko minus v (5.1) a s touto situací jsme se vlastně už setkali při studiu diamagnetismu. Toto pravidlo o směru působení indukovaného emn se nazývá *Lenzovo pravidlo.*

Uvažme dvě nehybné vodivé smyčky ve vakuu. Nechť v první (primární) smyčce dojde ke změně elektrického proudu. Tato změna vyvolá změnu magnetického pole vytvářeného touto smyčkou, a tedy i změnu indukčního toku druhou (sekundární) smyčkou. V ní se pak indukuje emn a začne protékat indukovaný proud. Ten teče v takovén směru, aby jím vytvářené magnetické pole působilo proti změně indukčního toku (záporná zpětná vazba). Kdyby tomu tak nebylo, změna magnetického pole by se zvětšovala nade všechny meze. Dochází tedy k těmto změnám:

$$\frac{dI_1}{dt} \rightarrow \frac{dB_1}{dt} \rightarrow \frac{d\Phi_{12}}{dt} \rightarrow \mathcal{E}_2^{ind} \rightarrow I_2 \rightarrow B_2\,.$$

Zákon elektromagnetické indukce je projevem obecné vlastnosti hmoty, kterou označujeme jako setrvačnost, a je přirozenou reakcí odporu proti změně. Tato vlastnost zajišťuje stabilitu přírodních procesů.

Indukované proudy vznikají nejen v různých vodičích, ale i v témže vodiči, dojde-li ke změně magnetického toku. V masivnícvh vodičích se projevují jako tzv. *vířivé* neboli *Foucaultovy proudy*, kterých se využívá například k tlumení oscilací pohyblivých částí elektrických přístrojů. Představují vlastně magnetické tření. Existenci vířivých proudů musíme brát v úvahu při konstrukci transformátorových jader, statorů a rotorů dynam a elektromotorů i jinde, kde jsou nežádoucím jevem.

Jev elektromagnetické indukce má i další zajímavý důsledek spočívající v tom, že střídavé proudy a elektromagnetické vlny nepronikají příliš hluboko do objemu vodičů a zůstávají soustředěny v tenké povrchové vrstvě. Říká se tomu *skinefekt* podle anglického skin = kůže. Tak střídavé proudy protékající vodičem nejsou rozloženy rovnoměrně po jeho průřezu, ale protékají v povrchové vrstvě tím tenčí, čím je frekvence proudu a konduktivita vodiče vodiče vyšší. Řešením Maxwellových rovnic s uvážením Faradayova zákona elektromagnetické indukce (viz např. knihu Sedlák, Štoll: Elektřina a magnetismus) lze určit tloušťku této povrchové vrstvy jako

$$\Delta \; = \; \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \; \omega\sigma}} \; . \tag{5.2}$$

Zde ω je úhlová frekvence střídavého proudu, σ konduktivita vodiče; relativní permeabilitu vodiče klademe rovnu jedné.

Faradayův zákon elektromagnetické indukce lze vyjádřit i v diferenciálním tvaru. Máme

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} \; = \; -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

a použijeme-li Stokesovu větu, dostaneme na levé straně plošný integrál rotace $\vec{E}$, odkud

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} \; = \; - \; \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \; . \tag{5.3}$$

V časově proměnném poli tedy už není elektrické pole potenciální a je svázáno s polem magnetickým. Můžeme zase shrnout Maxwellovy rovnice pro časově proměnné pole ve vakuu a srovnat je s rovnicemi pro stacionární pole (4.28). Nyní máme

$$\mathrm{div}\ \vec{E} \; = \; \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \mathrm{rot}\ \vec{B} \; = \; \mu_0 \; \vec{j} + \; ?$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} \; = \; - \; \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad \mathrm{div}\ \vec{B} \; = \; 0 \; . \tag{5.4}$$

Rovnice pro div $\vec{E}$ (Gaussův zákon) a div $\vec{B}$ považujeme za platné i v případě nestacionárního pole, otázkou pouze zůstává, zda bude v časově proměnném poli platit rovnice pro rot $\vec{B}$. Na první pohled je zřejmá určitá nesymetrie těchto rovnic - rotace elektrického pole závisí na změně magnetického pole a dala by se očekávat i obrácená závislost. Máme však k dospozici ještě rovnici kontinuity vyjadřující zákon zachování elektrického náboje, která má pro nestacionární proud tvar (3.8). Aplikujeme-li operaci divergence na Ampérův zákon, dostaneme

$$\text{div rot } \vec{B} \;=\; \mu_0 \text{ div } \vec{j} \;=\; 0.$$

To ovšem platí jen ve stacionárním poli, obecně máme

$$\text{div } \vec{j} \;=\; -\,\frac{\partial \rho}{\partial t}\;.$$

Zkusíme tedy nahradit otazníček v rovnicích (5.4) a napsat

$$\text{rot } \vec{B} \;=\; \mu_0\, \vec{j} + \alpha\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\;,$$

kde α je třeba určit porovnáním s rovnicí kontinuity. Pak máme

$$\text{div rot } \vec{B} \;=\; \mu_0 \,\text{div}\, \vec{j} + \alpha \,\text{div}\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \;=\; \mu_0 \,\text{div}\, \vec{j} + \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \;=\; \mu_0 \left(\text{div } \vec{j} \;+\; \frac{\alpha}{\varepsilon_0 \mu_0}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \;=\; 0\,.$$

Rovnice kontinuity bude splněna, položíme-li

$$\alpha \;=\; \varepsilon_0\, \mu_0 \;=\; \frac{1}{c^2}\;.$$

Tím dostáváme soustavu Maxwellových rovnic ve vakuu konsistentní se zákonem zachování náboje pro časově obecně proměnná, nestacionární pole

$$\text{div } \vec{E} \;=\; \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \text{rot } \vec{B} \;=\; \mu_0\, \vec{j} \;+\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0\,. \tag{5.5}$$

Nově doplněný člen

$$\mu_0\, \varepsilon_0\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\, \vec{j}_M \tag{5.6}$$

vyjadřuje Maxwellův posuvný proud ve vakuu a dospěli jsme k němu pouze na základě teoretické úvahy, bez odvolání na experimentální poznatek. Existence tohoto proudu o hustotě $\vec{j}_M$ byla skutečně experimentálně prokázána až po Maxwellových pracích a tak byl odhalen zvláštní druh elektrického, nestacionárního proudu, který není spojen s přemisťováním nábojů.

Příčina toho, proč nebyl pozorován dříve tkví v koeficientu $1/c^2$, který je velmi malý. Posuvný proud se tak projeví až při velmi rychlých změnách elektrického pole, vysokofrekvenčních proudech, kdy také časová derivace $\partial \vec{E}/\partial t$ je velká. Při pomalých změnách pole, například při průmyslových frekvencích 50 nebo 60 Hz, můžeme tedy Maxwellův posuvný proud zanedbat a používat soustavu rovnic s Ampérovým zákonem bez otazníčku v (5.4). Přitom předpokládáme, že magnetické pole zůstává úměrné volnému proudu $\vec{j}$, že stačí sledovat jeho změny. Elektromagnetické pole splňující soustavu rovnic (5.4) nazýváme *kvazistacionární*. V tomto a následujícím odstavci se budeme zabývat právě kvazistacionárními proudy a obvody.

Při vysokých frekvencích posuvný proud zanedbat nelze a je třeba používat kompletní soustavu Maxwellových rovnic (5.5). V takovém případě dochází k vyzařování elektromagnetických vln. Skutečně, kdybychom chtěli po obyčejném elektrickém vedení přenášet vysokofrekvenční proudy, změnilo by se nám toto vedení v anténu. Předpověď existence elektromagnetických vln byla jedním z největších úspěchů Maxwellovy teorie. Maxwell především ustanovil, že světlo je příčné elektromagnetické vlnění - proto se také v soustavě Maxwellových rovnic objevila rychlost světla ve vakuu c. Dále zjistil, že soustava rovnic pro elektromagnetické pole ve vakuu *bez nábojů a proudů*, tj při $\rho = 0,\ \vec{j} = 0$,

$$\mathrm{div}\ \vec{E} \ = \ 0 \qquad\qquad \mathrm{rot}\ \vec{B} \ = \ \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} \ = \ -\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad \mathrm{div}\ \vec{B} \ = \ 0 \tag{5.7}$$

má netriviální řešení. Elektromagnetické pole se může odtrhnout od nábojů a proudů a začít samostatně existovat v podobě elektromagnetické vlny. Soustava Maxwellových rovnic tak také nabývá krásné symetrie.

Vrátíme se ke kvazistacionárnímu poli. Uvažme proudovou smyčku, pro níž můžeme definovat indukčnost L. Zavedli jsme ji definicí (4.69) a hraje pro smyčku podobnou úlohu jako kapacita pro nabitý vodič. Nazýváme ji *vlastní indukčností* smyčky.

Máme-li v prostoru více smyček, budou vzájemně indukčně provázány svými magnetickými toky a můžeme opět psát soustavu lineárních rovnic vyjadřujících vztahy mezi proudy a magnetickými toky ve smyčkách, jako u kapacit rovnice (2.47). Potom máme

$$\Phi_i \ = \ L_{ik}\ I_k\ . \tag{5.8}$$

Koeficienty L_{ik} se nazývají *indukčními koeficienty*, koeficienty s různými indexy jsou *vzájemné indukčnosti*, které někdy označujeme jako $L_{ik} = M_{ik}$. V soustavě SI měříme indukčnosti v jednotkách henry (H).

Pro vzájemné indukčnosti platí opět *věta o vzájemnosti* $M_{ik} = M_{ki}$, kterou můžeme dokázat buď z energetické úvahy

obr. 5.3

(nezáleží na pořadí v jakém proudy v jednotlivých smyčkách nabíhají) nebo následujícím způsobem.

Mějme dvě smyčky jako na obr. 5.3. Indukční tok smyčkou můžeme vyjádřit pomocí vektorového potenciálu jako

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} \, .$$

Potom podle (4.32)

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l_1} \cdot d\vec{l_2}}{R} \, . \tag{5.9}$$

Výsledek nezávisí na pořadí indexů 1 a 2, čímž je věta o vzájemnosti dokázána.

Indukčnost můžeme definovat i pomocí Faradayova zákona (dynamická definice indukčnosti). V i-té smyčce se indukuje emn

$$\mathcal{E}_i^{ind} \;=\; -\;\frac{d\Phi_i}{dt} \;=\; -\;\sum_k \;L_{ik}\;\frac{dI_k}{dt}\;.$$

Pro jednu smyčku tedy

$$\mathcal{E}^{ind} \;=\; -\;\frac{d\Phi}{dt} \;=\; -\;L\;\frac{dI}{dt}\;. \tag{5.10}$$

S uvážením indukovaného emn bude Ohmův zákon v uzavřeném obvodu znít

$$\mathcal{E} \;=\; R\,I \;+\; L\;\frac{dI}{dt} \tag{5.11}$$

a Jouleův zákon

$$\mathcal{E}\;I \;=\; R\,I^2 \;+\; L\,I\;\frac{dI}{dt}\;, \tag{5.12}$$

kde pod R jsme zahrnuli i vnitřní odpory zdrojů. Část výkonu emn se tedy nevratně mění v tepelnou energii a část se spotřebovává na kompenzaci změn indukčního toku. Protéká-li smyčkou stacionární proud, musel postupně narůstat od nulové hodnoty a část práce vnějšího zdroje se měnila v energii magnetického pole smyčky. Ke zvětšení indukčního toku o $d\Phi$ bylo třeba vykonat práci $dA = I d\Phi$, takže celková práce k vytvoření magnetického pole smyčku je rovna

$$W \;=\; \int \;L\;I\;\frac{dI}{dt}\;dt \;=\; \int_0^I \;L\;I\;dI \;=\; \frac{1}{2}\;L\;I^2 \;=\; \frac{1}{2}\;I\;\Phi\;. \tag{5.13}$$

Určíme-li celkovou energii magnetického pole vyvolaného proudem ve smyčce můžeme pak její indukčnost stanovit podle (5.13).

Také energii soustavy proudových smyček můžeme určit integrováním hustoty energie magnetického pole (4.36) v celém prostoru:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i I_i\,\Phi_i = \frac{1}{2}\sum_i I_i \int_{S_i} \vec{B}_i \cdot d\vec{S}_i = \frac{1}{2}\sum_i I_i \int_{S_i} (\mathrm{rot}\,\vec{A}_i)\cdot d\vec{S}_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_{l_i} \vec{A}\cdot d\vec{l}_i = \frac{1}{2}\sum_i \int_{V_i} (\vec{A}_i\cdot\vec{j}_i)\,dV_i = \frac{1}{2}\int_\infty (\vec{A}\cdot\vec{j})\,dV =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int_\infty \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}\,dV = \frac{1}{2\mu_0}\int_\infty \mathrm{div}\,(\vec{B}\times\vec{A})\,dV + \frac{1}{2\mu_0}\int_\infty \vec{B}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}\,dV =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int_{S\to\infty} \vec{B}\times\vec{A}\cdot d\vec{S} + \frac{1}{2\mu_0}\int_\infty B^2\,dV = \int_\infty w_m\,dV\,. \tag{5.14}$$

Objemové integrování jsme rozšířili z objemů smyček na celý prostor - pokud v něm neteče proud je jeho příspěvek k $\vec{A}\cdot\vec{j}$ nulový. Při rozpínámí plochy S do nekonečna jsme brali v úvahu, že pole $\vec{B}$ klesá jako $1/r^2$ a vektorový potenciál jako $1/r$, takže plošný integrál jde k nule.

obr. 5.4

1. Silové účinky magnetického pole na pohybující se vodič

Mechanické účinky spojené s elektromagnetickou indukcí jsou základem elektromotorů. Na obr. 5.4 je pohyblivý vodič hmotnosti m ,který může volně klouzat po dvou nekonečných vodivých kolejnicích v rovině kolmé k magnetickému poli. Pro jednoduchost zanedbáme odpor vodiče a částí kolejnic vytvářejících smyčku.

Nechť v obvodu působí konstantní emn E tak, že obvodem protéká proud I proti směru hodinových ručiček. Na pohyblivý vodič přitom působí síla o velikosti

$$F \;=\; I\;b\;B \;=\; m\,\frac{dv}{dt}$$

a tento vodič se začne pohybovat proměnnou rychlostí $v(t)$. Při pohybu se mění indukční tok smyčkou a vzniká v něm indukované napětí $-bBv(t)$. Z Ohmova zákona

$$I(t) \;=\; \frac{1}{R}\,[\mathcal{E} \;-\; b\;B\;v(t)]$$

a dosadíme-li za I z výrazu pro sílu, dostaneme nehomogenní rovnici pro $v(t)$:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2b^2}{mR}\,v = \frac{\mathcal{E}Bb}{mR}\,.$$

Její řešení je

$$v(t) = \frac{\mathcal{E}}{Bb}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{B^2b^2}{mR}t}\right)\,.$$

Rychlost vodiče tedy postupně poroste k ustálené hodnotě $v_\infty = \mathcal{E}/Bb$. Celkový výkon emn je

$$\mathcal{E}\,I = R\,I^2 + I\,B\,b\,v\,.$$

Spotřebuje se jednak na ohmické ztráty, jednak na pohon vodiče. Vznikl lineární motor, který ovšem nemůže pracovat trvale.

Můžeme si představit opačnou situaci, kdy v obvodu emn nepůsobí, ale vnější síla pohybuje vodičem. Má-li se vodič pohybovat konstantní rychlostí, je třeba, aby tato síla byla kompenzována silou magnetickou, tj. byla rovna

$$F = -I\,B\,b = -\frac{\mathcal{E}^{ind}Bb}{R} = \frac{B^2b^2}{R}\,v\,.$$

Potom vznikne elektrický generátor a v něm bude vznikat indukované napětí

$$\mathcal{E}^{ind} = -\frac{FR}{bB}\,,$$

pokud ovšem délka kolejnic dovolí pokračovat v pohybu.

2. <u>Indukčnost solenoidu</u>

obr. 5.5

Na obr. 5.5 je znázorněn solenoid konečné délky l a poloměru R.

Pokud zanedbáme okrajové efekty a budeme považovat pole v solenoidu za homogenní, můžeme určit jeho indukčnost buď pomocí statické definice, dynamické definice nebo z energie nahromaděné v solenoidu. Indukční tok průřezem solenoidu

$$\Phi \;=\; B\,S \;=\; \mu_0\;I\;n.\pi R^2$$

musíme brát jako N-násobný, kde N je celkový počet závitů. Tak dostaneme

$$L \;=\; \frac{N\;\Phi}{I} \;=\; \mu_0\;n\;V\;\frac{N}{l} \;=\; \mu_0\;n^2\;V\;.$$

Zde V je objem solenoidu a n počet závitů na jednotku délky. Týž výsledek bychom pochopitelně dostali ze vztahu $L = 2W/I^2$, kde W je celková magnetická energie v objemu solenoidu. Přesný výpočet s ohledem na okrajové efekty dává

$$L \;=\; k\;\mu_0\;n^2\;V, \qquad \text{kde} \qquad k \;=\; 1 - \frac{8R}{3\pi l} + \frac{R^2}{2l^2} - \frac{R^4}{4l^4}\;.$$

3. Vlastní indukčnost přímých vodičů

Chcemeli určit vlastní indukčnost připadající na jednotku délky nekonečného přímého vodiče protékaného proudem I, můžeme postupovat tak, že v axiální rovině plošný pás jednotkové šířky vycházející kolmo z vodiče a určíme celkový indukční tok tímto pásem (obr. 5.6).

Tok diferenciální ploškou dS bude $d\Phi = Bdr$, a tedy

$$L_l \;=\; \frac{\Phi_l}{I} \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dr}{r}\;.$$

obr. 5.6

obr. 5.7

Tento integrál, jak známo, diverguje při $r \to 0$ i při $r \to \infty$. Není to chyba přírody, ale naše - nekonečně dlouhé ani nekonečně tenké vodiče neexistují. Připustíme-li, že vodič má konečný průřez poloměru R, můžeme určit příspěvek L_{li} k vlastní indukčnosti díky indukčnímu toku uvnitř plného vodiče. Tam je magnetická indukce

$$B = \frac{\mu_0 \, I \, r}{2\pi \, R^2} .$$

Je-li vodič dutý, je v něm magnetické pole nulové a tato část vlastní indukčnosti (nazýváme ji vnitřní indukčností) odpadá. Indukční tok ploškou ve vodiči ve vzdálenosti $r < R$ od osy obepíná ovšem jen část proudu rovnou r^2/R^2-tině celkového proudu. Musíme tok proto brát jako r^2/R^2 -násobný. Potom vnitřní indukčnost vodiče na jednotku délky bude

$$L_{li} = \frac{\mu_0}{2\pi \, R^4} \int_0^R r^3 \, dr = \frac{\mu_0}{8\pi} . \tag{5.15}$$

Pro $r \to \infty$ nemůžeme v případě jednoho nekonečného vodiče divergenci integrálu odstranit. Je to tím, že i v případě že proud přichází a odchází z nekonečna, musí, lidově řečeno, jít jednou tam a jednou zpátky. Má tedy smysl uvažovat indukčnost dvojlinky na jednotku délky (obr. 5.7). Pak stačí uvažovat tok pásem jednotkové šířky mezi oběma vodiči; po stranách dvojlinky se toky obou vodičů vyruší. Je-li l vzdálenost os obou vodičů a R jejich poloměr, a jsou-li vodiče duté, dostaneme

$$L_l = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\int_R^{l-R} \frac{dr}{r} + \int_R^{l-r} \frac{dr}{l-r} \right)$$

a provedeme-li v druhém integrálu substituci $l - r = s$, dostaneme

$$L_l = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\int_R^{l-R} \frac{dr}{r} + \int_R^{l-R} \frac{ds}{s} \right) ,$$

neboli

$$L_l \;=\; \frac{\mu_0}{\pi}\;\ln\frac{l-R}{R}\;. \tag{5.16}$$

Nejsou-li vodiče duté, je třeba přičíst ještě vnitřní indukčnost (5.15) od každého vodiče, tj. $\mu_0/4\pi$.

Připomeneme-li si výraz pro kapacitu dvojlinky na jednotku délky (2.56), zjistíme, že platí

$$L_l\;C_l \;=\; \varepsilon_0\;\mu_0 \;=\; \frac{1}{c^2}\;. \tag{5.17}$$

4. <u>Vlastní indukčnost koaxiálního kabelu</u>

Mějme koaxiální kabel tvořený dvěma dutými vodiči o poloměrech $R_1 < R_2$, takže magnetické pole je soustředěno v prostoru mezi vodiči. Energii tohoto pole připadající na jednotku délky určíme jako

$$W_l \;=\; \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2\,dV \;=\; \frac{1}{2\mu_0}\int_{R_1}^{R_2} B^2\,2\pi\,r\,dr \;=\; \frac{\mu_0\;I^2}{4\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} \;=\; \frac{\mu_0\;I^2}{4\pi}\;\ln\frac{R_2}{R_1}\;.$$

Indukčnost bude tedy

$$L_l \;=\; \frac{2\;W_l}{I^2} \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi}\;\ln\frac{R_2}{R_1}\;. \tag{5.18}$$

Nebude-li vnitřní vodič dutý, přičte se vnitřní indukčnost (5.15). Srovnáním s kapacitou na jednotku délky (2.55) zjistíme, že opět platí (5.17).

5. <u>Vlastní indukčnost kruhové smyčky</u>

Máme určit indukčnost kruhové smyčky protékané proudem. Víme již, že smyčku nebudeme moci považovat za nekonečně tenkou, nýbrž musíme jí připsat konečný průřez o poloměru $R \ll r$, kde r je poloměr smyčky. K určení vlastní indukčnosti bychom měli určit celkový indukční tok plochou ohraničenou osovou kružnicí smyčky. Můžeme ji opět rozdělit na indukčnost vnitřní a vnější. Vnitřní indukčnost je spojena s tokem mezikružím plochy $\pi R(2r - R)$ uvnitř vodiče a vnější s tokem plochou kruhu o poloměru $r - R$.

U vnitřní indukčnosti dostáváme z (5.15)

$$L_i = \frac{\mu_0}{8\pi} \, . \, 2\pi \; r = \frac{\mu_0 \; r}{4} \; .$$

Pokud jde o vnější indukčnost, museli bychom znát průběh magnetického pole na celé kruhové ploše ohraničené smyčkou. Protože vně smyčky můžeme považovat proud za tekoucí po nekonečně tenké osové kružnici, je úloha ekvivalentní výpočtu vzájemné indukčnosti dvou tenkých koncentrických kruhových smyček o poloměrech r a $r - R$. Výpočet není snadný, vede na eliptické integrály a lze jej najít například v knize Petržílka, Šafrata: Elektřina a magnetismus. Jako přibližný výsledek dostáváme

$$L_e = \mu_0 \; r \left(\ln \frac{8r}{R} - \frac{7}{4} \right) \; .$$

6. Vzájemná indukčnost dvou smyček a cívek

Mějme dvě souosé kruhové smyčky o poloměrech $R_2 \ll R_1$, jejichž středy jsou vzdáleny o výšku h (obr. 5.8).

Magnetické pole na ose velké smyčky

$$B = \frac{1}{2} \, \mu_0 \; I_1 \; \frac{R_1^2}{(R_1^2 + h^2)^{3/2}}$$

můžeme považovat v ploše malé smyčky přibližně za homogenní, takže vzájemná indukčnost bude

$$M_{12} = \frac{\pi \mu_0}{2} \; \frac{R_1^2 \; R_2^2}{(R_1^2 + h^2)^{3/2}} \; .$$

obr. 5.8

Budou-li smyčky v téže rovině, dostaneme

$$M_{12} \;=\; \frac{\mu_0\; S_2}{2\; R_1}\;.$$

Mějme nyní dvě cívky o poloměrech $R_1,\; R_2$, počtech závitů na jednotku délky $n_1,\; n_2$ a výškách $l_1,\; l_2$. Uvažme dva případy:

a) Obě cívky mají stejné rozměry, jsou dostatečně dlouhé a navinuty na společném jádře, takže indukční tok jimi procházející je totožný. Obě cívky se liší pouze počtem závitů, takže pro jejich vlastní a vzájemné indukčnosti platí:

$$L_1 \;=\; \mu_0\; n_1^2\; V, \quad L_2 \;=\; \mu_0\; n_2^2\; V, \quad M_{12} \;=\; \mu_0\; n_1\; n_2\; V\;,$$

takže

$$M_{12} \;=\; \sqrt{L_1\; L_2}\;. \tag{5.19}$$

Uvedený výraz představuje nejvyšší možnou hodnotu vzájemné indukčnosti dvou cívek, když je jejich indukční vazba nejtěsnější.

b) První cívka je dostatečně dlouhá, druhá o mnohem menším poloměru je do ní koaxiálně zasunuta. Pak dostaneme

$$M_{12} \;=\; \mu_0\; n_1\; n_2\; V_2\;.$$

7. <u>Transformátor</u>

Prozkoumejme blíže vztah mezi vlastními a vzájemnými indukčnostmi dvou cívek. Zanedbáme-li jejich ohmické odpory a předpokládáme-li, že v primární cívce působí emn $\mathcal{E}_1$, dostaneme pro obvody obou cívek

$$\mathcal{E}_1 \;-\; L_1\,\frac{dI_1}{dt} \;-\; M_{12}\,\frac{dI_2}{dt} \;=\; 0, \qquad L_2\,\frac{dI_2}{dt} \;+\; M_{21}\,\frac{dI_1}{dt} \;=\; 0.$$

Vyjádříme-li z druhé rovnice dI_2/dt a označíme vzájemnou indukčnost prostě M, dostaneme

$$\mathcal{E}_1 \ - \ L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 \ L_2} \right) \frac{dI_1}{dt} \ = \ 0 \ .$$

V první smyčce tedy působí efektivní vlastní indukčnost

$$L_{ef} \ = \ L_1 \ (\ 1 \ - \ k^2 \ ) \ , \qquad k \ = \ \frac{M}{\sqrt{L_1 \ L_2}} \ .$$

Veličinu k nazýváme činitelem vazby mezi smyčkami; je roven maximálně 1.

Indukčně vázaných cívek se používá v transformátoru, kde jsou cívky uspořádány jako v případě a) předchozí úlohy. Potom zřejmě $L_1/M \ = \ M/L_2 \ = \ n_1/n_2$. Nechť je v obvodu primární cívky zapojen odpor R_1 a působí zde střídavé emn $\mathcal{E}(\mathrm{t})$, v obvodu sekundární cívky odpor R_2. Potom platí

$$\mathcal{E}_1(t) - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \ = \ R_1 \, I_1 \ , \quad - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \ = \ R_2 \, I_2 \ .$$

V sekundárním obvodu rozlišíme tři případy:

a) $R_2 \to \infty$, transformátor naprázdno. Potom $I_2 = 0$ a na svorkách sekundární cívky zjistíme indukované napětí, které má při malém odporu R_1 velikost

$$\mathcal{E}_2^{ind} \ = \ \frac{n_2}{n_1} \, \mathcal{E}_1 \ .$$

b) $R_2 = 0$, transformátor nakrátko. Z rovnice pro sekundární obvod plyne

$$I_2 \ = \ - \ \frac{L_1}{M} \ = \ - \ \frac{n_1}{n_2} \ I_1 \ .$$

c) $R_2 \neq 0$, malý. Proud v sekundárním obvodě bereme jako v případě transformátoru nakrátko a dosazením dI_2/dt do rovnice pro primární obvod dostaneme rovnici

$$\mathcal{E}_1 - L_1 (1 - k^2) \frac{dI_1}{dt} = \left(R_1 + \frac{n_1^2}{n_2^2} R_2 \right) I_1 .$$

V primárním obvodu tedy působí efektivní indukčnost a efektivní odpor.

2. Kvazistacionární obvody

Nejdříve prozkoumáme takzvané *přechodové stavy* v elektrických obvodech, které nastávají při zapnutí a vypnutí zdroje emn. Na obr. 5.9 jsou znázorněny RC obvod (s odporem a kondenzátorem v sérii) a LC obvod (s odporem a cívkou v sérii) s přepínačem, který umožňuje zapnout a vypnout zdroj konstantního emn.

Je-li U napětí a Q náboj na kondenzátoru, potom v RC obvodu při zapojeném emn máme

$$\mathcal{E} - U = R\,I , \quad Q = C\,U , \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

a pro změnu náboje na kondenzátoru máme diferenciální rovnici

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{R\,C}\,Q = \frac{\mathcal{E}}{R} .$$

Obecné řešení této rovnice se skládá z obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního (zvláštního) řešení neho-

a) b)

obr. 5.9

mogenní rovnice:

$$Q(t) \;=\; \text{konst}\;.\;\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \;+\; \mathcal{E}\;C\;.$$

Konstantu musíme pak určit vždy z počátečních podmínek. Nehomogenní rovnice odpovídá zapnutému zdroji emn, homogenní rovnice stavu bez zapojeného emn. Zapneme-li zdroj v okamžiku $t = 0$, kdy je kondenzátor nenabitý, poroste na něm náboj (a napětí) podle zákona

$$Q \;=\; \mathcal{E}\;C\;\left(1 \;-\; \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\;, \qquad U \;=\; \frac{Q}{C}\;.$$

Vypneme-li zdroj v okamžiku t_0, kdy bylo na kondenzátoru dosaženo napětí U_0, bude náboj (a napětí) klesat podle zákona

$$Q \;=\; U_0\;C\;\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{RC}}\;.$$

obr. 5.10

Tento průběh změny náboje na kondenzátoru při jeho nabíjení a vybíjení vidíme na obr. 5.10.

Vidíme, že napětí na kondenzátoru nabíhá a klesá s charakteristickou dobou $\tau_C = RC$, které říkáme časová konstanta obvodu. Při vybíjení kondenzátoru klesne za tuto dobu napětí na 1/e-tinu. To je třeba mít na paměti - kondenzátory o velké kapacitě zkratované přes značný odpor potřebují dostatečný čas k tomu, aby napětí na nich pokleslo na bezpečnou hodnotu.

Charakteristický tvar napěťového pulsu na obr. 5.10 může být využit v impulsové technice; vhodnou volbou parametrů obvodu můžeme takto generovat pulsy trojúhelníkového nebo pilovitého průběhu. Podotkněmě, že pilovitá napětí potřebujeme například k rozmítání elektronového paprsku na televizní obrazovce.

Průběh proudu v obvodu dostaneme snadno zderivováním náboje podle času; při nabíjení a vybíjení tak máme:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,, \quad I = -\frac{U_0}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{RC}}\,.$$

Průběh proudu vidíme na obr. 5.11.

Podobně bychom mohli analyzovat poměry v RL obvodu. Pak bychom řešili diferenciální rovnici

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}\,I = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

s výsledkem při zapnutí a vypnutí emn

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)\,, \qquad I = I_0\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\,.$$

Vidíme, že tentokrát časový průběh proudu odpovídá časovému průběhu náboje u RC obvodu na obr. 5.10 s časovou konstan-

obr. 5.11

tou $\tau_L = L/R$.

Přejdeme nyní k sériovému RLC obvodu. Platí v něm

$$\mathcal{E} \; - \; U \; - \; L\,\frac{dI}{dt} \; = \; R\,I \; , \qquad I \; = \; \frac{dQ}{dt} \; = \; C\,\frac{dU}{dt} \; .$$

Nejvhodnější zřejmě bude vyjádřit z těchto vztahů diferenciální rovnici pro U:

$$\frac{d^2U}{dt^2} \; + \; \frac{R}{L}\,\frac{dU}{dt} \; + \; \frac{1}{LC}\,U \; = \; \frac{\mathcal{E}}{LC} \; . \tag{5.20}$$

To je ale rovnice pro vynucené kmity harmonického oscilátoru, kterou jsme v mechanice zapisovali ve tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} \; + \; 2\,\delta\,\frac{dx}{dt} \; + \; \omega_0^2\,x \; = \; f \; .$$

Přitom jsme označili *vlastní frekvenci* obvodu

$$\omega_0 \; = \; \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{5.21}$$

(tzv. *Thomsonův vzorec*), *dekrement útlumu*

$$\delta \; = \; \frac{R}{2L} \tag{5.22}$$

a frekvenci

$$\omega \; = \; \sqrt{\omega_0^2 \; - \; \delta^2} \; . \tag{5.23}$$

Uvažme napřed řešení homogenní rovnice, kdy emn $\mathcal{E} = 0$. V případě slabého útlumu ($\delta^2 - \omega_0^2 < 0$) se bude napětí v obvodu měnit harmonicky podle zákona

$$U(t) \; = \; U_0\;\mathrm{e}^{-\delta t}\;\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Amplitudu U_0 a fázovou konstantu φ_0 musíme ovšem určit z počátečních podmínek. Proud I najdeme jako

$$I(t) \;=\; C\,\frac{dU}{dt} \;=\; C\,U_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,[-\,\delta\sin(\omega t{+}\varphi_0) + \omega\cos(\omega t{+}\varphi_0)] \;=$$

$$= \;\frac{CU_0\omega}{\sin\alpha}\;\mathrm{e}^{-\delta t}\;[\sin(\omega t+\varphi_0)\;\cos\alpha \;+\; \cos(\omega t+\varphi_0)\;\sin\alpha] \;=$$

$$= \;I_0\;\mathrm{e}^{-\delta t}\;\sin(\omega t+\varphi_0+\alpha)\;.$$

Přitom jsme zavedli veličinu α, která vyjadřuje fázový rozdíl mezi napětím a proudem v obvodu vztahem

$$\mathrm{cotg}\;\alpha \;=\; -\;\frac{\delta}{\omega}\;.$$

Při nulovém útlumu je cotg $\alpha = 0$ a proud je posunut vůči napětí právě o $\pi/2$. Obvod přitom kmitá na vlastní frekvenci $\omega = \omega_0$. Při kritickém útlumu ($\delta = \omega_0$) a silném útlumu ($\delta^2 - \omega_0^2 > 0$) nastává aperiodický režim a napětí i proud v obvodu klesají exponenciálně k nule.

Nechť nyní v obvodu působí harmonické emn $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\cos\Omega t$. Amplituda vynucující síly je tedy $f_0 = \mathcal{E}_0/LC$. Potom musíme řešit nehomogenní rovnici pro vynucené kmity, které je součtem obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Řešení homogení rovnice je vždy tlumeno a brzy klesne k nule. Obvod začne oscilovat na frekvenci vynucených kmitů Ω bez útlumu. Energie pohlcovaná na odporu bude dodávana zdrojem emn. Máme tak řešení

$$U(t) \;=\; U_0\;\sin(\Omega\;t \;+\; \varphi_0),$$

kde amplitudu kmitů U_0 a fázovou konstantu φ_0 můžeme najít stejným způsobem jako v případě vynucených kmitů mechanického oscilátoru. Dostaneme tak

$$\mathrm{tg}\;\varphi_0 \;=\; \frac{\omega_0^2\;-\;\Omega^2}{2\delta\;\Omega} \;=\; \frac{1}{R}\;\left(\;\frac{1}{\Omega\;C}\;-\;\Omega\;L\;\right)\;, \qquad (5.24)$$

$$U_0 \;=\; \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}} \;=\; \frac{\mathcal{E}_0}{LC}\,\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\;\varphi_0}} \;=\; \frac{\mathcal{E}_0}{RC\Omega}\,\cos\varphi_0\;. \tag{5.25}$$

Pro proud dostaneme

$$I(t) \;=\; C\,\frac{dU}{dt} \;=\; C\,U_0\,\Omega\cos(\Omega t+\varphi_0) \;=\; I_0\;\cos(\Omega t+\varphi_0)\;, \tag{5.26}$$

takže amplituda proudu je

$$I_0 \;=\; C\,U_0\,\Omega \;=\; \frac{\mathcal{E}_0}{R}\;\cos\varphi_0\;. \tag{5.27}$$

Proud a napětí na kondenzátoru jsou tedy vzájemně posunuty o $\pi/2$ a proud je posunut vzhledem k emn o φ_0. Situace je znázorněna na obr. 5.12.

Amplituda napětí (a proudu) dosahuje maxima na rezonanční frekvenci

$$\Omega_r \;=\; \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2} \;=\; \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}}\;, \tag{5.28}$$

a to

$$U_{0max} \;=\; \frac{f_0}{2\;\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} \;=\; \frac{\mathcal{E}_0}{RC\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}\;. \tag{5.29}$$

Při $\Omega = 0$ nastává statická výchylka $U_{0st} = f_0/\omega_0^2$. Tangens φ_0 se mění od $\pi/2$ do $-\pi/2$ a při rezonanci je roven nule. To je rezonance v amplitudě.

Pokud jde o rezonanci v energii, musíme určit závislost I_0^2 na Ω. Pro energii nahromaděnou v obvodu máme

$$W \;=\; \frac{1}{2}\;L\;I_0^2 \;=\; \frac{\mathcal{E}_0^2\;\Omega^2}{2L[\;(\;\omega_0^2-\Omega^2\;)^2+4\;\delta^2\Omega^2\;]}\;. \tag{5.30}$$

obr. 5.12 obr.
5.13

Maximum energie v rezonanci odpovídá

$$W_{max} \;=\; \frac{\mathcal{E}_0^2}{8L\delta^2}\,.$$

Z rezonanční křivky v energii (obr. 5.13) můžeme určit dekrement útlumu. Z mechaniky víme, že šířka této rezonanční křivky v polovině výšky je rovna právě 2 δ. Činitel jakosti obvodu je pak roven

$$Q \;=\; \frac{\omega_0}{2\,\delta} \;=\; \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{5.31}$$

Zbývá vyšetřit otázku, jaký výkon vyvíjí zdroj emn v RLC obvodu. Okamžitý výkon, závislý na čase je

$$P \;=\; \mathcal{E}\, I \;=\; \mathcal{E}_0\, I_0\, \cos\Omega t\, \cos(\Omega t{+}\varphi_0) \;=\; \mathcal{E}_0\, I_0\, (\, \cos^2\Omega t\, \cos\varphi_0 - \cos\Omega t \sin\Omega t\, \sin\varphi_0\,)\,.$$

První člen se nazývá výkon činný, druhý výkon jalový. Vystředujeme-li totiž okamžitý výkon v čase, druhý člen vymizí a první dá

$$< P > = \frac{1}{2}\, \mathcal{E}_0\, I_0\, \cos\varphi_0 \;=\; \mathcal{E}_{ef}\, I_{ef}\, \cos\varphi_0\,. \tag{5.32}$$

Zavedli jsme efektivní hodnoty emn a proudu $\mathcal{E}_{ef} = \mathcal{E}_0/\sqrt{2}$, $I_{ef} = I_0/\sqrt{2}$. Veličinu $\cos\varphi_0$ nazýváme *účiník*. Je-li účiník roven jedné, lze tedy střední výkon určit jako součin efektivních hodnot emn a proudu. Jinak záleží i na přítomnosti kapacity a indukčnosti v obvodu. Maximální výkon je odebírán při rezonanci, naopak blíží-li se φ_0 k $\pm\pi/2$, klesá výkon k nule.

Elektrické obvody v nichž působí harmonicky proměnné emn nazýváme *střídavými*. Také pro ně můžeme používat Ohmův zákon a Kirchhoffova pravidla a řešit je jako elektrické sítě. Musíme však vzít v úvahu, že emn a proudy jsou popsány jednak svými amplitudami jednak fázovými konstantami, mohou být vzájemně fázově posunuty. Sčítání vzájemně fázově posunutých sinusových a kosinusových proudů a napětí by bylo velmi složité. Navíc předpokládáme, že v celé síti je jedna společná úhlová frekvence Ω.

Jeden způsob, jak takové sítě řešit, je přechod ke komplexním obrazům emn a proudů nazývaným *fázory.* Fázory můžeme přitom znázorňovat v komplexní rovině vektorovými diagramy. Provedeme přiřazení

$$A_0 \ \cos(\Omega t + \alpha) \quad \to A_0 \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \ = \hat{A} \ .$$

Lze se přesvědčit, že počítání s goniometrickými funcemi dá touž výslednou amplitudu a fázovou konstantu jako počítání s fázory. Výsledkem je ovšem komplexní číslo; chceme-li dostat časový průběh dané veličiny, stačí vynásobit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$ a vzít reálnou část.

Uvažme výše zkoumaný sériový RLC obvod. Emn a proudu můžeme přiřadit fázory $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0$ a $\hat{I} = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$. Pro fázory můžeme napsat Ohmův zákon v komplexním tvaru jako

$$Z \ = \ \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\hat{I}} \ = \ \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_0} \ = \ Z_0 \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_0} \ . \tag{5.33}$$

Komplexní veličina Z se nazývá *impedance* obvodu. Podle (5.24) a (5.27) zjistíme, že velikost impedance je

$$Z_0 \ = \ \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \ = \ \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$$

a tangens jejího argumentu

$$\mathrm{tg}\ \alpha \ = \ -\mathrm{tg}\ \varphi_0 \ = \ \frac{1}{R}\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) \ .$$

Je to tedy komplexní číslo

$$Z = R + \mathrm{i}\, X = R + \mathrm{i} \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right) . \qquad (5.34)$$

Reálnou část impedance R nazýváme *rezistance*, imaginární část X *reaktance*. Ta se skládá z *induktance* ΩL a *kapacitance* $1/\Omega C$. Vodivosti odpovídá převrácená hodnota impedance

$$Y = \frac{1}{Z} = G + \mathrm{i}\, S$$

nazývaná *admitance*. Její reálná část G je *konduktance* a imaginární část S *susceptance*.

1. <u>Paralelní RLC obvod</u>

Na obr. 5.14 je znázorněn paralelní RLC obvod.

Při takovém paralelním zapojení se sčítají admitance:

$$Y = \mathrm{i}\, \Omega\, C + \frac{1}{R + \mathrm{i}\, \Omega\, L}$$

Tato admitance je reálná na rezonanční frekvenci

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

a v ideálním případě $R = 0$ bude na rezonančním kmitočtu nulová. V tom případě se paralelní obvod chová jako nekonečný odpor; všechna energie osciluje v obvodu a neprochází dále.

Bude-li obvod zapojen způsoby znázorněnými na obr. 5.15, 5.16, 5.17, budou odpovídající rezonanční frekvence rovny

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC - R^2C^2}} , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

obr. 5.14 obr. 5.15

obr. 5.16 obr. 5.17

2. Trojfázový proud

Při přenosu průmyslových střídavých proudů se používá trojfázové soustavy. Generátor v elektrárně produkuje tři střídavá napětí, která jsou fázově posunuta vždy o $2\pi/3$. Uspořádáme-li tato napětí do trojúhelníka (obr. 5.18) a budou-li amplitudy všech tří napětí stejné, bude zřejmě součet jejich fázorů nulový:

$$\hat{U}_1 \; + \; \hat{U}_2 \; + \; \hat{U}_3 \; = \; 0 \; .$$

Určíme proud protékající kterýmkoli vodičem vedení. Například do vrcholu 3 vtéká větví 2-3 proud $\hat{I}_1 = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, který se rozdělí na proud $\hat{I}_2 = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + 2\pi/3)}$ ve větvi 3-1 a proud $\hat{I} = I_{max} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ vycházející vedením z vrcholu 3. Položíme-li $\varphi = 0$, dostaneme z Kirchhoffova zákona

$$\hat{I} \; = \; \hat{I}_1 \; - \; \hat{I}_2 \; = \; I_0 \; \left(\, 1 \; - \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3} \, \right) \; = \; I_0 \, \sqrt{3} \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} \; ,$$

a tedy

$$I_{max} \; = \; \sqrt{3} \; I_0 \; .$$

Vektorový diagram skládání těchto proudů je na obr. (5.19).

Podobně bychom ukázali, že při uspořádání do hvězdy (obr. 5.20) bude výsledný proud čtvrtým (nulovým) vodičem roven nule. Pro napětí tentokrát platí vztah $U_{max} = \sqrt{3}\; U_0$, takže při efektivní hodnotě napětí mezi dvěma vrcholy 380 V dostáváme mezi kterýmkoli vrcholem a "nulákem" 22O V.

3. Maxwellovy rovnice elektromag-

obr. 5.18

obr. 5.19

obr. 5.20

netického pole

V předchozím odstavci jsme na základě zákona elektromagnetické indukce a zákona zachování elektrického náboje odvodili kompletní soustavu Maxwellových rovnic ve vakuu pro vektor intenzity elektrického pole a vektor magnetické indukce (5.5). Při řešení těchto rovnic vycházíme z toho, že magnetické pole je solenoidální (div $\vec{B} = 0$) a tak můžeme zavést vektorový potenciál vztahem $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Dosazením do rovnice elmg indukce dostaneme

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} .$$

Tedy

$$\text{rot } \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 .$$

Pole $\vec{E}$ sice potenciální není, ale zato je potenciální pole uvedené v závorce. Můžeme proto zavést skalární potenciál φ vztahem

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \text{grad } \varphi . \tag{5.35}$$

Budeme tak řešit soustavu rovnic pro skalární a vektorový potenciál $\varphi(x, y, z, t)$, $\vec{A}(x, y, z, t)$ a pak najdeme vektory polí ze vztahů

$$\vec{E} = - \text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} , \qquad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} . \tag{5.36}$$

Dosazením do Maxwellových rovnic dostaneme poměrně komplikované vztahy

$$\text{div } \left(\text{grad } \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = - \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\text{rot rot } \vec{A} \;=\; \mu_0 \, \vec{j} \;-\; \varepsilon_0 \mu_0 \, \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{grad } \varphi \;+\; \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \; .$$

Lze je upravit na

$$\Delta \, \varphi \;=\; - \, \frac{\rho}{\varepsilon_0} \;-\; \frac{\partial}{\partial t} \, \text{div } \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} \;-\; \varepsilon_0 \mu_0 \, \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \;=\; - \, \mu_0 \, \vec{j} \;+\; \text{grad } \left(\text{div } \vec{A} \;+\; \varepsilon_0 \mu_0 \, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \; .$$

Skalární a vektorový potenciál však nejsou určeny jednoznačně a můžeme na ně klást dodatečné podmínky. Můžeme například požadovat splnění *Lorentzovy kalibrační (cejchovací) podmínky*

$$\text{div } \vec{A} \;+\; \varepsilon_0 \mu_0 \, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \;=\; 0 \; . \tag{5.37}$$

Potom se soustava rovnic pro potenciály drasticky zjednoduší a navíc se obě rovnice stanou symetrickými:

$$\Delta \, \varphi \;-\; \frac{1}{c^2} \, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \;=\; - \, \frac{\rho}{\varepsilon_0} \; , \qquad \Delta \, \vec{A} \;-\; \frac{1}{c^2} \, \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \;=\; - \, \mu_0 \, \vec{j} \; . \tag{5.38}$$

Zavedeme-li nový operátor zvaný *d'Alembertián*, který je vlastně zobecněným "laplasiánem", vztahem

$$= \; \Delta \;-\; \frac{1}{c^2} \, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \; ,$$

můžeme zapsat rovnice pro potenciály elektromagnetického pole ve velmi jednoduchém a přehledném tvaru

$$\varphi \;=\; - \, \frac{\rho}{\varepsilon_0} \; , \qquad\qquad \vec{A} \;=\; - \, \mu_0 \, \vec{j} \; . \tag{5.39}$$

Řešením této soustavy nehomogenních parciálních diferenciálních rovnic při zadaných hustotách náboje a proudu dostaneme potenciály a z nich pak podle (5.36) určíme vektory polí. V obecném případě to může být i obtížná úloha.

Najdeme jedno řešení Maxwellových rovnic ve vakuu, které popisuje rovinnou *elektromagnetickou vlnu.* Na potenciály naložíme podmínky div $\vec{A} = 0$, $\quad \varphi = 0$, které jsou v souladu s Lorentzovou podmínkou. Dále budeme předpokládat, že všechny veličiny závisí pouze na souřadnici z (směr šíření rovinné vlny) a t. Stačí tedy hledat pouze vektorový potenciál z d'Alembertovy rovnice $\vec{A} = 0$, která má tvar

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0\,.$$

Řešením této rovnice je funkce

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\omega\, t - k\, z + \alpha),$$

která představuje rovinnou vlnu šířící se fázovou rychlostí

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c\,. \tag{5.40}$$

Z podmínky div $\vec{A} = 0$ plyne $\partial A_z/\partial z = 0$, $\quad A_z = \text{konst} = 0$ (konstantní nenulové řešení nás nezajímá), a vektorový potenciál je tedy kolmý ke směru šíření vlny z. Můžeme proto v jeho směru zvolit třeba osu x: $\vec{A} \equiv (A, 0, 0)$. Elektrické a magnetické pole vlny tedy bude

$$\vec{E} = -\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,, \qquad \vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}\,, \tag{5.41}$$

a jejich jediné nenulové složky

$$E_x = \omega\, A_0\, \sin(\omega\, t - k\, z + \alpha), \quad B_y = k\, A_0\, \sin(\omega\, t - k\, z + \alpha)\,. \tag{5.42}$$

obr. 5.21 obr. 5.22

Elektrické a magnetické pole se mění podle téhož harmonického zákona, ve fázi, a všechny tři vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$ (vektor $\vec{k}$ ve směru šíření vlny nazýváme vlnovým vektorem) tvoří pravotočivou soustavu, jak je vidět na obr. 5.21. [1]

Elektromagnetická vlna přenáší energii W a hybnost $\vec{P}$ a je tedy plně reálným fyzikálním objektem. Hustotu toku energie (energii přenesenou za jednotku času jednotkou plochy) nazýváme *Poyntingův vektor* $\vec{S}$. Zákon zachování energie

[1]Elektromagnetická vlna je tedy příčná a pravotočivá. Mohla by vzniknout otázka, zda existují také levotočivé elektromagnetické vlny. Tato otázka však není zcela na místě vzhledem k tomu, že magnetická indukce představuje axiální vektor. Přejdeme-li inverzí k levotočivé soustavě souřadnic, změní vektory $\vec{E}$ a $\vec{k}$ znaménko, zatímco vektor $\vec{B}$ nikoli. Vlna se tedy stane levotočivou. Je ovšem zřejmé, že změna soustavy souřadnic nemůže nic změnit na fyzikálním charakteru elektromagnetické vlny, takže oba popisy jsou zcela rovnocenné.

můžeme matematicky vyjádřit jako rovnici kontinuity

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = 0 \, . \qquad (5.43)$$

Zde w je objemová hustota energie elektromagnetického pole. Tuto hustotu pro pole ve vakuu jsme již určili jako (4.37). Pomocí Maxwellových rovnic můžeme zákon zachování energie upravit na tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 \, E^2}{2} + \frac{B^2}{2 \, \mu_0} \right) = \varepsilon_0 \, \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \, \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E} \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{rot} \vec{E} \right) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} (\vec{B} \times \vec{E}) \, .$$

Odtud Poyntingův vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \, \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H} \, , \qquad (5.44)$$

Hustota hybnosti přenášené elektromagnetickou vlnou je $\vec{S}/c^2$. Dopadá-li tedy elektromagnetická vlna kolmo na nějakou plochu a je na ní zcela pohlcena, předala jednotce této plochy za dobu Δt zároveň hybnost obsaženou v objemu $c \, \Delta t$ (obr. 5.22). Vyvinula tedy mechanický tlak

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \, \frac{S}{c^2} \, c \, \Delta t = \frac{S}{c} \, . \qquad (5.45)$$

Je-li plocha dokonale odrazivá, bude tlak elektromagnetické vlny dvojnásobný.

Maxwellovy rovnice jsou rovnicemi makroskopickými, vystupují v nich náboje, proudy a pole měřené našimi makroskopickými přístroji a mohou být tak přímo konfrontovány z experimentem. V minulém století, když bylo zjištěno, že z kovů mohou vylétávat elektrony a že látka je vlastně tvořena nabitými částicemi, vytvořil Lorentz takzvanou elektronovou teorii hmoty. Neznal sice ještě stavbu atomu, ale představoval si látku jako vakuum, v němž jsou rozloženy a pohybují se nabité částice. Tyto částice jsou popsány rozložením *mikroskopických* nábojových a proudových hustot, které ovšem nejsou přímo měřitelné, a tak vznikají *mikroskopická* elektrická a magnetická pole podřizující se rovnicím stejného tvaru jako jsou rovnice Maxwellovy. Rovnice pro mikroskopická, lokální pole a hustoty se nazývají *Lorentzovy rovnice* a můžeme je zapsat jako

$$\mathrm{div}\ \vec{E}_l \ = \ \frac{\rho_l}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{rot}\ \vec{B}_l \ = \ \mu_0\ \vec{j}_l \ + \ \varepsilon_0\mu_0\ \frac{\partial\vec{E}_l}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E}_l \ = \ -\ \frac{\partial\vec{B}_l}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\ \vec{B}_l \ = \ 0\ . \tag{5.46}$$

Od Lorentzových rovnic můžeme přejít k rovnicím Maxwellovým tak, že mikroskopické veličiny vystředujeme přes dostatečně velké prostorové a časové intervaly. U nábojů a proudů pak musíme rozlišovat veličiny vázané v látce a veličiny volné. Označíme

$$<\vec{E}_l> = \ \vec{E}\ , \quad <\vec{B}_l> = \ \vec{B}\ , \quad <\rho_l> = \ \rho+\rho_v\ , \quad <\vec{j}_l> = \ \vec{j}+\vec{j}_m+\vec{j}_p\ .$$

Podle (2.42), (4.54) a (3.10) máme pro vázané náboje, magnetizační a polarizační proudy

$$\rho_v \ = \ -\ \mathrm{div}\ \vec{P}\ , \quad \vec{j}_m \ = \ \mathrm{rot}\ \vec{M}, \quad \vec{j}_p \ = \ \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\ .$$

Zavedeme-li nyní vektory

$$\vec{D} \ = \ \varepsilon_0\ \vec{E} \ + \ \vec{P}\ , \quad \vec{H} \ = \ \frac{1}{\mu_0}\ \vec{B} \ - \ \vec{M}\ ,$$

dostaneme

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\operatorname{div}\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

odkud po vynásobení ε_0 máme

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho\,,$$

kde ρ je hustota pouze volných nábojů.

Dále

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}+\mu_0\,\vec{j}_m+\mu_0\,\vec{j}_p+\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\,\vec{j}+\mu_0\operatorname{rot}\vec{M}+\mu_0\,\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,.$$

Dělením μ_0 dostaneme

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\,,$$

kde $\vec{j}$ je hustota pouze volných proudů.

Tak dospíváme ke konečné podobě Maxwellových rovnic pro obecné elektromagnetické pole v látkovém prostředí

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0\,. \tag{5.47}$$

Tyto rovnice je třeba doplnit vztahy

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}\,, \qquad \vec{B} = \mu\,\vec{H}\,, \qquad \varepsilon_0\,\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

a hraničními podmínkami

$$\operatorname{Div}\vec{D} = \sigma \qquad \operatorname{Rot}\vec{H} = \alpha$$

$$\operatorname{Rot}\vec{E} = 0 \qquad \operatorname{Div}\vec{B} = 0\,. \tag{5.48}$$

Příklady

5.1 Dlouhým přímým vodičem teče proud I. Určete magnetický indukční tok obdélníkovou smyčkou umístěnou podle obr. 5.23. Vzdaluje-li se smyčka od vodiče rychlostí v určete indukované emn.

$$\left[\ \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}\ , \quad \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(a_2-a_1)lv}{a_1 a_2}\ \right]$$

5.2 Dvě dlouhé dokonale vodivé kolejnice jsou od sebe vzdáleny 0,5 m a spojeny odporem 0,2 Ω. Po nich klouže dokonale vodivá tyč rychlostí 4 m.s^{-1}. Kolmo k rovině kolejnic působí magnetické pole 0,5 T. Určete indukované emn, sílu potřebnou k udržení konstantní rychlosti, mechanický a tepelný výkon v tomto zařízení.

[1 V, 1,25 N, 5 W, 5 W]

5.3 Určete vlastní indukčnost a magnetickou energii solenoidu o poloměru 1 cm a délce 50 cm s 6 závity na 1 cm délky, protéká-li závity proud 1 A.

[71 μH, 3,5.10^{-5} J]

obr. 5.23

5.4 Určete vlastní indukčnost toroidální cívky malého průřezu 1 cm^2 o poloměru středové kružnice 5 cm, s celkovým počtem závitů N=100.

[4.10^{-6} H]

5.5 Určete vlastní indukčnost toroidu obdélníkového průřezu o vnitřním poloměru
10 cm, vnějším poloměru 20 cm a výšce 5 cm, je-li na něm navinuto 1 000 závitů.

[6,93 mH]

5.6 Kovový kotouč poloměru 10 cm rotuje s frekvencí 60 Hz kolem osy v homogenním magnetickém poli 0,2 T kolmém k rovině kotouče. Najděte potenciální rozdíl mezi středem a okrajem kotouče. Jaký bude tento rozdíl bez magnetického pole?

[0,377 V, $4{,}0.10^{-9}$ V]

5.7 Čtvercová smyčka o straně 10 cm rotuje v homogenním magnetickém poli 0,2 T kolem osy rovnoběžné s rovinou čtverce a kolmé k poli s frekvencí 50 Hz. V okamžiku $t = 0$ leží smyčka v rovině kolmé k poli. Určete závislost indukovaného emn na čase.

[$0,2\pi \sin 100\pi t$]

5.8 Jaké maximální emn se může indukovat v cívce se 4 000 závity o středním poloměru 12 cm rotující s frekvencí 30 Hz v zemském magnetickém poli o indukci 5.10^{-5} T?

[1,73 V]

5.9 Dvě cívky jsou indukčně vázány vzájemnou indukčností 5 H. Jak se musí měnit proud v primární cívce, aby se v sekundární indukovalo konstantní emn 1 V? Může se takto indukovat trvale?

[- 0,2 t+ konst, ne]

5.10 Dvě cívky mají indukčnosti 0,2 H, 0,3 H a vzájemnou indukčnost 0,1 H. Jaká bude výsledná indukčnost při zapojení těchto cívek do série?

[0,7 H nebo 0,3 H, podle způsobu zapojení]

5.11 Kondenzátor o kapacitě 0,1 μF s počátečním napětím 1 000 V se vybíjí přes odpor 10 Ω. Za jakou dobu poklesne velikost náboje na kondenzátoru na úroveň jednoho elementrárního náboje?

[$3,4.10^{-5}$s]

5.12 Kondenzátor o kapacitě 100 μF je nabit na 10 000 V. Vybíjíme jej přes odpor
1 kΩ. Za jak dlouho se můžeme kondenzátoru bez nebezpečí dotýkat?

[asi za 0,5 - 1 s, podle naší tělesné nátury]

5.13 Dokažte, že energie rozptýlená na odporu během vybíjení kondenzátoru je právě rovna energii, která byla v kondenzátoru nahromaděna.

5.14 Cívka má odpor 100 Ω. Jsou-li přívody cívky zkratovány v době, kdy cívkou prochází ustálený proud, klesne proud v cívce na jednu desetinu původní hodnoty za
0,01 s. Jaká je vlastní indukčnost cívky?

[435 mH]

5.15 K nabití akumulátoru je potřeba 20 ampérhodin ustáleného proudu. Za jak dlouho se akumulátor nabije střídavým proudem o efektivní hodnotě 1 A, který usměrníme dvoucestným usměrňovačem?

[22,2 h]

5.16 Prostor mezi deskami kondenzátoru je vyplněn dielektrikem o relativní permitivitě 3 a rezistivitě 10^8 Ω.m. Určete časovou konstantu kondenzátoru.

[$2,65.10^{-3}$s]

5.17 Sériový RLC obvod má vlastní frekvenci f_0=600 kHz, kapacitu 370 pF a odpor 15 Ω. Určete činitel jakosti obvodu.

[50]

5.18 Sériový obvod má kapacitu 0,1 μF a indukčnost 0,1 H. Jaký musí být odpor R, aby nastal právě případ kritického útlumu?

[2 kΩ]

5.19 Sériový rezonanční obvod $R = 0,1\ \Omega,\ L = 1\ H,\ C = 100\ \mu F$ je připojen ke zdroji střídavého napětí o amplitudě 1 V. Jaká bude amplituda napětí a proudu při rezonanci?

[1 000 V, 10 A]

5.20 Mějme spotřebič o reálné impedanci R, který při efektivním napětí 120 V vyvíjí výkon 60 W. Chceme provozovat tento spotřebič na témž výkonu při efektivní hodnotě napětí 240 V v síti 50 Hz. Jakou indukčnost nebo jakou kapacitu bychom museli předřadit?

[1,32 H nebo 7,67 μF]

OUSTAVY FYZIKÁLNÍCH JEDNOTEK

Základem dnešních měrových soustav je systém metrický, který se zrodil v období Velké francouzské revoluce. Jednotka *metr* byla původně definována z délky kvadrantu zemského poledníku jako jeho desetimiliontá část a realizována v podobě tzv. archivního metru z r. 1799. Bylo to platinové pravítko průřezu 25 krát 4 mm, které sloužilo jako míra koncová a je dnes uloženo v Louvru. V r.1869 bylo upuštěno od poledníkové definice a za metr prohlášena délka prototypu. Nový prototyp zvaný mezinárodní metr byl zhotoven r.1889 a představuje kolejničku z platiny a iridia (9:1) o průřezu 20 krát 20 mm. Vzdálenost metru je na něm vyznačena dvěma vrypy, je to tedy míra čárková. V roce 1960 byla délka metru stanovena pomocí vlnové délky světla až konečně r. 1983 byla přijata dnešní definice:
metr je délka rovnající se vzdálenosti, kterou uběhne světlo ve vakuu za 1/299 792 458 s. Pokud by se tedy podařilo dále zpřesnit hodnotu rychlosti světla ve vakuu, zůstala by její číselná hodnota stejná a změnil by se metr.

Jednotka hmotnosti, *kilogram*, byla rovněž stanovena pomocí prototypu. Je jím rovnostranný platino - iridiový válec o průměru 38 mm a je uložen v Sèvres u Paříže. Byl zhotoven r. 1889 a od té doby se nepodařilo najít vhodnou přírodní definici jednotky hmotnosti.

Pokud jde o jednotku času, *sekundu*, byla původně stanovována z astronomických měření, jako 1/86 400 středního slunečního dne, pak z délky tropického roku a v r.1967 byla sekunda definována jako *doba trvání 9 192 631 770 period záření, které přísluší přechodu mezi dvěma velmi jemnými hladinami základního stavu atomu cesia 133.*

V roce 1875 byla uzavřena mezinárodní metrická konvence mezi 17 státy (včetně Rakousko-Uherska), jejichž počet se od té doby neustále zvětšoval. Československo k ní přistoupilo jako nový stát 1922. Nejvyšším orgánem konvence je Generální konference pro míry a váhy, která se schází každé čtyři roky v Paříži a upravuje otázky jednotek a měření. Otázky jednotek a měření elektrických a magnetických veličin byly zprvu upravovány na mezinárodních elektrotechnických kongresech, z nichž první se sešel v Paříži r. 1881.

Elektrické a magnetické jednotky původně navazovaly na soustavu CGS (centimetr - gram - sekunda) a vycházely ze symetrie Coulombových zákonů pro elektrické a magnetické náboje:

$$F \;=\; k_1\, \frac{Q_1\; Q_2}{r^2}\;, \qquad F \;=\; k_2\, \frac{M_1\; M_2}{r^2}\;.$$

Položíme-li zde konstanty k_1, k_2 rovny jedné a bezrozměrné, dostaneme nezávislé jednotky pro elektrický a magnetický náboj s týmž rozměrem $\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}$. Intenzitu magnetického pole $\vec{H}$ pak definujeme analogicky intenzitě elektrického pole jako sílu působící na jednotkový magnetický náboj.

Vedle Coulombových zákonů máme však ještě další silový zákon, podle něhož nekonečný přímý vodič vyvolává v okolí magnetické pole o velikosti intenzity

$$H = k_3 \frac{2\,I}{r}\,.$$

Tento zákon spojuje elektrické a magnetické veličiny. Protože jednotky těchto veličin byly již určeny volbou konstant k_1, k_2, není konstanta k_3 nezávislá a je možno ji změřit. To učinil Weber a s překvapením zjistil, že tato konstanta je rovna převrácené hodnotě rychlosti světla ve vakuu.

Obecně platí mezi těmito konstantami vztah $k_1 k_2/k_3 = c^2$. Můžeme tedy vždy dvě z nich volit a třetí je pak určena. Položíme-li k_1 a k_3 rovny jedné, dostaneme elektrostatickou soustavu CGSE, položíme-li k_2 a k_3 rovny jedné, magnetickou soustavu CGSM, položíme-li k_1 a k_2 rovny jedné, vyjde nám $k_3 = 1/c$ a dostaneme Gaussovu absolutní soustavu. Ta se dosud běžně používá v zahraniční fyzikální literatuře. Má tu výhodu, že vektory intenzity elektrického a magnetického pole, elektrické a magnetické indukce mají v ní všechny stejný rozměr a nevyskytují se v ní nefyzikální konstanty ε_0 a μ_0. Zato se v řadě vzorců, například u magnetické Lorentzovy síly, objevuje koeficient $1/c$.

Protože jednotky napětí, proudu a odporu v soustavách CGS neměly vhodnou velikost pro praktické užití, zavedl mezinárodní elektrotechnický kongres v Chicagu r. 1893 tazvané praktické jednotky: ohm jako 10^9 CGSM, ampér jako 10^{-1} CGSM a volt jako 10^8 CGSM. Zároveň definoval i experimentální prototypy těchto jednotek (ohm jako odpor rtuťového sloupce za definovaných podmínek, ampér jako proud, který při elektrolýze vyloučí z roztoku dusičnanu stříbrného určité množství stříbra a volt jako určitou část napětí Westonova článku). Součin voltu a ampéru dává jednotku výkonu jeden watt rovný 10^7 jednotek výkonu CGS. Aby se dosáhl soulad mezi těmito praktickými elektrotechnickými jednotkami a mechanickými jednotkami, přešlo se od soustavy CGS k soustavě MKS (metr - kilogram - sekunda), kde je jednotkou výkonu právě watt.

V roce 1882 navrhl Heaviside takzvanou racionalizaci elektrických a magnetických jednotek (vlastně normování toku siločar na jednotku prostorového úhlu) a konstanty k_1, k_2 dostaly tvar

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad k_2 = \frac{1}{4\pi\mu_0}.$$

Pokud by elektrický a magnetický náboj byly skutečně dvě nezávislé veličiny, bylo by možno nezávisle volit konstanty ε_0, μ_0 a tím určit soustavu jednotek. V Gaussově absolutní soustavě by stačilo zvolit $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1/4\pi$. Protože se však ukázalo, že magnetický náboj je vázán s nábojem elektrickým a pro konstanty ε_0, μ_0 platí vztah (4.10), můžeme vlastně volit jen jednu konstantu.

A tak Generální konference v roce 1948 rozhodla položit $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ m.kg.s^{-2}A^{-2} a definovat tak jako základní jednotku pro elektromagnetické veličiny *ampér* (viz definice na str. 146). Tím vznikla soustava MKSA. Později byly doplněny základní veličiny z dalších oblastí fyziky, a to jednotka teploty *kelvin* (jako *273,16tá část termodynamické teploty trojného bodu vody*, 1954), jednotka svítivosti *kandela* (jako *svítivost zdroje, který vysílá monochromatické záření frekvence 540.*10^{12} *Hz a jehož zářivost v daném směru činí 1/683 wattů na steradián*, 1979) a jednotka látkového množství *mol* (jako *látkové množství soustavy, která obsahuje právě tolik elementárních jedinců, kolik je atomů v 0,012 kg uhlíku 12*, 1971).

V roce 1960 přijala Generální konference soustavu MKSA doplňovanou o další jednotky jako ucelenou soustavu fyzikálních jednotek pod názvem le Système International d'Unités (SI), která je postupně uzákoňována v dalších zemích. U nás byla zavedena zákonem z r. 1962 a včleněna do norem. Soustava SI není ovšem uzavřena, každé čtyři roky se schází Generální konference a vnáší další změny a upřesnění. I když je otázka soustavy fyzikálních jednotek jistě důležitá, není na druhé straně třeba ji přeceňovat. Jestliže při řešení nějakého fyzikálního problému se ukáže výhodnější použít jednotek jiných, fyzik neváhá to učinit. Jedna věc jsou totiž zákony a normy lidské, které mohou být na konferencích měněny, jiná věc jsou zákony přírodní, které měněny být nemohou.

Uvedeme přehled nejdůležitějších mechanických a elektromagnetických fyzikálních veličin a jejich jednotek. V posledním sloupci uvádíme převodní koeficient k mezi soustavou SI a soustavou Gaussovou

veličina	rozměr	jednotka	k
frekvence	T^{-1}	Hz	-
rychlost	LT^{-1}	$m.s^{-1}$	-
zrychlení	LT^{-2}	$m.s^{-2}$	-
hybnost	LMT^{-1}	$kg.m.s^{-1}$	-
síla	LMT^{-2}	N	-
tlak	$L^{-1}MT^{-2}$	Pa	-
energie	L^2MT^{-2}	J	-
výkon	L^2MT^{-3}	W	-
proud	I	A	3.10^9
náboj	TI	C	3.10^9
intenzita el. pole	$LMT^{-3}I^{-1}$	$V.m^{-1}$	$1/3.10^4$
potenciál, emn	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	V	1/300
el. indukce	$L^{-2}TI$	$C.m^{-2}$	$12\pi.10^5$
el. indukční tok	TI	C	$12\pi.10^9$
el. dipól. moment	LTI	C.m	3.10^{11}
polarizace	$L^{-2}TI$	$C.m^{-2}$	3.10^5
kapacita	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	F	9.10^{11}
odpor	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	Ω	$1/9.10^{11}$
vodivost	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	S	9.10^{11}
mg. indukce	$MT^{-2}I^{-1}$	T	10^4
mg. indukční tok	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	Wb	10^8
intenzita mg. pole	$L^{-1}I$	$A.m^{-1}$	$4\pi.10^{-3}$
mg. dipól. moment	L^2I	$A.m^2$	10^3
magnetizace	$L^{-1}I$	$A.m^{-1}$	10^{-3}
indukčnost	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	H	10^9
mmn	I	A	$4\pi.10^{-1}$
mg. odpor	$L^{-2}M^{-1}T^2I^2$	H^{-1}	$4\pi.10^{-7}$
mg. vodivost	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	H	$10^7/4\pi$

Otázky:

01. Základní postuláty STR, Lorentzovy transformace a jejich důsledky
02. Relativistické skládání rychlostí, aberace
03. Hmotnost, hybnost a energie v STR
04. Základní postuláty OTR a její experimentální ověření
05. Elektrický náboj v klidu a za pohybu
06. Coulombův zákon a jeho experimentální ověření
07. Elementární náboj a metody jeho určování
08. Energie soustavy nábojů, hustota energie elektrického pole
09. Gaussův zákon
10. Maxwellovy rovnice elektrostatického pole a jejich řešení
11. Multipólový rozvoj elektrostatického pole
12. Elektrický dipól a jeho pole
13. Elektrická dvojvrstva
14. Vektor elektrické polarizace, polarizovaná tělesa
15. Vodiče v elektrostatickém poli
16. Základní úloha elektrostatiky a její řešení
17. Kapacita, kondenzátor, energie kondenzátoru
18. Elektrostatické pole v dielektriku, vektor elektrické indukce
19. Stacionární elektrický proud a pole
20. Rovnice kontinuity elektrického proudu
21. Ohmův zákon v integrálním a diferenciálním tvaru
22. Klasická teorie vodivosti, vodivost elektrolytů a plynů
23. Tolmanův - Stewartův pokus
24. Vodivost kondenzovaných látek, supravodivost
25. Elektromotorické napětí a jeho zdroje
26. Kirchoffovy zákony a řešení sítí
27. Jouleův zákon v integrálním a diferenciálním tvaru
28. Elektrické pole pohybujícího se náboje
29. Síly mezi pohybujícími se náboji, síla Lorentzova

30. Magnetická indukce a vektorový potenciál
31. Maxwellovy rovnice stacionárních polí
32. Ampérův zákon
33. Biotův - Savartův zákon
34. Transformace složek elektrického a magnetického pole
35. Síly působící mezi elektrickými proudy
36. Magnetický tlak a hustota energie magnetického pole
37. Pohyb nabité částice v elektrickém a magnetickém poli
38. Hallův jev
39. Indukčnost, solenoid a energie solenoidu
40. Faradayův zákon elektromagnetické indukce
41. Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole, posuvný proud
42. Elektromagnetická vlna
43. Přechodové stavy v RC a RL obvodu
44. Impedance
45. Rezonance v sériovém RLC obvodu
46. Magnetický dipól a jeho pole
47. Vektor magnetizace a intenzity magnetického pole, magnetika
48. Magnetické obvody
49. Maxwellovy rovnice v látkovém prostředí, vztah k Lorentzovým rovnicím
50. Soustavy jednotek ve fyzice

Obsah

Předmluva

Předkládaná skripta jsou určena studentům prvního ročníku Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze jako pomůcka při studiu základního kursu fyziky ve druhém semestru. Mohou ovšem sloužit i dalším zájemcům a studentům vyšších ročníků k vyhledání potřebné informace. Vycházejí s mnohaleté pedagogické zkušenosti autora s výukou předmětu Elektřina a magnetismus a ve srovnání s dříve používanými skripty jsou pojata přehledněji a systematičtěji, těsněji sledují přednáškový výklad. Aplikace teorie na konkretní problémy jsou vyčleněny do číslovaných úloh, k procvičení látky a přípravě ke zkouškám slouží příklady za jednotlivými kapitolami a závěrečné otázky. Skripta tvoří jeden celek s připravovanými skripty autora Mechanika.

Skripta nemají ovšem nahradit učebnice a další monografickou literaturu, se kterou musí studenti fyzikálních a fyzikálně inženýrských oborů pracovat. V tomto ohledu je k dispozici učebnice autorů B. Sedláka a I. Štolla "Elektřina a magnetismus" (Academia, Karolinum 1993), kde je možno najít odkazy i na další literaturu a také informaci o historickém vývoji poznatků o elektřině a magnetismu. Klasickou učebnicí, v níž je stále možno najít cenné poučení, je kniha V. Petržílky a S. Šafraty "Elektřina a magnetismus" z r. 1953.

Autor děkuje všem, kde v průběhu mnoha let přispěli ke zdokonalování výuky tohoto předmětu a především odhalování chyb a omylů (což je ovšem proces nikdy nekončící), spolupracovníkům na katedře fyziky, studentům a zejména recenzentovi.

Praha září 1994

2. 2. 2. 2.

2. Lorentzovy transformace a jejich důsledky

2. Lorentzovy transformace a jejich důsledky

2.Lorentzovy transformace a jejich důsledky