MATEMATICKÝ APARÁT

1. Skalární a vektorová pole

Ve fyzice nastává často potřeba přiřadit jednotlivým bodům prostoru skalární či vektorovou veličinu. Mluvíme pak o skalárním či vektorovém poli. *Skalární pole* přiřazuje každému bodu v určité oblasti prostoru jednoznačně reálné číslo; může tedy být popsáno pomocí funkce prostorových souřadnic. V kartézské soustavě souřadnic můžeme polohu každého bodu v prostoru vyjádřit jeho polohovým vektorem (nepěkně "rádiusvektorem") $\vec{r}$ o souřadnicích $x,\ y,\ z$, tedy $\vec{r}\ \equiv\ (x, y, z)$. Dané skalární pole pak můžeme vyjádřit jako funkci vektoru $\vec{r}$ nebo jako funkci tří proměnných $x,\ y,\ z$

$$f\ =\ f(\vec{r})\ =\ f(x, y, z). \tag{M.1}$$

Podobně *vektorové pole* může být popsáno vektorovou funkcí $\vec{F}$. Ta představuje uspořádanou trojici skalárních funkcí prostorových souřadnic:

$$\vec{F}(\vec{r})\ =\ [F_x(x, y, z),\ F_y(x, y, z),\ F_x(x, y, z)]. \tag{M.2}$$

Skalární a vektorová pole, která nezávisí explicitně na čase se nazývají *stacionární*. Obecná pole mohou být ovšem časově závislá. Taková pole $f(x, y, z, t),\ \vec{F}(x, y, z, t)$, která jsou funkcemi tří prostorových a jedné časové souřadnice se nazývají *nestacionární*.

Protože skalární a vektorová pole jsou popsána funkcemi více proměnných, můžeme je parciálně derivovat. Pro skalární pole můžeme vytvořit tři první parciální derivace, pro vektorové pole devět prvních parciálních derivací; dále můžeme počítat parciální derivace druhého a vyšších řádů. Vždy budeme předpokládat, že uvažované funkce jsou dostatečně hladké a že tyto derivace existují.

Často je třeba vyšetřovat vlastnosti daného pole na určité křivce. Pak lze zavést pojem *směrové derivace*. Probíhá-li bod A po nějaké křivce, může být jeho poloha určena délkou oblouku s měřeného od pevného referenčního bodu A_0 na této křivce (viz obr. M 1.).

Souřadnice polohového vektoru $\vec{r}$ můžeme vyjádřit pomocí parametru s jako $x\ =\ x(s),\ y\ =\ y(s),\ z\ =\ z(s)$. Jestliže polohový vektor svírá s osami souřadnic úhly α, β, γ, platí $\cos\alpha\ =\ \frac{x}{r},\ \cos\beta\ =\ \frac{y}{r},\ \cos\gamma\ =\ \frac{z}{r}$, přičemž pro směrové kosiny platí $\cos^2\alpha\ +\ \cos^2\beta\ +\ \cos^2\gamma\ =\ 1$.

Sledujme nyní situaci, kdy se bod A neomezeně přibližuje po dané křivce k bodu A_0. Polohový vektor $\vec{r}$ přejde v diferenciálně malý vektor $d\vec{r}\ =\ (dx, dy, dz)$ a bude mít směr tečny ke křivce v bodě A_0 a velikost ds. Jednotkový tečný vektor $\vec{t}$ v bodě A je pak možno vyjádřit derivacemi souřadnic podle parametru s:

$$\vec{t}\ =\ \left(\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right)\ =\ (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma). \tag{M.3}$$

Získaný výsledek není ovlivněn volbou referenčního bodu. Přechod k jinému počátku A_0' by znamenal přičíst konstantní vektor spojující oba počátky; ten však po derivování podle parametru s dá nulový vektor.

Mějme nyní skalární pole $f(x, y, z)$. Toto pole na křivce můžeme vyjádřit složenou funkcí $f[x(s), y(s), z(s)]$ jedné proměnné s. Podle pravidel pro derivování složené funkce více proměnných dostáváme

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{t}}\ =\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds}\ +\ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}\ +\ \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}\ =\ \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha\ +\ \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\ +\ \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{M.4}$$

Tento výraz představuje derivaci skalárního pole f ve směru daném jednotkovým vektorem $\vec{t}$. Je přitom jedno po jaké křivce se bod A přibližuje k bodu A_0 v němž derivaci určujeme, pokud všechny tyto křivky mají týž tečný vektor. Směrová derivace je tedy lokální charakteristika pole v daném bodě závislá pouze na zvoleném směru.

obr. M 1.

Také vektorová pole mohou záviset na parametru, například na čase nebo délce křivky. Derivace vektoru podle skalárního parametru je definována obdobně jako derivace skalární funkce

$$\frac{d\vec{F}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{F}(s + \Delta s) - \vec{F}(s)}{\Delta s}. \tag{M.5}$$

Vzhledem ke způsobu odečítání vektorů se snadno přesvědčíme, že takto definovaná derivace vektoru představuje vektor tvořený derivacemi souřadnic vektoru:

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \left(\frac{dF_x}{ds}, \frac{dF_y}{ds}, \frac{dF_z}{ds} \right). \tag{M.6}$$

Pro derivování součtů a součinů vektorových funkcí (skalárního, vektorového, součinu vektorové a skalární funkce) platí táž pravidla jako při derivování skalárních funkcí; u vektorového součinu musíme ovšem dodržet pořadí derivovaných funkcí.

Speciálně, má-li vektor $\vec{F}$ při změně parametru konstantní velikost a proměnný směr, platí $\vec{F}' \perp \vec{F}$. Zderivováním $F^2 = \vec{F} \cdot \vec{F} =$ konst totiž dostaneme $2\vec{F}' \cdot \vec{F} = 0$.

2. Gradient skalárního pole

Směrovou derivaci daného skalárního pole $f(x, y, z)$ (M.4) můžeme vyjádřit jako skalární součin vektoru

$$\text{grad } f \equiv \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \tag{M.7}$$

nazývaného *gradientem skalárního pole* $f(x, y, z)$ a jednotkového vektoru $\vec{t}$ v daném směru. Přitom jsme zavedli diferenciální operátor

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

obr. M 2.

obr. M 3.

nazývaný ”operátor nabla”.[1] Můžeme jej považovat za formální vektor, který násoben (zprava) skalárním polem f vyjadřuje gradient tohoto pole. Určíme geometrický význam gradientu skalárního pole.

Množina bodů s konstantní hodnotou veličiny f, která je určena rovnicí $f(x, y, z) =$ konst, se nazývá *ekvipotenciální plochou* daného pole. Jedna z těchto ploch bude procházet i bodem A_0. V tomto bodě lze pak vztyčit normálu k ekvipotenciální ploše a stanovit jednotkový normálový vektor $\vec{n}$. Skalární pole nám tak v každém bodě definuje určitý význačný směr. Je snadné se přesvědčit (viz obr. M 2.), že směr normály k ekvipotenciální ploše je zároveň směrem největší změny (největšího zhuštění) ekvipotenciálních ploch. V normálovém směru protne totiž jednotkový vektor největší množství těchto ploch. V dvojrozměrném případě zemského povrchu můžeme za skalární pole považovat například pole výšek, ekvipotenciálním plochám pak odpovídají vrstevnice a normála k nim udává směr maximálního stoupání.

Zvolme na okamžik souřadnou osu z' ve směru normály $\vec{n}$ a druhé dvě osy x', y' k ní kolmé (obr. M 3.). Současně mějme libovolný směr daný jednotkovým vektorem $\vec{t'} \equiv (\cos\alpha',\ \cos\beta',\ \cos\gamma')$. Derivace v tomto směru bude analogicky (M.4)

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x'}\cos\alpha' + \frac{\partial f}{\partial y'}\cos\beta' + \frac{\partial f}{\partial z'}\cos\gamma'. \tag{M.8}$$

[1]Exotický název nabla je odvozen od názvu fénického hudebního nástroje příbuzného loutně, jemuž se tvarem podobá.

Osy x' a y' jsou však tečnami ke křivkám, které leží v ekvipotenciální ploše, a proto $\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$. Vztah (M.8) se tak redukuje na

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial z'} \cos \gamma'.$$

Maximální hodnotu nabývá tedy derivace ve směru z', kdy $\cos \gamma' = 1$. Derivace v daném obecném směru je projekcí derivace ve směru normály k ekvipotenciální ploše (brané jako vektor) do tohoto směru. Odtud zejména plyne že parciální derivace $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ jsou souřadnicemi vektoru o velikosti této maximální směrové derivace.

V souladu s výrazem (M.7) můžeme tedy zavést tuto definici: *Gradient skalárního pole f v daném bodě je vektor o velikosti derivace ve směru normály k ekvipotenciální ploše a má směr této normály*:

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{d\, f}{ds} \right)_{\vec{n}} \vec{n}_0. \tag{M.9}$$

Je zřejmé, že vektor gradientu míří vždy směrem vzrůstu funkce f.

Operace gradientu přiřazuje skalárnímu poli f jednoznačně vektorové pole $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \nabla f.$$

Říkáme, že f je skalárním potenciálem pole $\vec{F}$. Zpětné přiřazení již jednoznačné není; pole f a $f + c$, kde c je konstantní skalární pole, mají týž gradient. Gradient je možno vytvořit ke každému skalárnímu poli (pokud příslušné parciální derivace existují). Naproti tomu ne každé vektorové pole je možno vyjádřit jako gradient pole skalárního. Ta, u nichž to možné je, nazýváme pole *potenciální*.

Pro počítání s gradienty platí tato zřejmá pravidla:

$$\nabla c = 0, \quad \nabla (cf) = c\, \nabla f, \quad \nabla (f_1 + f_2) = \nabla f_1 + \nabla f_2, \quad \nabla (f_1\, f_2) = f_1\, \nabla f_2 + f_2\, \nabla f_1. \tag{M.10}$$

3. Divergence vektorového pole

Mějme vektorové pole $\vec{F}(x, y, z)$. Definujeme *tok pole* $\vec{F}$ plochou S jako plošný integrál

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}\,.$$

Zde dS je diferenciální element plochy, jemuž jsme přiřadili směr vektoru normály. Tuto normálu je ovšem třeba orientovat; můžeme to udělat například tak, že stanovíme směr pohybu po obvodu plošky dS a použijeme pravidla pravotočivého šroubu (obr. M 4). Jde-li o tok *uzavřenou plochou* S, která ohraničuje objem V, budeme považovat za kladný směr normály ten, který směřuje ven z objemu V, a tok budeme označovat

$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}\,.$$

Rozdělíme nyní objem V přepážkami na N menších objemů V_i. Určíme toky pole Φ_i plochami S_i ohraničujícími tyto dílčí objemy a budeme je sčítat. Ukazuje se, že toky dílčími přepážkami se v tomto součtu vzájemně vyruší. Při sčítání toků hraniční plochou dvou sousedních objemů objeví se totiž vždy dvakrát, jednou s kladným a jednou se záporným znaménkem (viz obr. M 5.). Sumární tok bude proto roven právě původnímu toku plochou S:

obr. M 4. obr. M 5.

$$\sum_{i=1}^{N} \Phi_i \;=\; \sum_{i=1}^{N} \oint_{S_i} \vec{F_i} \cdot d\vec{S_i} \;=\; \Phi \;. \tag{M.11}$$

Zmenšujeme-li objemy V_i, zůstává jejich součet V konstantní; totéž platí pro toky Φ_i. Nabízí se tedy možnost vytvořit podíl těchto dvou neomezeně se zmenšujících veličin a zkoumat vlastnosti jeho limity.

Zvolíme v prostoru bod A o souřadnicích x, y, z a obklopíme jej malým objemem ΔV. Tok plochou ohraničující tento objem označíme $\Delta\Phi$. Budeme nyní dělit tento objem na stále menší části libovolným způsobem a vyčleníme posloupnost těchto částí ΔV_i, které stále obsahují bod A .Označíme

$$\operatorname{div} \vec{F} \;=\; \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\Delta\Phi_i}{\Delta V_i}. \tag{M.12}$$

Pokud limita na pravé straně (M.12) existuje a nezávisí na způsobu dělení objemu ΔV, představuje nám tok pole $\vec{F}$ v bodě A vztažený k jednotce objemu a nazýváme jej *divergencí pole* $\vec{F}$ v bodě A .

Vraťme se nyní k objemu V ohraničenému plochou S a upravme vztah (M.11) takto:

$$\Phi \;=\; \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \;=\; \sum_{i=1}^{N} \Delta\Phi_i \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta\Phi_i}{\Delta V_i} \Delta V_i \;. \tag{M.13}$$

Pokračujme přitom v neomezeném dělení dílčích objemů ΔV_i dalšími přepážkami a sledujme posloupnost neomezeně se zmenšujících objemů, které se stahují kolem bodu A. V limitě přejde tedy podíl $\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta V_i}$ v divergenci div$\vec{F}$ a sumu na pravé straně (M.13) můžeme nahradit integrálem přes objem V:

$$\oint_S \vec{F} \;\cdot\; d\vec{S} \;=\; \int_V \operatorname{div}\vec{F}\, dV \;. \tag{M.14}$$

Tok vektorového pole uzavřenou plochou je roven celkové divergenci v objemu uzavřeném touto plochou. Vztah (M.14) umožňuje přejít od objemového integrálu k plošnému integrálu přes ohraničující plochu a nazývá se *Gaussovou větou.*

Obecná definice divergence (M.12) má tu přednost, že nezávisí na druhu použitých souřadnic a dává pojmu divergence názorný geometrický smysl. Vyjádříme nyní divergenci v kartézských souřadnicích podle obr. M 6.

Uvažujme elementární objem ve tvaru kvádru o hranách Δx, Δy, Δz rovnoběžných s příslušnými kartézskými osami. Nechť jeho levý dolní zadní vrchol má souřadnice x, y, z. Tok dvojicí rovnoběžných podstav tohoto kvádru (například horní a dolní) bude

$$\Delta\Phi_{12} \;=\; \Delta\Phi_2 \;+\; \Delta\Phi_1 \;=\; F_z(x, y, z + \Delta z)\Delta x \Delta y \;-\; F_z(x, y, z)\Delta x \Delta y \;=\; \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \;.$$

obr. M 6.

Celkový tok povrchem kvádru

$$\Delta\Phi \;=\; \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \;+\; \frac{\partial F_y}{\partial y} \;+\; \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) \Delta V, \qquad \Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z; .$$

Podle definice divergence máme tedy

$$\operatorname{div} \vec{F} \;=\; \frac{\partial F_x}{\partial x} \;+\; \frac{\partial F_y}{\partial y} \;+\; \frac{\partial F_z}{\partial z} \;=\; \nabla \cdot \vec{F} \;. \tag{M.15}$$

Operátor nabla umožňuje vyjádřit divergenci vektorového pole kompaktním způsobem jako skalární součin tohoto operátoru a vektoru pole; pořadí obou těchto symbolů nelze ovšem zaměnit. Volba elementárního objemu ve tvaru kvádru neomezuje obecnost, neboť objem libovolného tvaru můžeme z takových malých kvádrů sestavit. Toky přepážkami mezi nimi se přitom vyruší.

Operace divergence přiřazuje vektorovému poli $\vec{F}$ jednoznačně skalární pole f:

$$f \;=\; \operatorname{div} \vec{F} \;.$$

Zpětné přiřazení již jednoznačné není: pole $\vec{F}$ a $\vec{F} \;+\; \vec{F}'$, kde $\operatorname{div} \vec{F}' = 0$, mají touž divergenci.

Pro počítání s divergencemi platí tato zřejmá pravidla:

$$\nabla \cdot \vec{C} = 0, \quad \nabla \cdot (c\vec{F}) = c \nabla \cdot \vec{F}, \quad \nabla \cdot (\vec{F}_1 \;+\; \vec{F}_2) = \nabla \cdot \vec{F}_1 \;+\; \nabla \cdot \vec{F}_2, \quad \nabla \cdot (f\vec{F}) = f \nabla \cdot \vec{F} \;+\; \vec{F} \cdot \nabla f \;. \tag{M.16}$$

Uvažme zvláštní případ, kdy objem ΔV těsně přimyká z obou stran k nějaké ploše (například ploše nespojitosti pole) a má tvar části vrstvy o zanedbatelné tloušťce
(obr. M 7.).

Tok $\Delta\Phi$ pak bude roven součtu toků normálových složek pole oběma podstavami tohoto objemu:

$$\Delta\Phi \;=\; (F_{1n} \;-\; F_{2n})\, \Delta S \;.$$

Směr normály k ploše jsme zvolili za kladný, míří-li z oblasti 2 do oblasti 1. Provedeme-li úvahu o limitním zmenšování plochy ΔS v okolí bodu A na ploše, můžeme definovat takzvanou *plošnou divergenci* vztahem

obr. M 7.

$$\mathrm{Div}\vec{F} \;=\; F_{1n} \;-\; F_{2n} \;=\; \vec{n} \;\cdot\; (\vec{F_1} \;-\; \vec{F_2})\;. \tag{M.17}$$

4. Rotace vektorového pole

Mějme vektorové pole $\vec{F}(x, y, z)$. Definujeme *cirkulaci pole* podél uzavřené křivky l jako křivkový integrál

$$\Gamma \;=\; \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l}\;.$$

Zde $d\vec{l}$ je diferenciální vektorový element křivky ve směru tečny. Jeho orientace je dána dohodou o smyslu obcházení křivky, například proti směru hodinových ručiček. Uzavřená křivka l tvoří hranici plochy S; tato plocha není ovšem určena jednoznačně (na rozdíl od objemu V uvnitř uzavřené plochy). Na ploše obehnané křivkou l můžeme opět vést dělicí křivky, vytvářet soustavu dílčích ploch, počítat cirkulace podél jejich hranic a sčítat je. Ukazuje se, že příspěvky k cirkulacím podél společných hranic dvou sousedních ploch se vzájemně vyruší. Zachováme-li totiž jednotný smysl obcházení křivek, budeme takovou společnou hranici obcházet vždy v opačném směru (viz obr. M 8.).

Sumární cirkulace bude tedy rovna právě původní cirkulaci podél křivky l:

$$\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \;=\; \sum_{i=1}^{N} \oint_{l_i} \vec{F_i} \cdot d\vec{l_i} \;=\; \Gamma\;. \tag{M.18}$$

Zvolíme v prostoru bod A o souřadnicích x, y, z, vedeme tímto bodem rovinu libovolné orientace a vymezíme v této rovině uzavřenou křivku malých rozměrů obklopující bod A. Plochu omezenou touto křivkou označíme ΔS, cirkulaci podél této křivky $\Delta\Gamma$. Budeme nyní dělit tuto plošku na menší části a vyčleníme posloupnost plošek obsahujících bod A. Budeme uvažovat limitu

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\Delta\Gamma_i}{\Delta S_i}\;,$$

obr. M 8.

pokud taková limita existuje a nezávisí na způsobu dělení plošky ΔS. Tato limita bude však přesto závislá na volbě orientace roviny procházející bodem A neboli na směru normály k elementární plošce, na jejíž hranici cirkulaci určujeme. Můžeme tedy (podobně jako u definice gradientu) považovat tuto limitu za projekci určitého vektoru do směru normály k plošce:

$$(\mathrm{rot}\ \vec{F})\ \cdot\ \vec{n}\ =\ \lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\Delta \Gamma_i}{\Delta S_i}\ . \tag{M.19}$$

Projekce vektoru rot $\vec{F}$ do daného směru představuje tedy poměr cirkulace pole po obvodu malé kolmé plošky k velikosti této plošky. Vektor rot $\vec{F}$ nazýváme *rotací pole* $\vec{F}$ v bodě A[2].

Vraťme se nyní k obecné uzavřené křivce l obepínající plochu S. Upravíme vztah (M.18) na

$$\Gamma\ =\ \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l}\ =\ \sum_{i=1}^{N} \Delta \Gamma_i\ =\ \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta \Gamma_i}{\Delta S_i} \Delta S_i\ . \tag{M.20}$$

Pro každý bod A na ploše S můžeme vytvořit posloupnost neomezeně se zmenšujících dílčích plošek tento bod stále obsahujících. V limitě přejde tedy podíl $\frac{\Delta \Gamma_i}{\Delta S_i}$ v rot $\vec{F}\ .\ \vec{n}$ a sumu na pravé straně (M.20) můžeme nahradit integrálem přes celou plochu S:

$$\oint_l \vec{F}\ \cdot\ d\vec{l}\ =\ \int_S \mathrm{rot}\ \vec{F}\ \cdot\ d\vec{S}\ . \tag{M.21}$$

Cirkulace vektorového pole podél uzavřené křivky je rovna celkovému toku rotace pole libovolnou plochou, pro níž křivka l představuje hranici. Vztah (M.21) umožňuje přejít od plošného integrálu ke křivkovému integrálu podél hranice a nazývá se *Stokesovou větou.*

Obecná definice rotace (M.19) má tu přednost, že nezávisí na druhu použitých souřadnic a dává pojmu rotace názorný geometrický smysl. Vyjádříme nyní rotaci v kartézských souřadnicích podle obr. M 9.

Uvažujme elementární plošku ve tvaru obdélníka o stranách $\Delta x,\ \ \Delta y$ rovnoběžných s příslušnými kartézskými osami. Nechť jeho levý zadní vrchol má souřadnice x, y, z. Příspěvek k cirkulaci podél dvojice rovnoběžných stran (například levé a pravé) bude

$$\Delta \Gamma_{12}\ =\ \Delta \Gamma_1\ +\ \Delta \Gamma_2\ =\ F_x(x,y,z)\ \Delta x\ -\ F_x(x, y+\Delta y, z)\ \Delta x\ =\ -\ \frac{\partial F_x}{\partial y}\ \Delta x \Delta y\ .$$

Celková cirkulace podél obvodu obdélníka

$$\Delta \Gamma\ =\ \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\ -\ \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta S, \qquad \Delta S\ =\ \Delta x \Delta y,$$

[2]V anglosaské literatuře se užívá pro rotaci názvu a označení curl $\vec{F}$. Poznamenejme ještě, že rotaci lze zavést též stejným limitním pochodem jako u divergence, a to vztahem

$$\mathrm{rot}\ \vec{F}\ =\ \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\Delta \vec{G}_i}{\Delta V_i}, \qquad \mathrm{kde}\ \ \vec{G}\ =\ \oint_S d\vec{S} \times \vec{F}\ .$$

obr. M 9.

a tedy

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} \;=\; \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} \;-\; \frac{\partial F_y}{\partial z},\, \frac{\partial F_x}{\partial z} \;-\; \frac{\partial F_z}{\partial x},\, \frac{\partial F_y}{\partial x} \;-\; \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \;=\; \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \;=\; \nabla \;\times\; \vec{F}\;. \qquad \text{(M.22)}$$

Operátor nabla umožňuje vyjádřit rotaci vektorového pole kompaktním způsobem jako vektorový součin tohoto operátoru a vektoru pole; pořadí obou těchto symbolů nelze ovšem měnit. Volba elementární plošky ve tvaru obdélníka opět neomezuje obecnost výsledku.

Operace rotace přiřazuje vektorovému poli $\vec{F}$ jednoznačně jiné vektorové pole $\vec{G}$:

$$\vec{G} \;=\; \mathrm{rot}\,\vec{F}\;.$$

Zpětné přiřazení již není jednoznačné; pole $\vec{F}$ a $\vec{F} \;+\; \vec{F}'$, kde rot $\vec{F}' \;= 0$, mají touž rotaci.

Pro počítání s rotacemi platí tato zřejmá pravidla:

$$\nabla\times\vec{C} = \vec{0},\; \nabla\times(c\vec{F}) = c\nabla\times\vec{F},\; \nabla\times(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \nabla\times\vec{F}_1 + \nabla\times\vec{F}_2,\; \nabla\times(f\vec{F}) = f\nabla\times\vec{F} + \nabla f\times\vec{F}\;. \quad \text{(M.23)}$$

Uvažme zvláštní případ, kdy elementární křivka l těsně přimyká z obou stran k nějaké ploše (například ploše nespojitosti pole), takže její úseky ve směru kolmém k této ploše jsou zanedbatelně krátké (obr. M 10.).

Cirkulace bude pak rovna součtu integrálů podél obou tečných větví:

$$\Delta\Gamma \;=\; (F_{1t} \;-\; F_{2t})\,\Delta l\;.$$

Provedeme-li úvahu o limitním zkracování větví Δl v okolí bodu A na ploše, můžeme definovat takzvanou *plošnou rotaci* vztahem

$$\mathrm{Rot}\,\vec{F} \;=\; \vec{n}\times(\vec{F}_1 \;-\; \vec{F}_2), \qquad |\mathrm{Rot}\,\vec{F}| \;=\; F_{1t} \;-\; F_{2t}\;. \qquad \text{(M.24)}$$

obr. M 10.

5. Operátory $(\vec{a}\nabla)$ a Δ

Položme si otázku, jak vyjádřit divergenci a rotaci vektorového součinu nebo gradient skalárního součinu dvou vektorových polí. K tomu účelu zavedeme další operátor $(\vec{a}\nabla)$ předpisem

$$(\vec{a}\nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} \;+\; a_y \frac{\partial}{\partial y} \;+\; a_z \frac{\partial}{\partial z}\;. \tag{M.25}$$

Tento *operátor "a-grad"* může působit jak na skalární, tak na vektorová pole:

$$(\vec{a}\nabla)f = a_x \frac{\partial f}{\partial x} \;+\; a_y \frac{\partial f}{\partial y} \;+\; a_z \frac{\partial f}{\partial z} = \vec{a}\cdot\nabla f\;, \tag{M.26}$$

$$(\vec{a}\nabla)\vec{F} = a_x \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \;+\; a_y \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \;+\; a_z \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = \left(a_x \frac{\partial F_x}{\partial x} \;+\; a_y \frac{\partial F_x}{\partial y} \;+\; a_z \frac{\partial F_x}{\partial z}, \ldots\right)\;. \tag{M.27}$$

Bude-li $\vec{s}$ jednotkový vektor, potom výraz $(\vec{s}\nabla)f$ je projekcí gradientu skalárního pole f do směru $\vec{s}$, a je tedy totožný s derivací pole v tomto směru. Podobně bychom mohli interpretovat výraz $(\vec{s}\nabla)\vec{F}$ jako derivaci vektorového pole ve směru $\vec{s}$.

Nyní můžeme vyjádřit divergenci a rotaci vektorového součinu a gradient skalárního součinu dvou vektorových polí:

$$\mathrm{div}\,(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) \equiv \nabla\cdot(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = \vec{F}_2\cdot(\nabla\times\vec{F}_1) \;-\; \vec{F}_1\cdot(\nabla\times\vec{F}_2)\;, \tag{M.28}$$

$$\mathrm{rot}\,(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) \equiv \nabla\times(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = (\vec{F}_2\nabla)\vec{F}_1 \;-\; (\vec{F}_1\nabla)\vec{F}_2 \;+\; \vec{F}_1\nabla\cdot\vec{F}_2 \;-\; \vec{F}_2\nabla\cdot\vec{F}_1\;, \tag{M.29}$$

$$\mathrm{grad}(\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2) \equiv \nabla(\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2) = (\vec{F}_1\nabla)\vec{F}_2 \;+\; (\vec{F}_2\nabla)\vec{F}_1 \;+\; \vec{F}_1\times(\nabla\times\vec{F}_2) \;+\; \vec{F}_2\times(\nabla\times\vec{F}_1)\;. \tag{M.30}$$

O platnosti těchto poněkud komplikovanějších, avšak velmi užitečných vzorců se můžeme přesvědčit alespoň rozepsáním příslušných výrazů v kartézských souřadnicích.

Uvědomíme-li si, že operátory div a rot mohou působit pouze na vektorová pole a operátor grad pouze na skalární pole, můžeme z těchto operátorů sestavit pět kombinací operátorů druhého řádu: rot grad, div

rot, div grad, grad div a rot rot. Vyjádřením v kartézských souřadnicích se snadno přesvědčíme, že vždy platí rot grad $f = 0$ a
div rot $\vec{F} = 0$. Hlubší význam těchto vztahů bude objasněn v následujícím odstavci.

Operátor div grad $\equiv \Delta$ nazýváme *Laplaceovým operátorem* a formálně odpovídá čtverci operátoru nabla:

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \; .$$

V kartézských souřadnicích má zřejmě tvar

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \; + \; \frac{\partial^2}{\partial y^2} \; + \; \frac{\partial^2}{\partial z^2} \; . \tag{M.31}$$

Laplaceův operátor podobně jako operátor $(\vec{a}\nabla)$ může působit jak na skalární tak na vektorová pole.

Pro dvojnásobnou operaci rotace platí vztah

$$\text{rot rot}\vec{F} = \text{grad div}\vec{F} \; - \; \Delta\vec{F} \; ; \tag{M.32}$$

neboli

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) \; - \; \Delta\vec{F} \; ,$$

který je obdobou vektorové identity "bac - cab".

6. Vektorová pole potenciální a solenoidální

Vektorové pole, které je možno vyjádřit jako gradient nějakého skalárního pole

$$\vec{F} = \text{grad}f = \nabla f \; , \tag{M.33}$$

se nazývá *potenciálním* (bezvírovým, zdrojovým). Uvažme křivkový integrál $\int_A^B \vec{F}.d\vec{l}$ po nějaké křivce mezi body A a B. Je-li $\vec{F}$ silové pole, pak tento integrál představuje práci vykonanou silou po této dráze. Dosadíme-li za $\vec{F}$ (M.33),můžeme skalární součin v integrálu upravit na

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = \text{grad}f \cdot d\vec{l} = \frac{\partial f}{\partial x}dx \; + \; \frac{\partial f}{\partial y}dy \; + \; \frac{\partial f}{\partial z}dz = df \; .$$

Tento výraz představuje totální diferenciál funkce $f(x, y, z)$ a křivkový integrál je možno vypočítat jako rozdíl hodnot funkce f v koncových bodech:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B df = f(B) - f(A) \; . \tag{M.34}$$

Odtud zejména plyne, že výsledek nezávisí na volbě dráhy mezi body A a B (viz obr. M 11.).

Protože při zpětné integraci od B do A se mění pouze znaménko integrálu, zjišťujeme,že cirkulace potenciálního pole podél uzavřené křivky je vždy rovna nule:

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_l \text{grad}f \cdot d\vec{l} = 0 \; . \tag{M.35}$$

Ze Stokesovy věty (M.21) plyne

$$\oint_l \text{grad}f \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot grad}f) \cdot d\vec{S} = 0 \; .$$

Vzhledem k tomu, že volba plochy S o hranici l je zcela libovolná, musí v celém prostoru platit

obr. M 11.

obr. M 12.

$$\mathrm{rot}\ \vec{F} = \mathrm{rot\ grad} f = 0\ . \tag{M.36}$$

To je nutná a postačující podmínka k tomu, aby pole $\vec{F}$ bylo potenciální. Z podmínky rot $\vec{F} = 0$ plyne i fyzikální představa o potenciálním poli. Siločáry takového pole nesmějí vytvářet víry, uzavírat se samy do sebe.

Vektorové pole, které je možno vyjádřit jako rotaci nějakého jiného vektorového pole

$$\vec{F} = \mathrm{rot}\ \vec{G} = \nabla \times \vec{G}\ , \tag{M.37}$$

se nazývá *solenoidálním* (bezzdrojovým, vírovým). Vytvoříme uzavřenou plochu S tak, že budeme uvažovat dvě různé plochy S_1, S_2 o společné hranici l (obr. M 12.).

Podle Stokesovy věty tok solenoidálního pole uzavřenou plochou $S = S_1 + S_2$ bude nulový:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_S \mathrm{rot} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \mathrm{rot} \vec{G} \cdot d\vec{S}_1\ - \int_{S_2} \mathrm{rot} \vec{G} \cdot d\vec{S}_2 = \oint_l \vec{G} \cdot d\vec{l}\ - \oint_l \vec{G} \cdot d\vec{l} = 0\ . \tag{M.38}$$

Použijeme-li Gaussovu větu, dostaneme

$$\oint_S \mathrm{rot}\ \vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div\ rot}\ \vec{G} dV = 0\ . \tag{M.39}$$

obr. M 13.

Vzhledem k tomu, že plochu S a objem V je možno volit zcela libovolně, musí v celém prostoru platit

$$\text{div } \vec{F} = \text{div rot } \vec{G} = 0 \tag{M.40}$$

To je nutná a postačující podmínka k tomu, aby pole F bylo solenoidální. Z podmínky div $\vec{F} = 0$ plyne i fyzikální představa o solenoidálním poli. Siločáry takového pole nesmějí mít nikde v prostoru zdroje (v kladném nebo záporném smyslu).

Obecné vektorové pole samozřejmě nemusí být ani potenciální ani solenoidální a může mít nenulovou divergenci i rotaci. Lze však dokázat, že každé vektorové pole, které dostatečně rychle klesá v nekonečnu, může být jednoznačným způsobem rozloženo na součet potenciálního a solenoidálního pole. Na obr. M 13. je orientačně znázorněn charakter průběhu siločar potenciálního pole s kladnou a zápornou divergencí a pole solenoidálního.

7. Některé integrální věty vektorové analýzy

Upravíme Gaussovu větu (M.14) tak, že položíme $\vec{F} = f_1 \text{grad} f_2$ a použijeme vztahů (M.16). Tak dostaneme *první Greenovu větu*:

$$\oint_S f_1 \text{grad} f_2 \cdot d\vec{S} = \int_V (f_1 \Delta f_2 \; + \; \text{grad} f_1 \text{grad} f_2) dV \; . \tag{M.41}$$

Z ní snadnými úpravami vyplyne *druhá Greenova věta*

$$\oint_S (f_1 \text{grad} f_2 \; - \; f_2 \text{grad} f_1) \cdot d\vec{S} = \int_V (f_1 \Delta f_2 \; - \; f_2 \Delta f_1) dV \tag{M.42}$$

a *třetí Greenova věta*

$$\oint_S \text{grad} f \cdot d\vec{S} = \int_V \Delta f dV \; . \tag{M.43}$$

Důležité jsou zvláštní případy *zobecněné Gaussovy věty*, kterou bychom mohli formulovat takto: *objemový integrál, v němž operátor nabla působí nějakým způsobem na následující vektorová a skalární pole, se rovná příslušnému plošnému integrálu, v němž stejným způsobem vystupuje vektor elementu plochy* $d\vec{S}$. Tak máme

$$\int_V \nabla f dV = \oint_S f d\vec{S} \;, \tag{M.44}$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \oint \vec{F} \cdot d\vec{S} \;, \tag{M.45}$$

$$\int_V \nabla \times \vec{F} dV = \oint_S d\vec{S} \times \vec{F} \;. \tag{M.46}$$

Druhá z těchto vět je již známá věta Gaussova. Třetí z nich dokážeme standartním postupem. Vynásobíme integrál na levé straně skalárně konstantním vektorem $\vec{C}$, použijeme výraz pro divergenci vektorového součinu, Gaussovu větu a nakonec opět vektor $\vec{C}$ vykrátíme:

$$\int_V \vec{C} \cdot \mathrm{rot}\vec{F} dV = \int_V \mathrm{div}(\vec{F} \times \vec{C}) dV = \oint_S (\vec{F} \times \vec{C}).d\vec{S} = \oint_S \vec{C} \cdot d\vec{S} \times \vec{F} \;.$$

Analogicky můžeme dokázat i první větu (M.44).

Nakonec uvedeme ještě větu o křivkovém integrálu skalárního pole:

$$\oint_l f d\vec{l} = \int_S d\vec{S} \times \mathrm{grad} f \;. \tag{M.47}$$

Také důkaz této věty lze provést vynásobením pomocným konstantním vektorem $\vec{C}$ a použitím Stokesovy věty.

Příklady

M.1 Sestavte si tabulku hlavních vzorců a vět vektorové analýzy.

M.2 Určete divergenci a rotaci následujících vektorových polí: $\vec{F} = (x+y, -x+y, -2z)$; $\vec{F} = (2y, 2x + 3z, 3y)$; $\vec{F} = (x^2 - z^2, 2, 2xz)$. Je-li $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$, najděte skalární pole f takové, aby $\vec{F} = \mathrm{grad} f$.

$[0,\ (0,0,-2);\ \ 0,\ (0,0,0),\ 2xy - 3zy;\ \ 4x,\ (0,-4z,0)]$

M.3 Určete gradient polí ($\vec{r}$ je radiusvektor, $\vec{c} = \mathrm{konst}$): r; r^2; r^3; $\frac{1}{r}$; $\frac{1}{r^2}$; $\frac{1}{r^3}$; $\vec{c} \cdot \vec{r}$; $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r}$; $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^2}$.

$[\frac{\vec{r}}{r};\ 2\vec{r};\ 3r\vec{r};\ -\frac{\vec{r}}{r^3};\ -\frac{2\vec{r}}{r^4};\ -\frac{3\vec{r}}{r^5};\ \vec{c};\ \frac{r^2\vec{c}\ -(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^3};\ \frac{r^2\vec{c} - 2(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^4}\ ]$

M.4 Určete divergenci a rotaci polí: $\vec{r}$; $\frac{\vec{r}}{r}$; $\frac{\vec{r}}{r^2}$; $\frac{\vec{r}}{r^3}$; $\frac{\vec{c}}{r}$.

$[3,\ \vec{0};\ \frac{2}{r},\ \vec{0};\ \frac{1}{r^2},\ \vec{0};\ 0,\ \vec{0};\ -\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3},\ \frac{\vec{c}\times\vec{r}}{r^3}]$

M.5 Dokažte věty (M.44) a (M.47).