Z Á K L A D Y   T E O R I E   R E L A T I V

1. Speciální teorie relativity

V poslední čtvrtině devatenáctého století došlo ve fyzice v určitém smyslu ke schizofrenní situaci. Byl dovršen vývoj klasické Newtonovy mechaniky, která našla matematický výraz ve velmi elegantní podobě Lagrangeova a Hamiltonova formalismu vycházejících z obecných variačních principů. Současně se podařilo Maxwellovi matematicky (a možná ještě elegantněji) vyjádřit souhrn všech experimentálních poznatků o elektřině a magnetismu nahromaděných za uplynulá tři století, a to v podobě podivuhodných *Maxwellových rovnic.* Ukázalo se však, že Newtonova mechanika a Maxwellova teorie elektromagnetismu jsou navzájem v hlubokém vnitřním rozporu.

Newtonova mechanika je založena na představě o *absolutním prostoru a čase.* Newton ve svých Principiích říká: "Absolutní, skutečný a matematický čas plyne sám od sebe a díky své povaze rovnoměrně, bez vztahu k nějakému vnějšímu předmětu. Nazývá se též trvání...Absolutní prostor zůstává vzhledem ke své povaze a bez vztahu k vnějšímu předmětu stále stejný a nehybný." Prostor představuje tedy pro fyzikální děje jakési jeviště bez kulis, čas je nezávislý parametr, kterým lze odměřovat trvání výstupů a dějství přírodního dramatu.

Pro takzvaný "zdravý lidský rozum" (dále ZLR) je možná skutečně přijatelné představovat si absolutní prostor a čas. Problém je však v tom, že v absolutním prostoru se není čeho zachytit. Fyzikální děje můžeme popisovat pouze vzhledem k nějaké vztažné soustavě tvořené systémem souřadnic (například kartézských) a s ním spojenými hodinami (umístěnými například v počátku). Systém souřadnic musíme vázat na nějaké tuhé těleso, hodiny musí být tvořeny nějakým reálným systémem, v němž probíhá periodický fyzikální děj.

Mezi vztažnými soustavami vybíráme takovou, v níž působí pouze pravé síly a platí všechny tři Newtonovy pohybové zákony. Pod pravými silami rozumíme ty, u nichž lze vždy ukázat těleso, které je zdrojem této síly. Jde tedy v podstatě o vzájemné působení, *interakci* těles či částic — jedno těleso působí na druhé silou a druhé na první silou opačnou. Nepůsobí-li na těleso pravé síly, bude vůči vztažné soustavě v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Takovou vztažnou soustavu nazýváme *inerciální* (platí v ní zákon setrvačnosti, inercie).

Je samozřejmě otázkou, zda inerciální soustava vůbec existuje; tuto otázku lze však rozhodnout pouze experimentálně. Odpověď proto můžeme znát jen s experimentálně dosažitelnou přesností. Víme, že vztažná soustava spojená se Sluncem a stálicemi je inerciální ve větší míře, než vztažná soustava spojená s povrchem Země. V ještě větší míře bude inerciální soustava spojená se vzdálenými galaxiemi.

Soustavu spojenou se Zemí můžeme považovat za dostatečně inerciální zejména při studiu dějů krátkodobých ve srovnání s periodou zemské rotace. Kdyby se Země otáčela podstatně rychleji, měli bychom s mechanickými pohyby na jejím povrchu zcela jiné zkušenosti. Někdy se setkáváme s názorem, že vášnivé spory mezi zastánci geocentrické a heliocentrické soustavy, přívrženci Ptolemaiovými a Koperníkovými, byly vlastně zbytečné — s hlediska vztažné soustavy spojené se Sluncem obíhá Země kolem Slunce a s hlediska vztažné soustavy spojené se Zemí obíhá Slunce kolem Země. Přesný popis pohybu Slunce a planet s hlediska geocentrické soustavy podal Tycho Brahe; v jeho modelu obíhají planety kolem Slunce a Slunce pak s nimi kolem Země. Tento popis skutečně nelze pomocí astronomických pozorování od modelu Koperníkova odlišit. Přesto však nejsou obě vztažné soustavy zcela rovnocenné. Heliocentrická soustava je inerciálnější a popis pohybu planet v ní jednodušší. Souvisí to s tím, že jde prakticky o soustavu hmotného středu sluneční soustavy.

Jakmile máme k dispozici jednu inerciální soustavu, můžeme získat neomezený počet dalších. Všechny vztažné soustavy, které budou vůči této inerciální vztažné soustavě v rovnoměrném přímočarém pohybu budou rovněž inerciální. Podle *Galileiho principu relativity* probíhají *mechanické* děje ve všech inerciálních vztažných soustavách stejně a pomocí mechanických experimentů nelze tyto soustavy navzájem odlišit. Koresponduje to se známou zkušeností, že v dopravním prostředku, který se pohybuje rovnoměrně a přímočaře bez otřesů nemůžeme zjistit, zda stojí nebo se pohybuje. Galilei to plasticky popisuje ve svém "Dialogu" na příkladu lodní kabiny bez oken, v případě, že se plachetní loď pohybuje slabým větrem rovnoměrně na klidné hladině.

Při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé se v Newtonově mechanice transformují souřadnice podle Galileiho transformací a čas, který představuje nezávisle se měnící parametr, je ve všech soustavách týž. Galileiho transformace jsou v souladu s obecnou zkušeností o skládání rychlostí. Vystřelí-li gangster z jedoucího auta z pušky ve směru jízdy, bude rychlost kulky vzhledem k povrchu zemskému dána součtem rychlostí auta a rychlosti kulky vzhledem k autu.

Newtonovy pohybové rovnice popisující mechanické pohyby jsou vůči Galileiho transformacím invariantní, tj. nemění svůj tvar. Plyne to z toho, že tyto transformace jsou lineární a zrychlení jako druhé derivace souřadnic podle času jsou stejná. Pravé síly závisejí pouze na vzdálenostech, případně na vzájemných rychlostech těles a ty se při přechodu od jedné soustavy k druhé rovněž nemění. Pro dvě inerciální soustavy S a S' tedy platí

$$m'\vec{a}' = \vec{F}' , \qquad m\vec{a} = \vec{F} .$$

Proto také mechanické pohyby probíhají ve všech inerciálních soustavách stejně.

Naproti tomu Maxwellovy rovnice popisující elektromagnetické děje (včetně šíření světla) se při Galileiho transformacích mění. Je však možno najít jiné transformace, vůči nimž zůstávají Maxwellovy rovnice invariantní - jsou to takzvané transformace Lorentzovy. Zdálo se tedy, že jsou dvě fyziky, jedna, která je galileiovsky invariantní a druhá lorentzovsky. Obě jsou přitom potvrzovány experimentálně. Na druhé straně Lorentzovy transformace mají tu vlastnost, že pro pohyby rychlostmi mnohem menšími než je rychlost světla ve vakuu limitně přecházejí v transformace Galileiho.

Mohli bychom tedy předpokládat, že Lorentzovy transformace jsou obecnější a projeví se právě pro pohyby rychlostmi světla nebo blízkými. U běžných mechanických pohybů malými rychlostmi se pak uplatní transformace Galileiho. Je třeba vidět, že nejrychlejší mechanický pohyb, který mohli fyzikové zkoumat, byl pohyb Země na její dráze kolem Slunce probíhající rychlostí $v = 29,7$ km.s^{-1}, tedy zhruba desetitisícinou rychlosti světla.

Z Lorentzových transformací ovšem vyplývají jiná pravidla pro skládání rychlostí, než podle transformací Galileiho. Zejména z nich plyne, že rychlost světla se *nesčítá* s rychlostí zdroje nebo pozorovatele a zůstává stejná ve všech inerciálních vztažných soustavách, v rozporu se ZLR. Vystřelí-li gangster z jedoucího auta z *laserové* pušky bude rychlost šíření laserového paprsku vzhledem k autu i vzhledem k zemskému povrchu stejná.

Podle představ 19. století světlo představovalo vlnění světelného éteru (podobně jako zvuk vlnění vzduchu) a při pohybu zdroje či pozorovatele vůči tomuto éteru by se měla jejich rychlost s rychlostí světla sčítat, podobně jako na hladině vody můžeme vlny předbíhat nebo se za nimi opožďovat. Rozhodnout tyto rozpory mohl pouze experiment.

Rychlost šíření světla ve vakuu byla v minulém století již známa s velkou přesností. Aristotelovská fyzika považovala rychlost světla za nekonečnou (Epikuros celkem výstižně pravil, že světlo má rychlost myšlenky). Galilei byl první, kdo se pokusil rychlost světla změřit střídavým zakrýváním světla dvou luceren umístěných na dvou protilehlých kopcích. Nemohl uspět jednak proto, že reakce obou pozorovatelů jsou příliš pomalé, jednak proto, že neměl dostatečně přesné hodiny.

První měření rychlosti světla umožnila astronomie. V roce 1675 dánský astronom Olaus Römer působící na pařížské hvězdárně pozoroval periodu zákrytů Jupiterova měsíce Io Jupiterem. Zjistil, že vzdaluje-li se Země nebo přibližuje k Jupiteru maximální rychlostí (body B a C na obr. 1.1), tato perioda se zmenšuje nebo zvětšuje podle vztahu

obr. 1.1

$$T' = T \mp \Delta T = T \mp \frac{vT'}{c},$$

kde v je rychlost Země a c rychlost světla ve vakuu.

Jev je vlastně analogický Dopplerovu jevu, kdy dochází ke změně pozorované frekvence periodického děje vlivem pohybu pozorovatele. Pozorovaná změna periody zákrytů byla malá (asi 1,5 s). Römer mohl ovšem pozorovat i další jev. Počátky zákrytů v bodech A a D zemské dráhy se opožďovaly asi o 16 minut. To odpovídá době, kterou potřebuje světlo, aby prošlo vzdálenost rovnou poloměru dráhy Země. Z těchto měření bylo možno stanovit rychlost světla asi na 214 300 km.s^{-1}; provedl to Christian Huyghens.

V roce 1725 pozoroval anglický astronom James Bradley takzvanou *aberaci stálic*. Pozorujeme-li hvězdu na obloze během roku, mění se úhel pozorování tak, že hvězda opisuje na obloze jakoby malou elipsu, která může případně přejít v kružnici či úsečku. Je to způsobeno ročním pohybem Země na její dráze kolem Slunce; stejná situace vznikne, budeme-li běhat v dešti po kružnici a budeme směrovat deštník tak, abychom nezmokli. Nechť se hvězda nalézá ve výšce θ nad obzorem a změna tohoto úhlu v důsledku pohybu Země bude $\Delta\theta$ (obr. 1.2).

Potom pro malý úhel $\Delta\theta$ máme

$$\Delta\theta \approx \frac{v \sin\theta}{c}$$

obr. 1.2 obr. 1.3

Pro hvězdu v zenitu dostáváme kroužek o úhlovém poloměru $\frac{v}{c} = 10^{-4}$ rad $= 20,5''$. Z této naměřené hodnoty bylo možno zpětně určit rychlost světla. Vedle roční aberace je možno pozorovat i denní aberaci způsobenou rotací Země (na rovníku rychlostí 0,46 km.s^{-1}) s úhlovým poloměrem $\Delta\theta = 0,3''$.

Pozemskými metodami se podařilo změřit rychlost světla až v polovině minulého století. Armand Fizeau použil v roce 1849 rotujícího ozubeného kola, což je vlastně zdokonalená metoda Galileiho luceren (obr. 1.3). Má-li kolo z zubů a rotuje s frekvencí f, projde světlo mezerou mezi zuby a po odrazu od zrcadla ve vzdálenosti l dorazí právě k sousední mezeře za dobu

$$\Delta t = \frac{1}{2fz} = \frac{2l}{c}.$$

Odtud je možno rychlost světla rovněž stanovit. Pro zajímavost, Fizeau volil hodnoty $z = 720$, $f = 12,6$ s^{-1}, $l = 8,633$ km a dostal $c = 313\,275$ km.s^{-1}.

Ještě přesnějšího výsledku dosáhl Jean Foucault v roce 1850 metodou rotujícího zrcadla (obr. 1.4). Během cesty světelného paprsku od rotujícího zrcadla k odražeči a zpět se zrcadlo pootočí o úhel α. Projde-li pak paprsek optickým systémem dráhu d, posune se jeho stopa na stínítku o $\delta = 2\alpha d$. Rychlost světla pak určíme ze vztahů

$$\alpha = 2\pi f \Delta t = 2\pi f \frac{2l}{c} = \frac{\delta}{2d}, \qquad c = \frac{8\pi f l d}{\delta}.$$

Foucault naměřil $c = 298\,000$ km.s^{-1}. Obě metody, s rotujícím ozubeným kolem i rotujícím zrcadlem byly později dále zdokonalovány. Nejpřesnějších výsledků tímto způsobem dosáhl ambiciozní americký experimentátor Albert Abraham Michelson, který v roce 1878 měřil rychlost světla rotujícím osmibokým zrcadlovým hranolem. V roce 1927 měření opakoval a nechal světelný paprsek probíhat vzdálenost mezi vrcholy Mt.Wilsonu a Mt.St.Antonia v Kalifornii, která činí 35 km. Změřil tak $c = 299\,796$ km.s^{-1}.

Moderní experimentální metody, zejména laserové, umožňují určit rychlost světla s přesností 4.10^{-9}, tedy přesněji než umíme měřit délky. I bylo v roce 1983 dohodnuto vzít takto naměřenou hodnotu světla

$$c = 299\,792,458 \text{ km.s}^{-1}$$

za přesnou a neměnnou. Jakákoli budoucí zpřesňování hodnoty rychlosti světla se promítnou do změny délky metru a číselná hodnota c se nebude měnit. Poznamenejme, že ve vzduchu za normálních podmínek se světlo šíří pomaleji o 91 km.s^{-1}.

Když byla rychlost světla určena, zbývalo ověřit, zda se světlo skutečně šíří světelným éterem a zda se jeho rychlost skládá s rychlostmi zdrojů a pozorovatelů pohybujících se vůči tomuto éteru. Tato měření vyžadují přesnost řádu $\frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-8}$, která se zdála nedosažitelnou. Michelson to přijal jako výzvu a v roce 1887 spolu s Edwardem Williamsem Morleyem uskutečnil slavný *Michelsonův - Morleyův experiment*. Je to jeden z mála experimentů s negativním výsledkem, který vstoupil do historie. Byl uskutečněn pomocí Michelsonova interferometru, který je na obr. 1.5.

Paprsek ze zdroje Z dopadá na polopropustnou destičku A, kde se štěpí. Jedna jeho část projde vzdálenost l od destičky k zrcadlu C a zpět ve směru pohybu Země, druhá jeho část projde touž vzdálenost k zrcadlu B a zpět kolmo k pohybu Země. Po odrazech se obě části paprsku na destičce opět spojí a společně dopadají na stínítko D, kde spolu interferují. Pokud se rychlost světla s rychlostí Země vůči nehybnému éteru sčítá, bude se první část paprsku po rozdělení pohybovat po dobu

$$t_{ACA} = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Druhá část projde po přeponách dvou pravoúhlých trojúhelníků (viz obr. 1.5) o odvěsnách vt a l, takže

$$c^2t^2 = v^2t^2 + l^2, \quad t = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,.$$

obr. 1.4 obr. 1.5

Odtud

$$t_{ABA} = 2t = \frac{2l}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right).$$

Časové zpoždění mezi oběma částmi paprsku je tedy $\frac{lv^2}{c^3}$ a rozdíl optických drah $\Delta l = l\frac{v^2}{c^2}$.

Oba paprsky by tedy měly na stínítku vytvořit soustavu interferenčních proužků. Při otočení interferometru o 90 stupňů by mělo dojít k posunu těchto proužků o $2\Delta l = 2l.10^{-8}$. Je-li délka ramene interferometru například l = 15m, bude posun činit 3.10^{-7}m, což je polovina vlnové délky žlutého světla. Předpokládaný posun by tedy musel být pozorován.

Přes úsilí experimentátorů a pozdější zdokonalování metody (použití masivního bloku plovoucího ve rtuťovém bazénu, prodlužování ramen interferometru vícenásobným odrazem paprsků, využití laserového světla, opakování pokusu v různých místech na zeměkouli a v různých ročních dobách atd.) *žádný posun pozorován nebyl.* Ke vzájemnému zpoždění paprsků tedy nedošlo, světlo postupovalo touž rychlostí všemi směry nezávisle na pohybu Země. Tento výsledek definitivně zproblematizoval existenci světelného éteru a nezachránily ho ani pokusy vyložit výsledek strháváním éteru Zemí.

Všechny uvedené rozpory se podařilo vyřešit Albertu Einsteinovi (1879 – 1955), který svým způsobem postavil Kolumbovo vajíčko na špičku. V roce 1905, tedy ve svých 26 letech, publikoval článek "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" ("K elektrodynamice pohybujících se těles"), v němž formuloval základy speciální teorie relativity (STR). Einstein vyšel z analýzy Maxwellových rovnic, ukázal že při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé platí Lorentzovy transformace, přičemž čas přestává být nezávislým parametrem, ale stává se jednou ze souřadnic. Galileiho transformace pak představují pouze limitní případ pro pohyby malými rychlostmi. S takovou situací, kdy obecnější teorie přechází při limitování nějakého parametru v jinou teorii, která představuje zvláštní případ teorie obecnější, se setkáváme ve fyzice častěji a vyjadřujeme ji jako *princip korespondence.*

Einstein tak zobecnil Newtonovu mechaniku a výslovně přitom požádal Newtona o odpuštění. Zároveň zobecnil i Galileiho princip relativity na všechny fyzikální děje, včetně elektromagnetických a optických. Pokud jde o negativní výsledek Michelsonova experimentu, Einstein se o něj přímo neopíral, ale v STR se předpoklad o existenci světelného éteru prostě stává zbytečným. Přijmeme-li tezi o stálosti rychlosti světla ve všech inerciálních vztažných soustavách, musíme přijmout i ostatní důsledky, byť sebepodivnější, které z ní vyplývají. Chceme-li se tedy nevěřícně podivovat nad "paradoxy" speciální teorie relativity, stačí se divit jen jednou, a to stálosti rychlosti světla.

Základní postuláty STR můžeme tedy formulovat takto:

1. Všechny fyzikální děje probíhají stejně ve všech inerciálních vztažných soustavách (Einsteinův princip relativity).

2. Světlo se šíří ve vakuu stejnou rychlostí ve všech inerciálních vztažných soustavách (princip stálosti rychlosti světla).

2. Lorentzovy transformace a jejich důsledky

Ve speciální teorii relativity budeme vždy uvažovat dvě inerciální vztažné soustavy, jednu nehybnou (laboratorní) označenou S a druhou pohybující se rychlostí v ve směru osy x a označenou jako S'. Osy x a x' obou soustav přitom splývají a osy y, z a y', z' jsou vzájemně souhlasně rovnoběžné (viz obr. 1.6). V počátku každé soustavy jsou umístěny hodiny, které měří čas t a t'. Zřejmě existuje okamžik, kdy se počátky obou soustav O , O' právě kryjí. Tento okamžik bereme za počátek pro odečet času v obou soustavách. Taková speciální volba dvou vztažných soustav neovlivní obecnost získaných výsledků.

Předpokládejme, že v počátku každé soustavy je umístěn světelný zdroj svítící všemi směry. V nehybné soustavě bude se světlo šířit v kulových vlnoplochách, které budou mít v okamžiku t rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2.$$

V pohybující se soustavě je však rychlost světla rovněž ve všech směrech stejná a světlo bude vytvářet rovněž kulové vlnoplochy o rovnici

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2.$$

Kdybychom použili Galileiho transformace $x' = x - vt,\ y' = y',\ z' = z,\ t' = t$, dostali bychom po dosazení do rovnice vlnoplochy v S'

obr. 1.6

$$x^2 - \underline{2xvt} + \underline{v^2t^2} + y^2 + z^2 = c^2t^2.$$

Tato rovnice však neodpovídá rovnici kulové vlnoplochy v S; liší se od ní podtrženými členy. Abychom dosáhli souhlasu obou rovnic, provedeme lineární transformaci času: $t' = t + \alpha x$. Koeficient α určíme dodatečně. Tak dostaneme

$$x^2 - \underline{2xvt} + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + \underline{2c^2t\alpha x} + c^2\alpha^2x^2 \ .$$

Zvolíme-li $\alpha = -\frac{v}{c^2}$, vyruší se opět podtržené členy a rovnice přejde na tvar

$$x^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(l - \frac{v^2}{c^2}\right) .$$

Nyní stačí už jen znormovat x a t koeficientem $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ a dostáváme *Lorentzovy transformace* splňující podmínku, aby světelná vlnoplocha byla v nehybné i v pohybující se soustavě kulová:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Obvykle zavádíme označení

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.1}$$

a zapisujeme Lorentzovy transformace ve tvaru

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) . \tag{1.2}$$

Vztažná soustava se zřejmě nesmí pohybovat rychlostí světla; jinak bychom dostali ve jmenovateli Lorentzových transformací nulu. Nelze tedy spojit vztažnou soustavu se světelným paprskem, resp. s fotonem. Pokud by se soustava pohybovala rychlostí větší než světelnou, dostali bychom koeficient γ imaginární; nevíme ovšem, co by to fyzikálně znamenalo.

Někdy se zjednodušeně tvrdí, že podle teorie relativity se "nic" nemůže pohybovat rychlostí větší než je rychlost světla ve vakuu. Toto tvrzení není správné, nemluvě už o tom, že "nic" není fyzikální termín. Ukazuje se, že je celá řada veličin a úkazů, které se pohybují rychlostí nadsvětelnou. Tak například fázová rychlost sinusové vlny, průsečík ostří velmi dlouhých nůžek, světelný záblesk ("prasátko") v dostatečné vzdálenosti od zdroje, kterým otáčíme apod. mohou přesahovat rychlost světla. Podrobnější analýza však prokáže, že všechny tyto kuriozní nadsvětelné jevy nemohou přenášet energii ani informaci. Abychom přenesli informaci elektromagnetickou vlnou, musíme ji modulovat; informace se pak bude šířit nikoli fázovou rychlostí, nýbrž grupovou, která je podsvětelná. To co se šíří nadsvětelnou rychlostí jsou tedy v podstatě samé pošetilosti.

Někdy je možné zanedbat druhou mocninu β ve srovnání s jedničkou a položit přibližně $\gamma \approx 1$. Pak dostaneme takzvané "pomalé" Lorentzovy transformace

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t - \frac{\beta}{c}x . \tag{1.3}$$

Snadno dostaneme též zpětné Lorentzovy transformace, tj. vyjádření nečárkovaných veličin pomocí čárkovaných. K tomu zřejmě stačí prostě změnit znaménko rychlosti v na opačné.

Lorentzovy transformace lze zapsat též ve vektorovém tvaru jako

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}\left[\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{v^2}(\gamma-1) - \gamma t\right], \quad t' = \gamma\left[t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\right]. \tag{1.4}$$

Pro $\vec{v} \equiv (v, 0, 0)$ odpovídá tato vektorová forma obvyklým Lorentzovým transformacím. Je však obecnější v tom, že ji lze použít i tehdy, má-li rychlost $\vec{v}$ obecný směr (při zachování rovnoběžnosti souřadných os).

Z Lorentzových transformací plyne celá řada překvapivých důsledků. Je to především *relativita soumístnosti a současnosti.* Uvažujme dvě události charakterizované časovým okamžikem a prostorovými souřadnicemi t_1, x_1, y_1, z_1 a t_2, x_2, y_2, z_2. Časový interval mezi nimi v soustavě S bude $\Delta t = t_2 - t_1$, vzdálenost $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, kde $\Delta x = x_2 - x_1, \ldots$. Z (1.2) dostáváme v soustavě S':

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x), \qquad \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \qquad \Delta y' = \Delta y, \qquad \Delta z' = \Delta z\,. \tag{1.5}$$

Odtud je zřejmé, že jsou-li dvě události v soustavě S soumístné, $\Delta l = 0$, nemusí být soumístné v soustavě S'.($\Delta l' = 0$ jen bude-li $\Delta t = 0$). To nás nemusí překvapovat, neboť s podobnou situací se setkáváme i v nerelativistické fyzice. Je však překvapivější, že dvě události současné v jedné vztažné soustavě nemusí být současné v druhé. Je-li $\Delta t = 0$, bude $\Delta t' = 0$ jen pro události probíhající v témž místě (při $\Delta x = 0$).

Další neobvyklý důsledek Lorentzových transformací souvisí s tím, že čas probíhá v různých vztažných soustavách různě. V pohybující se soustavě bude čas probíhat pomaleji než v soustavě nehybné; nazýváme to *dilatace času.* Mějme nějaký objekt, například těleso či částici pohybující se rovnoměrně přímočaře rychlostí v ve směru osy x. Potom s touto částicí můžeme spojit počátek pohybující se vztažné soustavy S' ; tato soustava se nazývá *vlastní (klidová) soustavou částice.* Je zřejmé, že všechny události týkající se této částice budou soumístné, budou probíhat vždy v počátku O'. Proto podle (1.5)

$$\Delta x' = 0, \;\; \Delta x = v\Delta t, \;\; \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}v\Delta t) = \gamma^{-1}\Delta t\,.$$

Budeme-li odečítat čas v obou soustavách od společného okamžiku jejich splynutí a označíme-li *vlastní čas* částice $t' = \tau$, dostaneme vztah pro dilataci času v podobě

$$\tau \;=\; \gamma^{-1}t \;=\; t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;. \tag{1.6}$$

Experimentální potvrzení tohoto neobvyklého důsledku lze vidět v tom, že částice, které mají v klidovém stavu krátkou dobu života, mohou při pohybu rychlostí blízkou rychlosti světla urazit dráhu odpovídající mnohonásobně delší době. Tak například miony kosmického záření, které se v klidu rozpadají za $2,2.10^{-6}$ s mohou v atmosféře proletět mnoho kilometrů, i když by během svého života měly stačit urazit rychlostí blízkou rychlosti světla jen asi 660 m. Podobně se chovají i částice urychlené na urychlovačích. V poslední době se již podařilo prokázat tento efekt i přímým srovnáváním chodu atomových hodin na Zemi a v rychle letících letadlech.

Představa, že kosmonaut pohybující se v raketě rychlostí blízkou rychlosti světla bude stárnout pomaleji než pozorovatel na Zemi se zdá nesmyslná z hlediska ZLR, tím spíše, že v soustavě spojené s raketou by měl opět stárnout pomaleji pozorovatel na Zemi. Je to jeden z mnoha tzv. "paradoxů" STR, ovšem pouze zdánlivých. Na samotném faktu, že se různé věci jeví jinak s hlediska různých vztažných soustav není ještě nic paradoxního. Princip relativity pouze tvrdí, že všechny fyzikální (a ovšem i chemické, biologické atd.) děje probíhají stejně ve všech inerciálních vztažných soustavách. Kosmonaut ve své vlastní vztažné soustavě si bude stárnout stejným tempem jako pozorovatel ve své pozemské soustavě.

Určitý problém nastane, setkají-li se nakonec kosmonaut a pozorovatel ve společné vztažné soustavě, například na Zemi a budou porovnávat, kdo z nich je starší. Někdy hovoříme o tzv. "paradoxu dvojčat". Ze dvou stejně starých dvojčat se jeden, pan Bingle, vydá na kosmickou cestu rychlostí v, zatímco jeho bratr, pan Dingle, zůstane na Zemi. Poté, co urazí vzdálenost Δx (viz obr. 1.7), začne se pan Bingle vracet zpět rychlostí $-v$ na Zem.

Označme A a D události odletu a příletu pana Bingla na Zem, událost B je přistání pana Bingla na cílové planetě. Od odletu do příletu uplyne na Zemi doba Δt_{AD}, současně s přistáním B proběhne na Zemi nějaká událost C, z důvodu symetrie zřejmě právě v polovině intervalu Δt_{AD}. Kosmonaut prožije od odletu do návratu dobu $\Delta\tau_{AD}$, z toho polovinu času v rychlosti v a druhou v rychlosti $-v$. Z (1.6) máme

$$\begin{aligned}\Delta t_{AC} \;=\; \Delta t_{CD} \;=\; \Delta t_{AB} \;=\; \Delta t_{BD} \;&=\; \frac{\Delta x}{v}\,,\\ \Delta\tau_{AD} \;=\; \gamma^{-1}(\Delta t_{AC}+\Delta t_{CD}) \;&=\; \gamma^{-1}\Delta t_{AD} \;<\; \Delta t_{AD}\,.\end{aligned} \tag{1.7}$$

S hlediska pana Dingla bude tedy jeho bratr po návratu fyzicky mladší. Sešlejší stav pana Dingla je ovšem absolutní fakt, který se musí jevit stejně s hlediska jakékoli vztažné soustavy. Jak si jej vysvětlí pan Bingle? Jeho situace není zcela symetrická – zatímco jeho bratr trávil

obr. 1.7 obr. 1.8

život v inerciální soustavě, pan Bingle třikrát přecházel z jedné vztažné soustavy do druhé. Trávil tedy krušné okamžiky prudce neinerciálních pohybů a přesně vzato úloha tím vybočuje z STR. Představa o tom, že přesedání z jedné inerciální soustavy do druhé se dělo okamžitě je samozřejmě idealizací, ale řešení je v rámci STR přesto zcela konzistentní. Zajímavé je, že zatímco Bingle přesedal, šedivěl z toho na Zemi jeho bratr.

Věc je v tom, že v pohybujících se soustavách nebudou události B a C současné. V soustavě v bude k B na Zemi současná událost E a v soustavě $-v$ událost F (viz obrázek), takže $\Delta\tau_{EB} = \Delta\tau_{BF} = 0, \ \Delta\tau_{AE} + \Delta\tau_{FD} = \Delta\tau_{AD}$. Z podmínky (1.5) pro zpětnou transformaci dostaneme

$$\Delta t_{EB} = \Delta t_{BF} = \gamma\frac{v}{c^2}\Delta x', \ \text{kde } \Delta x' = \frac{1}{2}v\Delta\tau_{AD} .$$

Potom

$$\begin{aligned}\Delta t_{AD} &= \Delta t_{AE} + \Delta t_{FD} + \Delta t_{EF} = (\Delta t_{AE} + \Delta t_{FD}) + 2\Delta t_{EB} = \\ \gamma^{-1}(\Delta\tau_{AE} + \Delta\tau_{FD}) &+ \gamma\beta^2\Delta\tau_{AD} = (\gamma^{-1} + \gamma\beta^2)\Delta\tau_{AD} = \gamma\Delta\tau_{AD}\end{aligned} \tag{1.8}$$

v souladu s (1.7). Obecnější řešení s uvážením neinerciálních úseků cesty (brzdění, urychlení, otočka) ukazuje, že v některých případech může dojít i k opačnému efektu (rychlejšímu stárnutí kosmonauta), ale není důvodů pochybovat o tom, že změna ve fyzickém stáří dvojčat bude reálná. V principu tak může kosmonaut přicestovat zpět na Zemi v bližší či vzdálenější budoucnosti. Důležité je, že není možná cesta zpět do minulosti, což by mohlo vyvolat spor s principem příčinnosti (příčiny musí vždy předcházet následkům, i když "post hoc" nemusí ještě znamenat "propter hoc").

S dilatací času úzce souvisí i *relativistický Dopplerův jev*. V roce 1842 zformuloval v Praze Christian Doppler princip, podle něhož se frekvence vlnění registrovaná pozorovatelem (f) liší od frekvence vlnění ve vlastní soustavě zdroje (f_0), pohybují-li se zdroj a pozorovatel *vzájemnou rychlostí* v a je-li θ úhel mezi směrem pohybu a spojnicí od zdroje k pozorovateli (viz obr. 1.8):

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{1.9}$$

Protože frekvence je převrácenou hodnotou periody, dostaneme v relativistickém případě

$$f = \gamma^{-1}\frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} . \tag{1.10}$$

Při $\theta = 0$, π dostáváme takzvaný podélný Dopplerův jev, při $\theta = \frac{\pi}{2}$ příčný Dopplerův jev:

$$f_{pod} = \gamma^{-1}\frac{f_0}{1 \mp \frac{v}{c}} , \qquad f_{př} = \gamma^{-1} f_0 . \tag{1.11}$$

Příčný Dopplerův jev je čistě relativistický efekt druhého řádu a byl experimentálně pozorován teprve v r. 1938 při vyzařování rychlých iontů vodíku (H.F.Ives, G.R.Stilwell).

Dalším relatistickým jevem je takzvaná *kontrakce délek*. Mějme tuhé těleso konečných rozměrů a spojme s ním vztažnou soustavu S'. V této soustavě bude těleso nehybné a jeho *vlastní délka* zde bude $\lambda = l' = x'_2 - x'_1$. V nepohybující se soustavě S musíme měřit polohu obou konců tělesa v témž okamžiku $t_1 = t_2$. Z Lorentzových transformací pak máme

$$l' = x'_2 - x'_1 = \gamma[x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)] = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l .$$

Pro vlastní délku tedy dostáváme

$$\lambda = \gamma l = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{1.12}$$

Podélný rozměr pohybujícího se tělesa je tedy zkrácen oproti jeho vlastnímu rozměru. Ve stejném poměru se zřejmě zmenšuje i objem tělesa. Také tato kontrakce délek je experimentálně potvrzována; jak uvidíme, jejím přímým důsledkem je i existence magnetického pole. Kontrakce délek a dilatace času spolu úzce souvisejí. Připomeňme si případ kosmických mionů, které proběhly v atmosféře několik kilometrů - ve své vlastní soustavě pozorují, že kolem nich probíhá vrstva atmosféry, jejíž tloušťka je ovšem zkrácena na oněch 660 m, které jsou miony s to během svého života proběhnout.

Z Lorentzových transformací přímo vyplývají pravidla pro *skládání rychlostí*. Dělíme-li dx', dy', dz' veličinou dt' a označíme rychlosti nějaké částice v čárkované a nečárkované soustavě $u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \ldots, u_x = \frac{dx}{dt}, \ldots$, dostáváme

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} , \qquad u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} . \tag{1.13}$$

Pokud se sčítají pouze rychlosti podél osy x, dostáváme

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} , \qquad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} . \tag{1.14}$$

Odtud je zřejmé, že součet dvou rychlostí, třeba blízkých rychlosti světla, nikdy rychlost světla nepřesáhne. Snadno ověříme, že vystřelíme-li z rakety pohybující se téměř rychlostí světla laserový paprsek, bude po sečtení rychlostí podle (1.14) jeho rychlost stejná v čárkované i nečárkované soustavě.

Někdy se může hodit vektorový výraz pro skládání rychlostí: 1

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} + \vec{v}\left[\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma\right]}{\gamma\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)} \approx \frac{\vec{u} - \vec{v}}{1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}} . \tag{1.15}$$

Pomocí relativistického sčítání lze vysvětlit výsledek *Fizeauova pokusu* se strháváním éteru proudící vodou (obr. 1.9). Jedna část rozštěpeného světelného paprsku prochází vzdálenost $2l$ ve směru proudícího vodního sloupce, druhá proti proudu a poté oba interferují. Rychlost světla v klidné vodě souvisí s indexem lomu n vztahem $v_0 = \frac{c}{n}$; přitom je tato rychlost samozřejmě mnohem větší než rychlost proudění V. Fizeau předpokládal, že světelný éter je částečně strháván proudící vodou a zavedl tzv. koeficient strhávání k, takže podle něj rychlost světla po proudu a proti proudu byla $v_1 = v_0 + kV,\ v_2 = v_0 - kV$.Časový rozdíl chodu obou paprsků, který je možno změřit posunem interferenčních proužků, činí tedy

$$\Delta t = \frac{2l}{v_0 - kV} - \frac{2l}{v_0 + kV} \approx \frac{4klV}{v_0^2} = \frac{4klVn^2}{c^2} .$$

Na základě tohoto vztahu mohl Fizeau experimentálně určit koeficient k a zjistil, že $k = 1 - \frac{1}{n^2}$. Tentýž výsledek můžeme však dostat na základě relativistického sčítání rychlostí. Je-li rychlost světla v soustavě spojené s pohybující se vodou v_0, bude v laboratorní soustavě

obr. 1.9

$$v \;=\; \frac{v_0 \pm V}{1 \pm \frac{v_0 V}{c^2}} \approx v_0 \mp V \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \;.$$

Dostáváme tedy týž výsledek jako Fizeau, aniž bychom předpokládali existenci éteru a jeho strhávání.

S relativistickým skládáním rychlostí úzce souvisí i *transformace směru.* Uvažme okamžik $t = t' = 0$, kdy počátky pevné a pohybující se soustavy splývají a mějme částici, která se pohybuje v rovině x, z rychlostí $\vec{u}$, resp. $\vec{u}'$ pod úhlem θ, resp. θ' vzhledem k ose x (viz obr. 1.10).

Pak máme $u_x = u\cos\theta$, $u'_x = u'\cos\theta'$, $u_z = u\sin\theta$, $u'_z = u'\sin\theta$. Použijeme-li pravidla pro sčítání rychlostí (1.13), dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\theta' \;=\; \frac{u'_z}{u'_x} \;=\; \gamma^{-1}\frac{u_z}{u_x - v} \;=\; \gamma^{-1}\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta - v}\;. \tag{1.16}$$

Jde-li o směr světelného paprsku, (obr. 1.11) položíme $u = u' = c$, a pro $v \ll c$, $\gamma \approx 1$ máme

$$\Delta\theta \;=\; \theta' - \theta \;\approx\; \mathrm{tg}\,(\theta' - \theta) \;=\; \frac{\mathrm{tg}\,\theta' - \mathrm{tg}\,\theta}{1 \;+\; \mathrm{tg}\,\theta'\mathrm{tg}\,\theta} \;=\; \frac{\beta\sin\theta}{1 \;-\; \beta\cos\theta} \approx \beta\sin\theta\;.$$

obr. 1.10 obr. 1.11

Poslední výraz odpovídá klasickému přiblížení pro Bradleyho aberaci.

V Newtonově fyzice jsme zvyklí, že délka, vzdálenost dvou bodů v prostoru $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 +}$ se nemění při přechodu z jedné soustavy do druhé, je invariantní. Jak víme v STR tomu tak není. Přesto však je možno vytvořit invariant, který se nemění, aplikujeme-li na souřadnice a čas Lorentzovy transformace. Tento invariant nazýváme *intervalem.* Čtverec intervalu je

$$(\Delta s)^2 \;=\; c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 \;=\; c^2(\Delta t')^2 - (\Delta l')^2 \;=\; \text{invariant}\ . \tag{1.17}$$

Na rozdíl od délky v obyčejném euklidovském prostoru může být čtverec intervalu kladný, záporný či nulový a interval může být i imaginární. Zavedeme-li čtyřrozměrný prostor událostí, *prostoročas*, jehož body mají souřadnice ct, x, y, z (koeficient c u t zajišťuje fyzikální rozměr délky), potom můžeme interval považovat za jakousi svéráznou délku, vzdálenost mezi dvěma událostmi tohoto prostoru. Říkáme, že vztahem (1.17) jsme zadali metriku (způsob měření vzdáleností) v tomto prostoru. Metrika takto definovaného čtyřrozměrného prostoru se zřejmě liší od metriky čtyřrozměrného euklidovského prostoru znaménkem minus v (1.17). Proto tento prostor nazýváme s matematického hlediska *prostor pseudoeuklidovský* nebo *prostor Minkowského.*

Interval úzce souvisí s vlastním časem. Probíhají-li nějaké události s určitým tělesem nebo částicí, platí pro ně ve vlastní soustavě tělesa $\Delta l' = 0$. Potom $\Delta s = c\Delta t' = c\Delta\tau$, kde τ je vlastní čas tělesa.

Dvě události, dva body prostoročasu (někdy jej též nazýváme světovým prostorem) mohou být odděleny následujícími typy intervalů:

- $(\Delta s)^2 > 0$, Δs reálný. Takový interval nazýváme *časopodobným.* Má tu vlastnost, že

obr. 1.12

vždy existuje vztažná soustava, v níž tyto dvě události lze učinit soumístnými. To se týká například všech událostí, které se dějí s jedním tělesem a zmíněná soustava je jeho vlastní soustava. Takové události mohou být příčinně spojeny, život, vývoj jednoho tělesa (částice) je vždy řetězem příčin a následků.

- $(\Delta s)^2 = 0,\ \Delta l = \pm c\Delta t$. Takový interval nazýváme *světlopodobným*. Dvě události spojené světlopodobným intervalem jsou například vyslání a přijetí signálu předávaného rychlostí světla.
- $(\Delta s)^2 < 0,\ \Delta s$ imaginární. Takový interval nazýváme *prostoropodobným*. Má tu vlastnost, že vždy existuje vztažná soustava, v níž lze tyto dvě události učinit současnými. Takové události zřejmě nemohou být v příčinném spojení a nemohou se týkat téhož tělesa.

V prostoru událostí (světovém prostoru) obyčejně znázorňujeme tzv. *světelný kužel*. Na obr. 1.12 vidíme jeho projekci do roviny ct, x, kde je zobrazen dvojicí přímek $x = \pm ct$. Počátek O představuje výchozí událost, naše "zde" a "nyní". Všechny události spojené s touto výchozí událostí časopodobným intervalem leží uvnitř světelného kužele (vlastně dvojkužele), světlopodobným intervalem na plášti tohoto kužele a prostoropodobným intervalem mimo tento kužel. Život tělesa tedy představuje sled bodů v prostoročase (světobodů) spojených světočárou procházející vrcholem světelného kužele; události minulé pod osou x, události budoucí nad ní.

3. Relativistická dynamika

Základními pojmy dynamiky jsou hybnost a síla. Po zkušenosti s polohovým vektorem a Lorentzovými transformacemi je logické požadovat, aby i vektor hybnosti $\vec{p} \equiv (p_x, p_y, p_z)$ projevoval podobné transformační vlastnosti jako polohový vektor, tedy zejména aby platilo $p'_y = p_y,\ p'_z = p_z$. Lze se přesvědčit, že takovému požadavku bude vyhověno, budeme-li definovat hybnost částice o hmotnosti m a pohybující se rychlostí $\vec{u}$ vztahem

$$\vec{p} \ = \ \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 \ - \ \frac{u^2}{c^2}}} \ . \tag{1.18}$$

V souhlase s principem korespondence přechází tato definice v nerelativistickou hybnost při $u \ll c$. Hmotnost m je konstantní a nazývá se též *klidovou hmotností*.

K přetransformování složek p_y, p_z nám nyní postačí pravidla pro skládání rychlostí (1.13):

$$p'_{y,z} \ = \ \frac{mu'_{y,z}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \ = \ \frac{mu_{y,z}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \ = \ p_{y,z} \ . \tag{1.19}$$

Při úpravě jsme zlomek rozšířili $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ a použili identity

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \ = \ \gamma \frac{1 - \frac{u_x v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \ , \tag{1.20}$$

kterou si ve volné chvíli snadno dokážeme.

Přetransformujeme nyní složku p_x s použitím (1.20)

$$p'_x \ = \ \frac{mu'_x}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \ = \ \gamma \left(\frac{mu_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \ - \ \frac{v}{c^2} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \ = \ \gamma \ (p_x \ - \ \frac{\beta}{c} E) \ . \tag{1.21}$$

Jako E jsme označili výraz

$$E \ = \ \frac{m\, c^2}{\sqrt{1 \ - \ \frac{u^2}{c^2}}} \ , \tag{1.22}$$

který má rozměr energie. Je logické předpokládat, že představuje energii volné, bezsilové částice. Pro malé rychlosti přechází v konstantní hodnotu

$$E_0 \;=\; m\,c^2\;, \tag{1.23}$$

kterou můžeme nazvat *klidovou energií částice.* Je to zřejmě vlastní energie částice v její klidové soustavě. V nerelativistické fyzice se sice s takovou konstantní energií nesetkáváme, ale energie je tam definována s přesností na adiční konstantu, takže k rozporu nedochází. Kinetickou energii v STR můžeme rozložit do řady pro malé hodnoty poměru $\frac{u}{c}$:

$$E_k \;=\; E \;-\; mc^2 \;=\; mc^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \;-\; mc^2 \;=\; mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4}+\cdots-1\right) \;=$$

$$=\frac{1}{2}mu^2 \;+\; \frac{3}{8}m\frac{u^4}{c^4}+\cdots \tag{1.24}$$

Můžeme se přesvědčit, že energie částice definovaná vztahem (1.22) vzrůstá, koná-li vnější síla nad částicí práci. Výkon takové síly bude

$$P \;=\; \vec{F}\cdot\vec{u} \;=\; \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{u} \;=\; \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)\cdot\vec{u} \;=\; \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\;.$$

Protože $P = \frac{dE}{dt}$, dostaneme integrací

$$E \;=\; \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \;+\; \text{konst}\;. \tag{1.25}$$

Pro určení integrační konstanty v (1.25) nemáme teoretický podklad. Zůstává totiž otázkou, zda klidová energie (1.23) představuje skutečně úplnou energii částice. Teprve experimentální objev anihilace částic a antičástic, kdy klidová energie zcela mizí a mění se v energii kinetickou a energii záření (dochází k úplnému *uvolnění energie*), umožnil položit integrační konstantu v (1.25) rovnou nule.

Poznámka. Někdy se zavádí takzvaná relativistická hmotnost $m = \frac{E}{c^2}$, která roste při přibližování rychlosti částice rychlosti světla a při nulové rychlosti přechází v hmotnost klidovou. Je to však zbytečné, neboť tato veličina je stále úměrna energii. Navíc se tím pojem hmotnosti zbytečně komplikuje - v pohybové rovnici už totiž nemůžeme vytknout hmotnost jako konstantní a psát $\vec{F} = m\vec{a}$. Hmotnost částice bude záviset nejen na velikosti rychlosti, ale i na směru rychlosti vzhledem ke směru působící síly. Někdy se setkáváme se starými pojmy "hmotnost podélná" a "hmotnost příčná", působí-li síla rovnoběžně nebo kolmo ke směru rychlosti. Hmotnost tak zřejmě přestává být vhodnou mírou setrvačnosti částice a je nejvyšší čas se tohoto pojmu zbavit. Něco jiného je klidová hmotnost částice, která představuje určitou skalární, invariantní vlastnost. I tu ovšem můžeme vyjadřovat jako klidovou energii v energetických jednotkách (u částic v elektronvoltech a jejich násobcích).

Vraťme se nyní k transformačnímu vztahu pro složku hybnosti p_x (1.21). Vidíme, že tato složka hybnosti se při transformaci váže s energií, podobně jako u Lorentzových transformací se souřadnice x váže s časem. Provedeme ještě transformaci energie (použijeme přitom užitečného vztahu (1.20)):

$$E' = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \gamma\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - v\frac{mu_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \gamma\left(E - vp_x\right). \tag{1.26}$$

Vidíme, že STR spojuje vždy jednu skalární a jednu vektorovou veličinu do čtveřice souřadnic, které se při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé transformují společně. Vzniká tak *polohový čtyřvektor* v prostoročase, který můžeme zapsat ve formě $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ nebo *čtyřhybnost* (čtyřvektor energie - hybnosti) $\left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = (p^0, p^1, p^2, p^3)$, a jiné. S matematického hlediska jsou to vektory ve čtyřrozměrném prostoru Minkowského a transformují se podle obecných Lorentzových transformací

$$a'^0 = \gamma(a^0 - \beta a^1), \qquad a'^1 = \gamma(a^1 - \beta a^0), \qquad a'^2 = a^2, \qquad a'^3 = a^3 . \tag{1.27}$$

(Jde o tzv. kontravariantní složky čtyřvektorů, které se značí horními indexy).

Invariant ("délku") těchto čtyřvektorů můžeme vyjádřit jako

$$(a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 = \text{invariant.}$$

Víme, že pro polohový čtyřvektor je tímto invariantem interval. Pro čtyřhybnost dostáváme

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{m^2c^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{m^2u^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} = m^2c^2 ,$$

což je jistě invariant (konstanta).

Odtud dostáváme důležitý relativistický vztah mezi energií a hybností:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} . \tag{1.28}$$

V nerelativistickém případě tomuto vztahu odpovídá pouze kinetická energie volné částice $E = \frac{p^2}{2m}$. Existují i částice o nulové klidové hmotnosti (například foton) a pro ně pak z (1.28) dostaneme

$$E = p\,c\,. \tag{1.29}$$

Nakonec najdeme vztah pro *transformaci síly* z jedné vztažné soustavy do druhé. Požadujeme přitom, aby Newtonův pohybový zákon měl formálně týž tvar jako v nerelativistické fyzice, tj. aby platilo

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \vec{F'} = \frac{d\vec{p'}}{dt'}\,.$$

Přitom se ovšem budou relativisticky transformovat jak hybnosti tak čas. Abychom mohli při derivování podle času přecházet od nečárkovaných veličin k čárkovaným a naopak, odvodíme napřed užitečný vztah plynoucí z Lorentzových transformací a transformace x-ové složky rychlosti. Protože

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right),$$

máme

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) = \gamma\left(1 - \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}\,\frac{v}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^{-1}. \tag{1.30}$$

Vyjádříme nyní složky síly $\vec{F}$ pomocí složek $\vec{F'}$:

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = \gamma\left(\frac{dp'_x}{dt'} + \frac{v}{c^2}\,\frac{dE'}{dt'}\right)\frac{dt'}{dt} = \frac{F'_x + \frac{v}{c^2}\vec{F'}\cdot\vec{u}'}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = F'_x + \gamma\frac{v}{c^2}\left(F'_y u_y + F'_z u_z\right),$$

$$F_{y,z} = \frac{dp_{y,z}}{dt} = \frac{dp'_{y,z}}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^{-1} F'_{y,z} = \gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)F'_{y,z}\,. \tag{1.31}$$

Přejdeme k vektorovému vyjádření. Zapíšeme-li rychlost v jako vektor $\vec{v} \equiv (v, 0, 0)$, můžeme zapsat složky síly ve tvaru

$$F_x = F'_x - \gamma\frac{v}{c^2}F'_x u_x + \gamma\frac{v}{c^2}(\vec{F'}\cdot\vec{u}) = (1-\gamma)F'_x + \gamma\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)F'_x + \gamma\frac{v}{c^2}(\vec{F'}\cdot\vec{u})\,,$$

$$F_{y,z} = \gamma\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)F'_{y,z}\,.$$

Shrneme-li vztahy pro transformaci složek síly, můžeme psát

$$\vec{F} = (1-\gamma)\frac{\vec{F}'\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v}+\gamma\vec{F}'+\frac{\gamma}{c^2}\left[\vec{v}(\vec{u}\cdot\vec{F}')-\vec{F}'(\vec{u}\cdot\vec{v})\right] = (1-\gamma)\frac{\vec{F}'\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v}+\gamma\vec{F}'+\frac{\gamma}{c^2}\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{F}')\ . \tag{1.32}$$

Má-li síla ve vlastní soustavě zdroje (například v soustavě spojené s pohybujícím se nábojem) tvar

$$\vec{F}' = k\frac{\vec{r}'}{r'^3}\ ,$$

potom s použitím (1.4) položíme-li $t = 0$ dostaneme

$$\vec{F} = \frac{k\gamma}{r'^3}\left[\vec{r}+\frac{1}{c^2}\,\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{r})\right]\ . \tag{1.33}$$

4. O obecné teorii relativity

Einsteinův princip relativity hovoří o rovnocennosti všech inerciálních vztažných soustav. Jak víme, v neinerciálních soustavách se objevují setrvačné síly, které nemají bezprostřední původ v interagujících tělesech. Na druhé straně již v Newtonově mechanice bylo ustanoveno, a postupně experimentálně ověřováno se stále větší přesností, že setrvačná síla a gravitace mají tytéž účinky, že setrvačná hmotnost a gravitační hmotnost jsou si úměrny, že je lze je sčítat a vyjadřovat v týchž jednotkách. Je to tzv. Newtonův princip ekvivalence.

Einstein učinil další krok a vyslovil předpoklad, že setrvačnost a gravitace jsou přímo totožné. Tím na jedné straně vytvořil novou teorii gravitace a straně druhé zobecnil teoii relativity i na neinerciální soustavy. Tuto teorii proto nazýváme *obecnou teorií relativity*, OTR. Její základní postuláty můžeme zformulovat například takto:

1. Fyzikální zákony mají stejný tvar ve všech vztažných soustavách (obecný princip relativity).

2. Všechny fyzikální děje probíhají stejně v inerciální soustavě, v níž působí homogenní *gravitační pole intenzity $\vec{g}$ a v neinerciální soustavě pohybující se rovnoměrně zrychleně se zrychlením $-\vec{g}$ (Einsteinův princip ekvivalence).*

V malé oblasti prostoru můžeme gravitační pole vždy považovat za homogenní a nahradit je lokální vztažnou soustavou pohybující se vůči inerciálním soustavám s konstantním zrychlením. Obecně v prostoru je však gravitační pole nehomogenní a musíme proto stále přecházet od jedné lokální vztažné sopustavy k druhé. To je ekvivalentní představě o zakřiveném prostoru. Buď můžeme prohlásit, že světelný paprsek zakřivuje svou dráhu pod vlivem gravitačního pole nebo proto, že sám prostor je zakřiven a nejkratší dráhy, spojnici dvou bodů neleží v přímkách, ale v zakřivených, takzvaných geodetických čarách.

Gravitaci můžeme tedy nahradit udáním pravidla měření vzdáleností, tj. *metriky prostoročasu.* Nesmíme zapomínat, že v teorii relativity čas hraje úlohu jedné ze souřadnic a že jde tedy o zakřivený prostoročas, což si lze jistě velmi obtížně představit. Místo čtyřrozměrného pseudoeuklidovského prostoru Minkowského máme nyní čtyřrozměrný prostor pseudoriemannovský. Je třeba podotknout, že geometrické vlastnosti zakřivených, neeuklidovských prostorů byly matematicky prozkoumány již v polovině minulého století. Zabývali se jimi C.F.Gauss, N.Lobačevský, J.Bolyai a zejména německý matematik B.Riemann. Avšak teprve Einsteinova OTR ukázala že tyto matematické prostory vyjadřují gravitační vlastnosti reálného světa, že náš *fyzikální* prostor je zakřiven. Geometrie reálného světa se tak stala součástí fyziky.

Metrické vlastnosti prostoru popisuje takzvaný *metrický tenzor* $g_{\mu\nu}$, pomocí něhož je možno zapsat interval ve tvaru

$$ds^2 \;=\; g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \;.$$

Řecké indexy zde probíhají hodnoty $0, 1, 2, 3$ a přes odpovídající si horní a dolní indexy se sčítá. Metrický tenzor je symetrický a má tedy obecně deset různých složek (tzv. gravitačních potenciálů). Pro pseudoeuklidovský prostor Minkowského přechází metrický tenzor na tvar

$$g_{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;,$$

v prvním přiblížení slabého gravitačního pole dostáváme

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+\frac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right) \end{pmatrix} .$$

Zde ϕ označuje gravitační potenciál. V silném gravitačním poli není ovšem metrický tenzor diagonální. Matematický formalismus OTR je poměrně náročný a nebudeme se jím zde zabývat. Podotkneme pouze, že od metrického tenzoru je možno odvodit takzvaný *Einsteinův tenzor křivosti* $G_{\mu\nu}$, který vystupuje ve slavné Einsteinově rovnici z roku 1916:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi\kappa}{c^4} T_{\mu\nu} . \tag{1.34}$$

Na pravé straně vystupuje *čtyřtenzor energie - hybnosti* $T_{\mu\nu}$, který udává rozložení hmoty v prostoru, κ je gravitační konstanta. Pokud jde o druhý člen na levé straně, má smysl jej uvažovat pouze u kosmologických problémů vesmíru jako celku; tzv.*kosmologická konstanta* Λ zde je velmi malá.

Einsteinova rovnice tedy spojuje křivost prostoru s rozložením hmoty. Ve skutečnosti představuje deset rovnic pro gravitační potenciály, a to nelineárních, neboť gravitační pole, které vyvolává zakřivení prostoru má samo též energii a působí vlastně samo na sebe. Přes mimořádnou matematickou obtížnost nalezl Schwarzschild první řešení Einsteinovy rovnice ještě v roce 1916. Šlo o řešení pro případ centrálního, sféricky symetrického pole, tedy zobecnění Newtonova gravitačního zákona. Ve sférických souřadnicích dává toto řešení pro interval

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) . \tag{1.35}$$

Veličina

$$r_g = \frac{2\kappa m}{c^2} \tag{1.36}$$

představuje známý Schwarzschildův poloměr, při jehož dosažení nastává singularita, gravitační kolaps a zhroucení do černé díry. Pro Slunce je tento poloměr roven asi 3 km, pro Zemi 0,9 cm. Obecně nebyly Einsteinovy rovnice dosud vyřešeny, je známo pouze několik dalších řešení dílčích, například Kerrovo řešení z r. 1963 pro rotující kouli. V OTR se ukazuje, že gravitační pole nerotující a rotující hmoty jsou různá.

Na rozdíl od STR, která je denně ověřována technickou praxí, setkáváme se s důsledky OTR pouze v kosmických podmínkách nebo při velmi precisních experimentech. Za první experimentální ověření OTR je možno považovat jev *stáčení perihelia planet.* Víme, že při sebemenší odchylce od Newtonova gravitačního zákona přestane se planeta pohybovat po uzavřené elipse a její perihelium se začne posouvat. Nejvýraznější je tento posun u Merkuru, činí 5 600" za století. Z větší části je způsoben poruchami se strany dalších planet a nesféričností Slunce, ale hodnotu 43" za století se před objevem OTR nedařilo vysvětlit. Ze Schwarzschildova řešení dostáváme pro tento posun

$$\delta\phi \;=\; \frac{6\pi\kappa m}{c^2a(1-e^2)} \;=\; 42,9''/\mathit{století}\;.(1.37)$$

(a je velká poloosa, e excentricita dráhy Merkuru). U Venuše činí toto relativistické posunutí 8,6", u Země 3,8" za století, ale u některých hmotných hvězd je tento jev mnohem patrnější (např. posun periastra u pulsaru PSR 1913+16 činí $4,2^o$ za rok).

Dalším důsledkem OTR je ohyb světelných paprsků procházejících v blízkosti velmi hmotného tělesa. Pro Slunce dostáváme teoretickou hodnotu

$$\delta \;=\; \frac{4\kappa M}{Rc^2} \;=\; 1.75''\;. \tag{1.38}$$

Tento efekt je možno ověřovat při zatmění Slunce, kdy se hvězdy ležící v těsné blízkosti zakrytého slunečního kotouče jeví posunuty ze svých obvyklých poloh. Památné měření Eddingtonovy výpravy v roce 1919 zjistilo hodnotu $1.98 \pm 0.12''$. Existuje celá řada dalších testů OTR, jako gravitační rudý posuv spektrálních čar pozorovatelný i v zemském gravitačním poli, gravitační dilatace času, zpoždění světelného signálu v gravitačním poli (radiový signál odražený od Venuše a procházející v blízkosti Slunce), ovlivnění gravitace rotací (Jupiter), ovlivnění precese setrvačníků aj. Významným důkazem by byl objev gravitačních vln, o nějž se, zatím bezúspěšně pokoušely výzkumné týmy amerického fyzika J.Webera a ruského V.B.Braginského. Weber se pokoušel detekovat současné rozkmitání těžkých (1.4 t) hliníkových válců vzdálených 1 000 km, Braginský pracoval s monokrystaly safíru a jeho aparatura by dokázala piezoelektricky zaznamenat délkové změny až 10^{-17} cm. Otevřenou otázkou zůstává také existence a vlastností černých děr, i když na ně byly vytypovány velmi vážné kandidátky mezi astronomickými objekty. Fyzika černých děr však vyžaduje vzít v úvahu i zákony kvantové fyziky a kvantová teorie gravitace nebyla dosud vytvořena.

Příklady

1.1 Mion v kosmickém záření byl pozorován, jak v atmosféře urazil od svého vzniku do rozpadu 5 km rychlostí 0,99c. Jakou dobu existoval v naší pozorovací soustavě, jakou dobu ve vlastní klidové soustavě a jak silná vrstva atmosféry prošla kolem něho ve vlastní soustavě?

$[1,67.10^{-5}\mathrm{s},\ 2,33.10^{-6}\mathrm{s},\ 0,7\mathrm{km}]$

1.2 V kosmickém záření se vyskytují protony o energii 10^{10}GeV. Za jak dlouho proletí naší Galaxií v naší vztažné soustavě a ve své vlastní?

[10^5let, 5min!]

1.3 Z kosmické lodi pohybující se vzhleden k Zemi rychlostí 0,8c byla ve směru jejího pohybu vypuštěna raketa rychlostí 0,6c vzhledem k lodi. Vlastní délka rakety je 10 m. Jaká je délka této rakety s hlediska pozorovatele v lodi a s hlediska pozorovatele na Zemi?

[8 m, 3,24 m]

1.4 Fyzik hazardér, který přejel autem křižovatku na červenou a byl zastaven policistou se hájil tím, že v důsledku Dopplerova jevu viděl místo červené zelenou. Fyzikálně vzdělaný policista ho však stejně pokutoval, a to za nedovolenou rychlost. Určete tuto rychlost za předpokladu, že červené odpovídá spektrální čára $\lambda_0 = 700$nm a zelené $\lambda = 550$nm.

[71 000 km.s^{-1}]

1.5 Těleso se vzhledem k dané vztažné soustavě pohybuje rychlostí $0,8c$. Určete poměr mezi jeho hustotou v této soustavě a hustotou klidovou.

[2,78]

1.6 Kosmonaut na Měsíci pozoruje dvě kosmické lodi blížící se k němu z opačných stran rychlostmi 0,8c a 0,9c. Jaká je rychlost jedné z lodí měřená z paluby druhé?

[0,988c]

1.7 Určete rychlost a dráhu relativistické částice, na níž působí konstantní síla F. Porovnejte s rovnoměrně zrychleným pohybem v nerelativistické fyzice a ukažte, že rychlost částice nepřekročí c.

$$[a = \frac{F}{m} = \text{konst}, \ u = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}, \ x = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right), \ \text{při } t \to \infty, u \to c]$$

1.8 Urychlovač dodává protonům energii $E = 500$GeV. Jaké rychlosti dosahují ? (Klidová energie protonu je $E_0 = 0,938$GeV)

$$[v = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E^2}}\, c = 0,999998c]$$

1.9 Jak velkou práci je třeba vynaložit na zvýšení rychlosti elektronu z $1,2.10^8$m.s^{-1} na $2,4.10^8$m.s^{-1} podle nerelativistické a relativistické mechaniky? (Klidová energie elektronu je 0,511 MeV)

[0,122 MeV, 0,296 MeV]

1.10 Mezon π^- (klidová energie 139,6 MeV) se rozpadá z klidu na mion μ^- (klidová energie 105,7 MeV) a antineutrino $\tilde{\nu}$. Určete energii mionu a antineutrina a uvolněnou kinetickou energii.

[109,8 MeV, 29,8 MeV, 33,9 MeV]

1.11 Určete vazebnou energii částice α v MeV, jsou-li klidové hmotnosti protonu, neutronu a částice α $m_p = 1,672\,65.10^{-27}$ kg, $m_n = 1,674\,95.10^{-27}$kg, $m_\alpha = 6,644.10^{-27}$kg.

[28,3 MeV]

1.12 Energie slunečního záření, které dopadá za jednotku času na čtvereční metr na hranici zemské atmosféry, představuje takzvanou *sluneční konstantu* $K = 1\ 327\ \mathrm{W.m^{-2}}$, střední vzdálenost Země od Slunce je $1{,}5.10^{11}$m. Zdrojem sluneční energie je tzv. vodíkový cyklus, při němž se vždy čtyři jádra vodíku (protony) o relativní atomové hmotnosti 1,008 mění na jedno jádro helia (4,0039). Určete úbytek hmotnosti Slunce a množství spáleného vodíku za sekundu. Odhadněte dobu během níž by se spálilo množství vodíku odpovídající dnešní hmotnosti Slunce 2.10^{30}kg.

$[4,2.10^{6}\mathrm{t.s^{-1}},\ \ 5,9.10^{8}\mathrm{t.s^{-1}},\ \ 10^{11}\mathrm{let}]$