M A T E M A T I C K Ý   A P A R Á T

1. Skalární a vektorová pole

Ve fyzice nastává často potřeba přiřadit jednotlivým bodům prostoru skalární či vektorovou veličinu. Mluvíme pak o skalárním či vektorovém poli. *Skalární pole* přiřazuje každému bodu v určité oblasti prostoru jednoznačně reálné číslo; může tedy být popsáno pomocí funkce prostorových souřadnic. V kartézské soustavě souřadnic můžeme polohu každého bodu v prostoru vyjádřit jeho polohovým vektorem (nepěkně "rádiusvektorem") $\vec{r}$ o souřadnicích $x,\ y,\ z$, tedy $\vec{r}\ \equiv\ (x,y,z)$. Dané skalární pole pak můžeme vyjádřit jako funkci vektoru $\vec{r}$ nebo jako funkci tří proměnných $x,\ y,\ z$

$$f\ =\ f(\vec{r})\ =\ f(x,y,z). \tag{M.1}$$

Podobně *vektorové pole* může být popsáno vektorovou funkcí $\vec{F}$. Ta představuje uspořádanou trojici skalárních funkcí prostorových souřadnic:

$$\vec{F}(\vec{r})\ =\ [F_x(x,y,z),\ F_y(x,y,z),\ F_x(x,y,z)]. \tag{M.2}$$

Skalární a vektorová pole, která nezávisí explicitně na čase se nazývají *stacionární*. Obecná pole mohou být ovšem časově závislá. Taková pole $f(x,y,z,t),\ \vec{F}(x,y,z,t)$, která jsou funkcemi tří prostorových a jedné časové souřadnice se nazývají *nestacionární*.

Protože skalární a vektorová pole jsou popsána funkcemi více proměnných, můžeme je parciálně derivovat. Pro skalární pole můžeme vytvořit tři první parciální derivace, pro vektorové pole devět prvních parciálních derivací; dále můžeme počítat parciální derivace druhého a vyšších řádů. Vždy budeme předpokládat, že uvažované funkce jsou dostatečně hladké a že tyto derivace existují.

Často je třeba vyšetřovat vlastnosti daného pole na určité křivce. Pak lze zavést pojem *směrové derivace*. Probíhá-li bod A po nějaké křivce, může být jeho poloha určena délkou oblouku s měřeného od pevného referenčního bodu A_0 na této křivce (viz obr. M 1.).

Souřadnice polohového vektoru $\vec{r}$ můžeme vyjádřit pomocí parametru s jako $x\ =\ x(s),\ y\ =\ y(s),\ z\ =\ z(s)$. Jestliže polohový vektor svírá s osami souřadnic úhly α,β,γ, platí $\cos\alpha\ =\ \frac{x}{r},\ \cos\beta\ =\ \frac{y}{r},\ \cos\gamma\ =\ \frac{z}{r}$, přičemž pro směrové kosiny platí $\cos^2\alpha\ +\ \cos^2\beta\ +\ \cos^2\gamma\ =\ 1$.

Sledujme nyní situaci, kdy se bod A neomezeně přibližuje po dané křivce k bodu A_0. Polohový vektor $\vec{r}$ přejde v diferenciálně malý vektor $d\vec{r}\ =\ (dx,dy,dz)$ a bude mít směr tečny ke křivce v bodě A_0 a velikost ds. Jednotkový tečný vektor $\vec{t}$ v bodě A je pak možno vyjádřit derivacemi souřadnic podle parametru s:

$$\vec{t}\ =\ \left(\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right)\ =\ (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma). \tag{M.3}$$

Získaný výsledek není ovlivněn volbou referenčního bodu. Přechod k jinému počátku A_0' by znamenal přičíst konstantní vektor spojující oba počátky; ten však po derivování podle parametru s dá nulový vektor.

Mějme nyní skalární pole $f(x,y,z)$. Toto pole na křivce můžeme vyjádřit složenou funkcí $f[x(s),y(s),z(s)]$ jedné proměnné s. Podle pravidel pro derivování složené funkce více proměnných dostáváme

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{t}}\ =\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds}\ +\ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}\ +\ \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}\ =\ \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha\ +\ \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\ +\ \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{M.4}$$

Tento výraz představuje derivaci skalárního pole f ve směru daném jednotkovým vektorem $\vec{t}$. Je přitom jedno po jaké křivce se bod A přibližuje k bodu A_0 v němž derivaci určujeme, pokud všechny tyto křivky mají týž tečný vektor. Směrová derivace je tedy lokální charakteristika pole v daném bodě závislá pouze na zvoleném směru.

obr. M 1.

Také vektorová pole mohou záviset na parametru, například na čase nebo délce křivky. Derivace vektoru podle skalárního parametru je definována obdobně jako derivace skalární funkce

$$\frac{d\vec{F}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{F}(s + \Delta s) - \vec{F}(s)}{\Delta s}. \tag{M.5}$$

Vzhledem ke způsobu odečítání vektorů se snadno přesvědčíme, že takto definovaná derivace vektoru představuje vektor tvořený derivacemi souřadnic vektoru:

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \left(\frac{dF_x}{ds}, \frac{dF_y}{ds}, \frac{dF_z}{ds} \right). \tag{M.6}$$

Pro derivování součtů a součinů vektorových funkcí (skalárního, vektorového, součinu vektorové a skalární funkce) platí táž pravidla jako při derivování skalárních funkcí; u vektorového součinu musíme ovšem dodržet pořadí derivovaných funkcí.

Speciálně, má-li vektor $\vec{F}$ při změně parametru konstantní velikost a proměnný směr, platí $\vec{F}' \perp \vec{F}$. Zderivováním $F^2 = \vec{F} \cdot \vec{F} =$ konst totiž dostaneme $2\vec{F}' \cdot \vec{F} = 0$.

2. Gradient skalárního pole

Směrovou derivaci daného skalárního pole $f(x, y, z)$ (M.4) můžeme vyjádřit jako skalární součin vektoru

$$\text{grad } f \equiv \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \tag{M.7}$$

nazývaného *gradientem skalárního pole* $f(x, y, z)$ a jednotkového vektoru $\vec{t}$ v daném směru. Přitom jsme zavedli diferenciální operátor

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

obr. M 2.

obr. M 3.

nazývaný "operátor nabla".[1] Můžeme jej považovat za formální vektor, který násoben (zprava) skalárním polem f vyjadřuje gradient tohoto pole. Určíme geometrický význam gradientu skalárního pole.

Množina bodů s konstantní hodnotou veličiny f, která je určena rovnicí $f(x,y,z) = \text{konst}$, se nazývá *ekvipotenciální plochou* daného pole. Jedna z těchto ploch bude procházet i bodem A_0. V tomto bodě lze pak vztyčit normálu k ekvipotenciální ploše a stanovit jednotkový normálový vektor $\vec{n}$. Skalární pole nám tak v každém bodě definuje určitý význačný směr. Je snadné se přesvědčit (viz obr. M 2.), že směr normály k ekvipotenciální ploše je zároveň směrem největší změny (největšího zhuštění) ekvipotenciálních ploch. V normálovém směru protne totiž jednotkový vektor největší množství těchto ploch. V dvojrozměrném případě zemského povrchu můžeme za skalární pole považovat například pole výšek, ekvipotenciálním plochám pak odpovídají vrstevnice a normála k nim udává směr maximálního stoupání.

Zvolme na okamžik souřadnou osu z' ve směru normály $\vec{n}$ a druhé dvě osy x', y' k ní kolmé (obr. M 3.). Současně mějme libovolný směr daný jednotkovým vektorem $\vec{t'} \equiv (\cos\alpha',\ \cos\beta',\ \cos\gamma')$. Derivace v tomto směru bude analogicky (M.4)

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x'}\cos\alpha' + \frac{\partial f}{\partial y'}\cos\beta' + \frac{\partial f}{\partial z'}\cos\gamma'. \tag{M.8}$$

[1]Exotický název nabla je odvozen od názvu fénického hudebního nástroje příbuzného loutně, jemuž se tvarem podobá.

Osy x' a y' jsou však tečnami ke křivkám, které leží v ekvipotenciální ploše, a proto $\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$. Vztah (M.8) se tak redukuje na

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial z'} \cos \gamma'.$$

Maximální hodnotu nabývá tedy derivace ve směru z', kdy $\cos \gamma' = 1$. Derivace v daném obecném směru je projekcí derivace ve směru normály k ekvipotenciální ploše (brané jako vektor) do tohoto směru. Odtud zejména plyne že parciální derivace $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ jsou souřadnicemi vektoru o velikosti této maximální směrové derivace.

V souladu s výrazem (M.7) můžeme tedy zavést tuto definici: *Gradient skalárního pole f v daném bodě je vektor o velikosti derivace ve směru normály k ekvipotenciální ploše a má směr této normály*:

$$\text{grad}\, f = \nabla f = \left(\frac{d\,f}{ds} \right)_{\vec{n}} \vec{n}_0. \tag{M.9}$$

Je zřejmé, že vektor gradientu míří vždy směrem vzrůstu funkce f.

Operace gradientu přiřazuje skalárnímu poli f jednoznačně vektorové pole $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \nabla f.$$

Říkáme, že f je skalárním potenciálem pole $\vec{F}$. Zpětné přiřazení již jednoznačné není; pole f a $f + c$, kde c je konstantní skalární pole, mají týž gradient. Gradient je možno vytvořit ke každému skalárnímu poli (pokud příslušné parciální derivace existují). Naproti tomu ne každé vektorové pole je možno vyjádřit jako gradient pole skalárního. Ta, u nichž to možné je, nazýváme pole *potenciální*.

Pro počítání s gradienty platí tato zřejmá pravidla:

$$\nabla c = 0, \quad \nabla(cf) = c\,\nabla f, \quad \nabla(f_1 + f_2) = \nabla f_1 + \nabla f_2, \quad \nabla(f_1\, f_2) = f_1\,\nabla f_2 + f_2\,\nabla f_1. \tag{M.10}$$

3. Divergence vektorového pole

Mějme vektorové pole $\vec{F}(x, y, z)$. Definujeme *tok pole* $\vec{F}$ plochou S jako plošný integrál

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}\,.$$

Zde dS je diferenciální element plochy, jemuž jsme přiřadili směr vektoru normály. Tuto normálu je ovšem třeba orientovat; můžeme to udělat například tak, že stanovíme směr pohybu po obvodu plošky dS a použijeme pravidla pravotočivého šroubu (obr. M 4). Jde-li o tok *uzavřenou plochou* S, která ohraničuje objem V, budeme považovat za kladný směr normály ten, který směřuje ven z objemu V, a tok budeme označovat

$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}\,.$$

Rozdělíme nyní objem V přepážkami na N menších objemů V_i. Určíme toky pole Φ_i plochami S_i ohraničujícími tyto dílčí objemy a budeme je sčítat. Ukazuje se, že toky dílčími přepážkami se v tomto součtu vzájemně vyruší. Při sčítání toků hraniční plochou dvou sousedních objemů objeví se totiž vždy dvakrát, jednou s kladným a jednou se záporným znaménkem (viz obr. M 5.). Sumární tok bude proto roven právě původnímu toku plochou S:

obr. M 4. obr. M 5.

$$\sum_{i=1}^{N} \Phi_i \;=\; \sum_{i=1}^{N} \oint_{S_i} \vec{F_i} \cdot d\vec{S_i} \;=\; \Phi \;. \qquad \text{(M.11)}$$

Zmenšujeme-li objemy V_i, zůstává jejich součet V konstantní; totéž platí pro toky Φ_i. Nabízí se tedy možnost vytvořit podíl těchto dvou neomezeně se zmenšujících veličin a zkoumat vlastnosti jeho limity.

Zvolíme v prostoru bod A o souřadnicích x, y, z a obklopíme jej malým objemem ΔV. Tok plochou ohraničující tento objem označíme $\Delta\Phi$. Budeme nyní dělit tento objem na stále menší části libovolným způsobem a vyčleníme posloupnost těchto částí ΔV_i, které stále obsahují bod A .Označíme

$$\mathrm{div}\, \vec{F} \;=\; \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\Delta\Phi_i}{\Delta V_i}. \qquad \text{(M.12)}$$

Pokud limita na pravé straně (M.12) existuje a nezávisí na způsobu dělení objemu ΔV, představuje nám tok pole $\vec{F}$ v bodě A vztažený k jednotce objemu a nazýváme jej *divergencí pole* $\vec{F}$ v bodě A .

Vraťme se nyní k objemu V ohraničenému plochou S a upravme vztah (M.11) takto:

$$\Phi \;=\; \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \;=\; \sum_{i=1}^{N} \Delta\Phi_i \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta\Phi_i}{\Delta V_i} \Delta V_i \;. \qquad \text{(M.13)}$$

Pokračujme přitom v neomezeném dělení dílčích objemů ΔV_i dalšími přepážkami a sledujme posloupnost neomezeně se zmenšujících objemů, které se stahují kolem bodu A. V limitě přejde tedy podíl $\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta V_i}$ v divergenci $\mathrm{div}\vec{F}$ a sumu na pravé straně (M.13) můžeme nahradit integrálem přes objem V:

$$\oint_S \vec{F} \;\cdot\; d\vec{S} \;=\; \int_V \mathrm{div}\vec{F}\; dV \;. \qquad \text{(M.14)}$$

Tok vektorového pole uzavřenou plochou je roven celkové divergenci v objemu uzavřeném touto plochou. Vztah (M.14) umožňuje přejít od objemového integrálu k plošnému integrálu přes ohraničující plochu a nazývá se *Gaussovou větou.*

Obecná definice divergence (M.12) má tu přednost, že nezávisí na druhu použitých souřadnic a dává pojmu divergence názorný geometrický smysl. Vyjádříme nyní divergenci v kartézských souřadnicích podle obr. M 6.

Uvažujme elementární objem ve tvaru kvádru o hranách Δx, Δy, Δz rovnoběžných s příslušnými kartézskými osami. Nechť jeho levý dolní zadní vrchol má souřadnice x, y, z. Tok dvojicí rovnoběžných podstav tohoto kvádru (například horní a dolní) bude

$$\Delta\Phi_{12} \;=\; \Delta\Phi_2 \;+\; \Delta\Phi_1 \;=\; F_z(x,y,z+\Delta z)\Delta x\Delta y \;-\; F_z(x,y,z)\Delta x\Delta y \;=\; \frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z \;.$$

obr. M 6.

Celkový tok povrchem kvádru

$$\Delta\Phi \;=\; \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \;+\; \frac{\partial F_y}{\partial y} \;+\; \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\Delta V, \qquad \Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z;.$$

Podle definice divergence máme tedy

$$\mathrm{div}\,\vec{F} \;=\; \frac{\partial F_x}{\partial x} \;+\; \frac{\partial F_y}{\partial y} \;+\; \frac{\partial F_z}{\partial z} \;=\; \nabla \cdot \vec{F}\;. \tag{M.15}$$

Operátor nabla umožňuje vyjádřit divergenci vektorového pole kompaktním způsobem jako skalární součin tohoto operátoru a vektoru pole; pořadí obou těchto symbolů nelze ovšem zaměnit. Volba elementárního objemu ve tvaru kvádru neomezuje obecnost, neboť objem libovolného tvaru můžeme z takových malých kvádrů sestavit. Toky přepážkami mezi nimi se přitom vyruší.

Operace divergence přiřazuje vektorovému poli $\vec{F}$ jednoznačně skalární pole f:

$$f \;=\; \mathrm{div}\,\vec{F}\;.$$

Zpětné přiřazení již jednoznačné není: pole $\vec{F}$ a $\vec{F} \;+\; \vec{F}'$, kde $\mathrm{div}\,\vec{F}' = 0$, mají touž divergenci.

Pro počítání s divergencemi platí tato zřejmá pravidla:

$$\nabla\cdot\vec{C} = 0, \quad \nabla\cdot(c\vec{F}) = c\nabla\cdot\vec{F}, \quad \nabla\cdot(\vec{F}_1 \;+\; \vec{F}_2) = \nabla\cdot\vec{F}_1 \;+\; \nabla\cdot\vec{F}_2, \quad \nabla\cdot(f\vec{F}) = f\nabla\cdot\vec{F} \;+\; \vec{F}\cdot\nabla f\;. \tag{M.16}$$

Uvažme zvláštní případ, kdy objem ΔV těsně přimyká z obou stran k nějaké ploše (například ploše nespojitosti pole) a má tvar části vrstvy o zanedbatelné tloušťce
(obr. M 7.).

Tok $\Delta\Phi$ pak bude roven součtu toků normálových složek pole oběma podstavami tohoto objemu:

$$\Delta\Phi \;=\; (F_{1n} \;-\; F_{2n})\,\Delta S\;.$$

Směr normály k ploše jsme zvolili za kladný, míří-li z oblasti 2 do oblasti 1. Provedeme-li úvahu o limitním zmenšování plochy ΔS v okolí bodu A na ploše, můžeme definovat takzvanou *plošnou divergenci* vztahem

obr. M 7.

$$\mathrm{Div}\vec{F} \;=\; F_{1n} \;-\; F_{2n} \;=\; \vec{n} \;\cdot\; (\vec{F}_1 \;-\; \vec{F}_2)\;. \qquad \text{(M.17)}$$

4. Rotace vektorového pole

Mějme vektorové pole $\vec{F}(x, y, z)$. Definujeme *cirkulaci pole* podél uzavřené křivky l jako křivkový integrál

$$\Gamma \;=\; \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l}\;.$$

Zde $d\vec{l}$ je diferenciální vektorový element křivky ve směru tečny. Jeho orientace je dána dohodou o smyslu obcházení křivky, například proti směru hodinových ručiček. Uzavřená křivka l tvoří hranici plochy S; tato plocha není ovšem určena jednoznačně (na rozdíl od objemu V uvnitř uzavřené plochy). Na ploše obehnané křivkou l můžeme opět vést dělicí křivky, vytvářet soustavu dílčích ploch, počítat cirkulace podél jejich hranic a sčítat je. Ukazuje se, že příspěvky k cirkulacím podél společných hranic dvou sousedních ploch se vzájemně vyruší. Zachováme-li totiž jednotný smysl obcházení křivek, budeme takovou společnou hranici obcházet vždy v opačném směru (viz obr. M 8.).

Sumární cirkulace bude tedy rovna právě původní cirkulaci podél křivky l:

$$\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \;=\; \sum_{i=1}^{N} \oint_{l_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{l}_i \;=\; \Gamma\;. \qquad \text{(M.18)}$$

Zvolíme v prostoru bod A o souřadnicích x, y, z, vedeme tímto bodem rovinu libovolné orientace a vymezíme v této rovině uzavřenou křivku malých rozměrů obklopující bod A. Plochu omezenou touto křivkou označíme ΔS, cirkulaci podél této křivky $\Delta\Gamma$. Budeme nyní dělit tuto plošku na menší části a vyčleníme posloupnost plošek obsahujících bod A. Budeme uvažovat limitu

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\Delta \Gamma_i}{\Delta S_i}\;,$$

obr. M 8.

pokud taková limita existuje a nezávisí na způsobu dělení plošky ΔS. Tato limita bude však přesto závislá na volbě orientace roviny procházející bodem A neboli na směru normály k elementární plošce, na jejíž hranici cirkulaci určujeme. Můžeme tedy (podobně jako u definice gradientu) považovat tuto limitu za projekci určitého vektoru do směru normály k plošce:

$$(\mathrm{rot}\ \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\Delta \Gamma_i}{\Delta S_i} . \tag{M.19}$$

Projekce vektoru rot $\vec{F}$ do daného směru představuje tedy poměr cirkulace pole po obvodu malé kolmé plošky k velikosti této plošky. Vektor rot $\vec{F}$ nazýváme *rotací pole* $\vec{F}$ v bodě A[2].

Vraťme se nyní k obecné uzavřené křivce l obepínající plochu S. Upravíme vztah (M.18) na

$$\Gamma = \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} \Delta\Gamma_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta\Gamma_i}{\Delta S_i} \Delta S_i . \tag{M.20}$$

Pro každý bod A na ploše S můžeme vytvořit posloupnost neomezeně se zmenšujících dílčích plošek tento bod stále obsahujících. V limitě přejde tedy podíl $\frac{\Delta\Gamma_i}{\Delta S_i}$ v rot $\vec{F}$. $\vec{n}$ a sumu na pravé straně (M.20) můžeme nahradit integrálem přes celou plochu S:

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\ \vec{F} \cdot d\vec{S} . \tag{M.21}$$

Cirkulace vektorového pole podél uzavřené křivky je rovna celkovému toku rotace pole libovolnou plochou, pro níž křivka l představuje hranici. Vztah (M.21) umožňuje přejít od plošného integrálu ke křivkovému integrálu podél hranice a nazývá se *Stokesovou větou.*

Obecná definice rotace (M.19) má tu přednost, že nezávisí na druhu použitých souřadnic a dává pojmu rotace názorný geometrický smysl. Vyjádříme nyní rotaci v kartézských souřadnicích podle obr. M 9.

Uvažujme elementární plošku ve tvaru obdélníka o stranách Δx, Δy rovnoběžných s příslušnými kartézskými osami. Nechť jeho levý zadní vrchol má souřadnice x, y, z. Příspěvek k cirkulaci podél dvojice rovnoběžných stran (například levé a pravé) bude

$$\Delta\Gamma_{12} = \Delta\Gamma_1 + \Delta\Gamma_2 = F_x(x,y,z)\,\Delta x - F_x(x, y+\Delta y, z)\,\Delta x = -\frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta x \Delta y .$$

Celková cirkulace podél obvodu obdélníka

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta S, \qquad \Delta S = \Delta x \Delta y,$$

[2] V anglosaské literatuře se užívá pro rotaci názvu a označení curl $\vec{F}$. Poznamenejme ještě, že rotaci lze zavést též stejným limitním pochodem jako u divergence, a to vztahem

$$\mathrm{rot}\ \vec{F} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\Delta \vec{G}_i}{\Delta V_i}, \qquad \text{kde } \vec{G} = \oint_S d\vec{S} \times \vec{F} .$$

obr. M 9.

a tedy

$$\mathrm{rot}\ \vec{F} \ = \ \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} \ - \ \frac{\partial F_y}{\partial z}, \ \frac{\partial F_x}{\partial z} \ - \ \frac{\partial F_z}{\partial x}, \ \frac{\partial F_y}{\partial x} \ - \ \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \ = \ \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \ = \ \nabla \ \times \ \vec{F} \ . \qquad \text{(M.22)}$$

Operátor nabla umožňuje vyjádřit rotaci vektorového pole kompaktním způsobem jako vektorový součin tohoto operátoru a vektoru pole; pořadí obou těchto symbolů nelze ovšem měnit. Volba elementární plošky ve tvaru obdélníka opět neomezuje obecnost výsledku.

Operace rotace přiřazuje vektorovému poli $\vec{F}$ jednoznačně jiné vektorové pole $\vec{G}$:

$$\vec{G} \ = \ \mathrm{rot}\ \vec{F} \ .$$

Zpětné přiřazení již není jednoznačné; pole $\vec{F}$ a $\vec{F} \ + \ \vec{F}'$, kde rot $\vec{F}' \ = 0$, mají touž rotaci.

Pro počítání s rotacemi platí tato zřejmá pravidla:

$$\nabla\times\vec{C} = \vec{0}, \ \nabla\times(c\vec{F}) = c\nabla\times\vec{F}, \ \nabla\times(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \nabla\times\vec{F}_1 + \nabla\times\vec{F}_2, \ \nabla\times(f\vec{F}) = f\nabla\times\vec{F} + \nabla f\times\vec{F} \ . \qquad \text{(M.23)}$$

Uvažme zvláštní případ, kdy elementární křivka l těsně přimyká z obou stran k nějaké ploše (například ploše nespojitosti pole), takže její úseky ve směru kolmém k této ploše jsou zanedbatelně krátké (obr. M 10.).

Cirkulace bude pak rovna součtu integrálů podél obou tečných větví:

$$\Delta\Gamma \ = \ (F_{1t} \ - \ F_{2t})\ \Delta l \ .$$

Provedeme-li úvahu o limitním zkracování větví Δl v okolí bodu A na ploše, můžeme definovat takzvanou *plošnou rotaci* vztahem

$$\mathrm{Rot}\ \vec{F} \ = \ \vec{n} \times (\vec{F}_1 \ - \ \vec{F}_2), \qquad |\mathrm{Rot}\ \vec{F}| \ = \ F_{1t} \ - \ F_{2t} \ . \qquad \text{(M.24)}$$

obr. M 10.

5. Operátory $(\vec{a}\nabla)$ a Δ

Položme si otázku, jak vyjádřit divergenci a rotaci vektorového součinu nebo gradient skalárního součinu dvou vektorových polí. K tomu účelu zavedeme další operátor $(\vec{a}\nabla)$ předpisem

$$(\vec{a}\nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} \; + \; a_y \frac{\partial}{\partial y} \; + \; a_z \frac{\partial}{\partial z} \; . \qquad \text{(M.25)}$$

Tento *operátor "a-grad"* může působit jak na skalární, tak na vektorová pole:

$$(\vec{a}\nabla) f = a_x \frac{\partial f}{\partial x} \; + \; a_y \frac{\partial f}{\partial y} \; + \; a_z \frac{\partial f}{\partial z} = \vec{a} \cdot \nabla f \; , \qquad \text{(M.26)}$$

$$(\vec{a}\nabla) \vec{F} = a_x \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \; + \; a_y \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \; + \; a_z \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = \left(a_x \frac{\partial F_x}{\partial x} \; + \; a_y \frac{\partial F_x}{\partial y} \; + \; a_z \frac{\partial F_x}{\partial z}, \ldots \right) \; . \qquad \text{(M.27)}$$

Bude-li $\vec{s}$ jednotkový vektor, potom výraz $(\vec{s}\nabla) f$ je projekcí gradientu skalárního pole f do směru $\vec{s}$, a je tedy totožný s derivací pole v tomto směru. Podobně bychom mohli interpretovat výraz $(\vec{s}\nabla)\vec{F}$ jako derivaci vektorového pole ve směru $\vec{s}$.

Nyní můžeme vyjádřit divergenci a rotaci vektorového součinu a gradient skalárního součinu dvou vektorových polí:

$$\mathrm{div}\,(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) \equiv \nabla \cdot (\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot (\nabla \times \vec{F}_1) \; - \; \vec{F}_1 \cdot (\nabla \times \vec{F}_2) \; , \qquad \text{(M.28)}$$

$$\mathrm{rot}\,(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) \equiv \nabla \times (\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = (\vec{F}_2 \nabla)\vec{F}_1 \; - \; (\vec{F}_1 \nabla)\vec{F}_2 \; + \; \vec{F}_1 \nabla \cdot \vec{F}_2 \; - \; \vec{F}_2 \nabla \cdot \vec{F}_1 \; , \qquad \text{(M.29)}$$

$$\mathrm{grad}(\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2) \equiv \nabla(\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2) = (\vec{F}_1 \nabla)\vec{F}_2 \; + \; (\vec{F}_2 \nabla)\vec{F}_1 \; + \; \vec{F}_1 \times (\nabla \times \vec{F}_2) \; + \; \vec{F}_2 \times (\nabla \times \vec{F}_1) \; . \qquad \text{(M.30)}$$

O platnosti těchto poněkud komplikovanějších, avšak velmi užitečných vzorců se můžeme přesvědčit alespoň rozepsáním příslušných výrazů v kartézských souřadnicích.

Uvědomíme-li si, že operátory div a rot mohou působit pouze na vektorová pole a operátor grad pouze na skalární pole, můžeme z těchto operátorů sestavit pět kombinací operátorů druhého řádu: rot grad, div

rot, div grad, grad div a rot rot. Vyjádřením v kartézských souřadnicích se snadno přesvědčíme, že vždy platí rot grad $f = 0$ a
div rot $\vec{F} = 0$. Hlubší význam těchto vztahů bude objasněn v následujícím odstavci.

Operátor div grad $\equiv \Delta$ nazýváme *Laplaceovým operátorem* a formálně odpovídá čtverci operátoru nabla:

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \ .$$

V kartézských souřadnicích má zřejmě tvar

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ . \qquad \text{(M.31)}$$

Laplaceův operátor podobně jako operátor $(\vec{a}\nabla)$ může působit jak na skalární tak na vektorová pole.

Pro dvojnásobnou operaci rotace platí vztah

$$\text{rot rot}\vec{F} = \text{grad div}\vec{F} - \Delta\vec{F} \ ; \qquad \text{(M.32)}$$

neboli

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \Delta\vec{F} \ ,$$

který je obdobou vektorové identity "bac - cab".

6. Vektorová pole potenciální a solenoidální

Vektorové pole, které je možno vyjádřit jako gradient nějakého skalárního pole

$$\vec{F} = \text{grad}f = \nabla f \ , \qquad \text{(M.33)}$$

se nazývá *potenciálním* (bezvírovým, zdrojovým). Uvažme křivkový integrál $\int_A^B \vec{F}.d\vec{l}$ po nějaké křivce mezi body A a B. Je-li $\vec{F}$ silové pole, pak tento integrál představuje práci vykonanou silou po této dráze. Dosadíme-li za $\vec{F}$ (M.33),můžeme skalární součin v integrálu upravit na

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = \text{grad}f \cdot d\vec{l} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df \ .$$

Tento výraz představuje totální diferenciál funkce $f(x, y, z)$ a křivkový integrál je možno vypočítat jako rozdíl hodnot funkce f v koncových bodech:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B df = f(B) - f(A) \ . \qquad \text{(M.34)}$$

Odtud zejména plyne, že výsledek nezávisí na volbě dráhy mezi body A a B (viz obr. M 11.).

Protože při zpětné integraci od B do A se mění pouze znaménko integrálu, zjišťujeme,že cirkulace potenciálního pole podél uzavřené křivky je vždy rovna nule:

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_l \text{grad}f \cdot d\vec{l} = 0 \ . \qquad \text{(M.35)}$$

Ze Stokesovy věty (M.21) plyne

$$\oint_l \text{grad}f \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot grad}f) \cdot d\vec{S} = 0 \ .$$

Vzhledem k tomu, že volba plochy S o hranici l je zcela libovolná, musí v celém prostoru platit

obr. M 11.

obr. M 12.

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot grad} f = 0 \ . \tag{M.36}$$

To je nutná a postačující podmínka k tomu, aby pole $\vec{F}$ bylo potenciální. Z podmínky rot $\vec{F} = 0$ plyne i fyzikální představa o potenciálním poli. Siločáry takového pole nesmějí vytvářet víry, uzavírat se samy do sebe.

Vektorové pole, které je možno vyjádřit jako rotaci nějakého jiného vektorového pole

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{G} = \nabla \times \vec{G} \ , \tag{M.37}$$

se nazývá *solenoidálním* (bezzdrojovým, vírovým). Vytvoříme uzavřenou plochu S tak, že budeme uvažovat dvě různé plochy S_1, S_2 o společné hranici l (obr. M 12.).

Podle Stokesovy věty tok solenoidálního pole uzavřenou plochou $S = S_1 + S_2$ bude nulový:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_S \text{rot}\vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \text{rot}\vec{G} \cdot d\vec{S}_1 \ - \int_{S_2} \text{rot}\vec{G} \cdot d\vec{S}_2 = \oint_l \vec{G} \cdot d\vec{l} \ - \oint_l \vec{G} \cdot d\vec{l} = 0 \ . \tag{M.38}$$

Použijeme-li Gaussovu větu, dostaneme

$$\oint_S \text{rot } \vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div rot } \vec{G} dV = 0 \ . \tag{M.39}$$

obr. M 13.

Vzhledem k tomu, že plochu S a objem V je možno volit zcela libovolně, musí v celém prostoru platit

$$\mathrm{div}\ \vec{F} = \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ \vec{G} = 0 \qquad \text{(M.40)}$$

To je nutná a postačující podmínka k tomu, aby pole F bylo solenoidální. Z podmínky $\mathrm{div}\ \vec{F} = 0$ plyne i fyzikální představa o solenoidálním poli. Siločáry takového pole nesmějí mít nikde v prostoru zdroje (v kladném nebo záporném smyslu).

Obecné vektorové pole samozřejmě nemusí být ani potenciální ani solenoidální a může mít nenulovou divergenci i rotaci. Lze však dokázat, že každé vektorové pole, které dostatečně rychle klesá v nekonečnu, může být jednoznačným způsobem rozloženo na součet potenciálního a solenoidálního pole. Na obr. M 13. je orientačně znázorněn charakter průběhu siločar potenciálního pole s kladnou a zápornou divergencí a pole solenoidálního.

7. Některé integrální věty vektorové analýzy

Upravíme Gaussovu větu (M.14) tak, že položíme $\vec{F} = f_1 \mathrm{grad} f_2$ a použijeme vztahů (M.16). Tak dostaneme *první Greenovu větu*:

$$\oint_S f_1 \mathrm{grad} f_2 \cdot d\vec{S} = \int_V (f_1 \Delta f_2 \ + \ \mathrm{grad} f_1 \mathrm{grad} f_2) dV \ . \qquad \text{(M.41)}$$

Z ní snadnými úpravami vyplyne *druhá Greenova věta*

$$\oint_S (f_1 \mathrm{grad} f_2 \ - \ f_2 \mathrm{grad} f_1) \cdot d\vec{S} = \int_V (f_1 \Delta f_2 \ - \ f_2 \Delta f_1) dV \qquad \text{(M.42)}$$

a *třetí Greenova věta*

$$\oint_S \mathrm{grad} f \cdot d\vec{S} = \int_V \Delta f dV \ . \qquad \text{(M.43)}$$

Důležité jsou zvláštní případy *zobecněné Gaussovy věty*, kterou bychom mohli formulovat takto: *objemový integrál, v němž operátor nabla působí nějakým způsobem na následující vektorová a skalární pole, se rovná příslušnému plošnému integrálu, v němž stejným způsobem vystupuje vektor elementu plochy $d\vec{S}$.* Tak máme

$$\int_V \nabla f dV = \oint_S f d\vec{S} \; , \tag{M.44}$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \oint \vec{F} \cdot d\vec{S} \; , \tag{M.45}$$

$$\int_V \nabla \times \vec{F} dV = \oint_S d\vec{S} \times \vec{F} \; . \tag{M.46}$$

Druhá z těchto vět je již známá věta Gaussova. Třetí z nich dokážeme standartním postupem. Vynásobíme integrál na levé straně skalárně konstantním vektorem $\vec{C}$, použijeme výraz pro divergenci vektorového součinu, Gaussovu větu a nakonec opět vektor $\vec{C}$ vykrátíme:

$$\int_V \vec{C} \cdot \mathrm{rot}\vec{F} dV = \int_V \mathrm{div}(\vec{F} \times \vec{C}) dV = \oint_S (\vec{F} \times \vec{C}).d\vec{S} = \oint_S \vec{C} \cdot d\vec{S} \times \vec{F} \; .$$

Analogicky můžeme dokázat i první větu (M.44).

Nakonec uvedeme ještě větu o křivkovém integrálu skalárního pole:

$$\oint_l f d\vec{l} = \int_S d\vec{S} \times \mathrm{grad} f \; . \tag{M.47}$$

Také důkaz této věty lze provést vynásobením pomocným konstantním vektorem $\vec{C}$ a použitím Stokesovy věty.

Příklady

M.1 Sestavte si tabulku hlavních vzorců a vět vektorové analýzy.

M.2 Určete divergenci a rotaci následujících vektorových polí: $\vec{F} = (x+y, -x+y, -2z)$; $\vec{F} = (2y, 2x + 3z, 3y)$; $\vec{F} = (x^2 - z^2, 2, 2xz)$. Je-li $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$, najděte skalární pole f takové, aby $\vec{F} = \mathrm{grad} f$.

$[0,\ (0,0,-2);\ \ 0,\ (0,0,0),\ 2xy - 3zy;\ \ 4x,\ (0,-4z,0)]$

M.3 Určete gradient polí ($\vec{r}$ je radiusvektor, $\vec{c} =$ konst): r; r^2; r^3; $\frac{1}{r}$; $\frac{1}{r^2}$; $\frac{1}{r^3}$; $\vec{c} \cdot \vec{r}$; $\frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r}$; $\frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r^2}$.

$[\frac{\vec{r}}{r};\ 2\vec{r};\ 3r\vec{r};\ -\frac{\vec{r}}{r^3};\ -\frac{2\vec{r}}{r^4};\ -\frac{3\vec{r}}{r^5};\ \vec{c};\ \frac{r^2\vec{c}\ -(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^3};\ \frac{r^2\vec{c} - 2(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^4}]$

M.4 Určete divergenci a rotaci polí: $\vec{r}$; $\frac{\vec{r}}{r}$; $\frac{\vec{r}}{r^2}$; $\frac{\vec{r}}{r^3}$; $\frac{\vec{c}}{r}$.

$[3,\ \vec{0};\ \frac{2}{r},\ \vec{0};\ \frac{1}{r^2},\ \vec{0};\ 0,\ \vec{0};\ -\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3},\ \frac{\vec{c}\times\vec{r}}{r^3}]$

M.5 Dokažte věty (M.44) a (M.47).

1. ZÁKLADY TEORIE RELATIVITY

1. Speciální teorie relativity

V poslední čtvrtině devatenáctého století došlo ve fyzice v určitém smyslu ke schizofrenní situaci. Byl dovršen vývoj klasické Newtonovy mechaniky, která našla matematický výraz ve velmi elegantní podobě Lagrangeova a Hamiltonova formalismu vycházejících z obecných variačních principů. Současně se podařilo Maxwellovi matematicky (a možná ještě elegantněji) vyjádřit souhrn všech experimentálních poznatků o elektřině a magnetismu nahromaděných za uplynulá tři století, a to v podobě podivuhodných *Maxwellových rovnic*. Ukázalo se však, že Newtonova mechanika a Maxwellova teorie elektromagnetismu jsou navzájem v hlubokém vnitřním rozporu.

Newtonova mechanika je založena na představě o *absolutním prostoru a čase.* Newton ve svých Principiích říká: "Absolutní, skutečný a matematický čas plyne sám od sebe a díky své povaze rovnoměrně, bez vztahu k nějakému vnějšímu předmětu. Nazývá se též trvání...Absolutní prostor zůstává vzhledem ke své povaze a bez vztahu k vnějšímu předmětu stále stejný a nehybný." Prostor představuje tedy pro fyzikální děje jakési jeviště bez kulis, čas je nezávislý parametr, kterým lze odměřovat trvání výstupů a dějství přírodního dramatu.

Pro takzvaný "zdravý lidský rozum" (dále ZLR) je možná skutečně přijatelné představovat si absolutní prostor a čas. Problém je však v tom, že v absolutním prostoru se není čeho zachytit. Fyzikální děje můžeme popisovat pouze vzhledem k nějaké vztažné soustavě tvořené systémem souřadnic (například kartézských) a s ním spojenými hodinami (umístěnými například v počátku). Systém souřadnic musíme vázat na nějaké tuhé těleso, hodiny musí být tvořeny nějakým reálným systémem, v němž probíhá periodický fyzikální děj.

Mezi vztažnými soustavami vybíráme takovou, v níž působí pouze pravé síly a platí všechny tři Newtonovy pohybové zákony. Pod pravými silami rozumíme ty, u nichž lze vždy ukázat těleso, které je zdrojem této síly. Jde tedy v podstatě o vzájemné působení, *interakci* těles či částic — jedno těleso působí na druhé silou a druhé na první silou opačnou. Nepůsobí-li na těleso pravé síly, bude vůči vztažné soustavě v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Takovou vztažnou soustavu nazýváme *inerciální* (platí v ní zákon setrvačnosti, inercie).

Je samozřejmě otázkou, zda inerciální soustava vůbec existuje; tuto otázku lze však rozhodnout pouze experimentálně. Odpověď proto můžeme znát jen s experimentálně dosažitelnou přesností. Víme, že vztažná soustava spojená se Sluncem a stálicemi je inerciální ve větší míře, než vztažná soustava spojená s povrchem Země. V ještě větší míře bude inerciální soustava spojená se vzdálenými galaxiemi.

Soustavu spojenou se Zemí můžeme považovat za dostatečně inerciální zejména při studiu dějů krátkodobých ve srovnání s periodou zemské rotace. Kdyby se Země otáčela podstatně rychleji, měli bychom s mechanickými pohyby na jejím povrchu zcela jiné zkušenosti. Někdy se setkáváme s názorem, že vášnivé spory mezi zastánci geocentrické a heliocentrické soustavy, přívrženci Ptolemaiovými a Koperníkovými, byly vlastně zbytečné — s hlediska vztažné soustavy spojené se Sluncem obíhá Země kolem Slunce a s hlediska vztažné soustavy spojené se Zemí obíhá Slunce kolem Země. Přesný popis pohybu Slunce a planet s hlediska geocentrické soustavy podal Tycho Brahe; v jeho modelu obíhají planety kolem Slunce a Slunce pak s nimi kolem Země. Tento popis skutečně nelze pomocí astronomických pozorování od modelu Koperníkova odlišit. Přesto však nejsou obě vztažné soustavy zcela rovnocenné. Heliocentrická soustava je inerciálnější a popis pohybu planet v ní jednodušší. Souvisí to s tím, že jde prakticky o soustavu hmotného středu sluneční soustavy.

Jakmile máme k dispozici jednu inerciální soustavu, můžeme získat neomezený počet dalších. Všechny vztažné soustavy, které budou vůči této inerciální vztažné soustavě v rovnoměrném přímočarém pohybu budou rovněž inerciální. Podle *Galileiho principu relativity* probíhají *mechanické* děje ve všech inerciálních vztažných soustavách stejně a pomocí mechanických experimentů nelze tyto soustavy navzájem odlišit. Koresponduje to se známou zkušeností, že v dopravním prostředku, který se pohybuje rovnoměrně a přímočaře bez otřesů nemůžeme zjistit, zda stojí nebo se pohybuje. Galilei to plasticky popisuje ve svém "Dialogu" na příkladu lodní kabiny bez oken, v případě, že se plachetní loď pohybuje slabým větrem rovnoměrně na klidné hladině.

Při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé se v Newtonově mechanice transformují souřadnice podle Galileiho transformací a čas, který představuje nezávisle se měnící parametr, je ve všech soustavách týž. Galileiho transformace jsou v souladu s obecnou zkušeností o skládání rychlostí. Vystřelí-li gangster z jedoucího auta z pušky ve směru jízdy, bude rychlost kulky vzhledem k povrchu zemskému dána součtem rychlostí auta a rychlosti kulky vzhledem k autu.

Newtonovy pohybové rovnice popisující mechanické pohyby jsou vůči Galileiho transformacím invariantní, tj. nemění svůj tvar. Plyne to z toho, že tyto transformace jsou lineární a zrychlení jako druhé derivace souřadnic podle času jsou stejná. Pravé síly závisejí pouze na vzdálenostech, případně na vzájemných rychlostech těles a ty se při přechodu od jedné soustavy k druhé rovněž nemění. Pro dvě inerciální soustavy S a S' tedy platí

$$m'\vec{a}' = \vec{F}' , \qquad m\vec{a} = \vec{F} .$$

Proto také mechanické pohyby probíhají ve všech inerciálních soustavách stejně.

Naproti tomu Maxwellovy rovnice popisující elektromagnetické děje (včetně šíření světla) se při Galileiho transformacích mění. Je však možno najít jiné transformace, vůči nimž zůstávají Maxwellovy rovnice invariantní - jsou to takzvané transformace Lorentzovy. Zdálo se tedy, že jsou dvě fyziky, jedna, která je galileiovsky invariantní a druhá lorentzovsky. Obě jsou přitom potvrzovány experimentálně. Na druhé straně Lorentzovy transformace mají tu vlastnost, že pro pohyby rychlostmi mnohem menšími než je rychlost světla ve vakuu limitně přecházejí v transformace Galileiho.

Mohli bychom tedy předpokládat, že Lorentzovy transformace jsou obecnější a projeví se právě pro pohyby rychlostmi světla nebo blízkými. U běžných mechanických pohybů malými rychlostmi se pak uplatní transformace Galileiho. Je třeba vidět, že nejrychlejší mechanický pohyb, který mohli fyzikové zkoumat, byl pohyb Země na její dráze kolem Slunce probíhající rychlostí $v = 29,7$ km.s^{-1}, tedy zhruba desetitisícinou rychlosti světla.

Z Lorentzových transformací ovšem vyplývají jiná pravidla pro skládání rychlostí, než podle transformací Galileiho. Zejména z nich plyne, že rychlost světla se *nesčítá* s rychlostí zdroje nebo pozorovatele a zůstává stejná ve všech inerciálních vztažných soustavách, v rozporu se ZLR. Vystřelí-li gangster z jedoucího auta z *laserové* pušky bude rychlost šíření laserového paprsku vzhledem k autu i vzhledem k zemskému povrchu stejná.

Podle představ 19. století světlo představovalo vlnění světelného éteru (podobně jako zvuk vlnění vzduchu) a při pohybu zdroje či pozorovatele vůči tomuto éteru by se měla jejich rychlost s rychlostí světla sčítat, podobně jako na hladině vody můžeme vlny předbíhat nebo se za nimi opožďovat. Rozhodnout tyto rozpory mohl pouze experiment.

Rychlost šíření světla ve vakuu byla v minulém století již známa s velkou přesností. Aristotelovská fyzika považovala rychlost světla za nekonečnou (Epikuros celkem výstižně pravil, že světlo má rychlost myšlenky). Galilei byl první, kdo se pokusil rychlost světla změřit střídavým zakrýváním světla dvou luceren umístěných na dvou protilehlých kopcích. Nemohl uspět jednak proto, že reakce obou pozorovatelů jsou příliš pomalé, jednak proto, že neměl dostatečně přesné hodiny.

První měření rychlosti světla umožnila astronomie. V roce 1675 dánský astronom Olaus Römer působící na pařížské hvězdárně pozoroval periodu zákrytů Jupiterova měsíce Io Jupiterem. Zjistil, že vzdaluje-li se Země nebo přibližuje k Jupiteru maximální rychlostí (body B a C na obr. 1.1), tato perioda se zmenšuje nebo zvětšuje podle vztahu

$$T' = T \mp \Delta T = T \mp \frac{vT'}{c},$$

kde v je rychlost Země a c rychlost světla ve vakuu.

obr. 1.1

obr. 1.2

obr. 1.3

Jev je vlastně analogický Dopplerovu jevu, kdy dochází ke změně pozorované frekvence periodického děje vlivem pohybu pozorovatele. Pozorovaná změna periody zákrytů byla malá (asi 1,5 s). Römer mohl ovšem pozorovat i další jev. Počátky zákrytů v bodech A a D zemské dráhy se opožďovaly asi o 16 minut. To odpovídá době, kterou potřebuje světlo, aby prošlo vzdálenost rovnou poloměru dráhy Země. Z těchto měření bylo možno stanovit rychlost světla asi na 214 300 km.s^{-1}; provedl to Christian Huyghens.

V roce 1725 pozoroval anglický astronom James Bradley takzvanou *aberaci stálic*. Pozorujeme-li hvězdu na obloze během roku, mění se úhel pozorování tak, že hvězda opisuje na obloze jakoby malou elipsu, která může případně přejít v kružnici či úsečku. Je to způsobeno ročním pohybem Země na její dráze kolem Slunce; stejná situace vznikne, budeme-li běhat v dešti po kružnici a budeme směrovat deštník tak, abychom nezmokli. Nechť se hvězda nalézá ve výšce θ nad obzorem a změna tohoto úhlu v důsledku pohybu Země bude $\Delta\theta$ (obr. 1.2).

Potom pro malý úhel $\Delta\theta$ máme

$$\Delta\theta \approx \frac{v \sin\theta}{c}$$

Pro hvězdu v zenitu dostáváme kroužek o úhlovém poloměru $\frac{v}{c} = 10^{-4}$ rad $= 20,5''$. Z této naměřené hodnoty bylo možno zpětně určit rychlost světla. Vedle roční aberace je možno pozorovat i denní aberaci způsobenou rotací Země (na rovníku rychlostí 0,46 km.s^{-1}) s úhlovým poloměrem $\Delta\theta = 0,3''$.

Pozemskými metodami se podařilo změřit rychlost světla až v polovině minulého století. Armand Fizeau použil v roce 1849 rotujícího ozubeného kola, což je vlastně zdokonalená metoda Galileiho luceren (obr. 1.3). Má-li kolo z zubů a rotuje s frekvencí f, projde světlo mezerou mezi zuby a po odrazu od zrcadla ve vzdálenosti l dorazí právě k sousední mezeře za dobu

obr. 1.4 obr. 1.5

$$\Delta t = \frac{1}{2fz} = \frac{2l}{c}.$$

Odtud je možno rychlost světla rovněž stanovit. Pro zajímavost, Fizeau volil hodnoty $z = 720$, $f = 12,6\ \mathrm{s}^{-1}$, $l = 8,633$ km a dostal $c = 313\,275\ \mathrm{km.s}^{-1}$.

Ještě přesnějšího výsledku dosáhl Jean Foucault v roce 1850 metodou rotujícího zrcadla (obr. 1.4). Během cesty světelného paprsku od rotujícího zrcadla k odražeči a zpět se zrcadlo pootočí o úhel α. Projde-li pak paprsek optickým systémem dráhu d, posune se jeho stopa na stínítku o $\delta = 2\alpha d$. Rychlost světla pak určíme ze vztahů

$$\alpha = 2\pi f \Delta t = 2\pi f \frac{2l}{c} = \frac{\delta}{2d}, \qquad c = \frac{8\pi f l d}{\delta}.$$

Foucault naměřil $c = 298\,000\ \mathrm{km.s}^{-1}$. Obě metody, s rotujícím ozubeným kolem i rotujícím zrcadlem byly později dále zdokonalovány. Nejpřesnějších výsledků tímto způsobem dosáhl ambiciozní americký experimentátor Albert Abraham Michelson, který v roce 1878 měřil rychlost světla rotujícím osmibokým zrcadlovým hranolem. V roce 1927 měření opakoval a nechal světelný paprsek probíhat vzdálenost mezi vrcholy Mt.Wilsonu a Mt.St.Antonia v Kalifornii, která činí 35 km. Změřil tak $c = 299\,796\ \mathrm{km.s}^{-1}$.

Moderní experimentální metody, zejména laserové, umožňují určit rychlost světla s přesností 4.10^{-9}, tedy přesněji než umíme měřit délky. I bylo v roce 1983 dohodnuto vzít takto naměřenou hodnotu světla

$$c = 299\,792,458\ \mathrm{km.s}^{-1}$$

za přesnou a neměnnou. Jakákoli budoucí zpřesňování hodnoty rychlosti světla se promítnou do změny délky metru a číselná hodnota c se nebude měnit. Poznamenejme, že ve vzduchu za normálních podmínek se světlo šíří pomaleji o 91 $\mathrm{km.s}^{-1}$.

Když byla rychlost světla určena, zbývalo ověřit, zda se světlo skutečně šíří světelným éterem a zda se jeho rychlost skládá s rychlostmi zdrojů a pozorovatelů pohybujících se vůči tomuto éteru. Tato měření vyžadují přesnost řádu $\frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-8}$, která se zdála nedosažitelnou. Michelson to přijal jako výzvu a v roce 1887 spolu s Edwardem Williamsem Morleyem uskutečnil slavný *Michelsonův - Morleyův experiment*. Je to jeden z mála experimentů s negativním výsledkem, který vstoupil do historie. Byl uskutečněn pomocí Michelsonova interferometru, který je na obr. 1.5.

Paprsek ze zdroje Z dopadá na polopropustnou destičku A, kde se štěpí. Jedna jeho část projde vzdálenost l od destičky k zrcadlu C a zpět ve směru pohybu Země, druhá jeho část projde touž vzdálenost k zrcadlu B a zpět kolmo k pohybu Země. Po odrazech se obě části paprsku na destičce opět spojí a společně dopadají na stínítko D, kde spolu interferují. Pokud se rychlost světla s rychlostí Země vůči nehybnému éteru sčítá, bude se první část paprsku po rozdělení pohybovat po dobu

$$t_{ACA} = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Druhá část projde po přeponách dvou pravoúhlých trojúhelníků (viz obr. 1.5) o odvěsnách vt a l, takže

$$c^2t^2 = v^2t^2 + l^2, \quad t = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,.$$

Odtud

$$t_{ABA} = 2t = \frac{2l}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right).$$

Časové zpoždění mezi oběma částmi paprsku je tedy $\frac{lv^2}{c^3}$ a rozdíl optických drah $\Delta l = l\frac{v^2}{c^2}$.

Oba paprsky by tedy měly na stínítku vytvořit soustavu interferenčních proužků. Při otočení interferometru o 90 stupňů by mělo dojít k posunu těchto proužků o $2\Delta l = 2l.10^{-8}$. Je-li délka ramene interferometru například $l = 15$m, bude posun činit 3.10^{-7}m, což je polovina vlnové délky žlutého světla. Předpokládaný posun by tedy musel být pozorován.

Přes úsilí experimentátorů a pozdější zdokonalování metody (použití masivního bloku plovoucího ve rtuťovém bazénu, prodlužování ramen interferometru vícenásobným odrazem paprsků, využití laserového světla, opakování pokusu v různých místech na zeměkouli a v různých ročních dobách atd.) *žádný posun pozorován nebyl.* Ke vzájemnému zpoždění paprsků tedy nedošlo, světlo postupovalo touž rychlostí všemi směry nezávisle na pohybu Země. Tento výsledek definitivně zproblematizoval existenci světelného éteru a nezachránily ho ani pokusy vyložit výsledek strháváním éteru Zemí.

Všechny uvedené rozpory se podařilo vyřešit Albertu Einsteinovi (1879 – 1955), který svým způsobem postavil Kolumbovo vajíčko na špičku. V roce 1905, tedy ve svých 26 letech, publikoval článek "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" ("K elektrodynamice pohybujících se těles"), v němž formuloval základy speciální teorie relativity (STR). Einstein vyšel z analýzy Maxwellových rovnic, ukázal že při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé platí Lorentzovy transformace, přičemž čas přestává být nezávislým parametrem, ale stává se jednou ze souřadnic. Galileiho transformace pak představují pouze limitní případ pro pohyby malými rychlostmi. S takovou situací, kdy obecnější teorie přechází při limitování nějakého parametru v jinou teorii, která představuje zvláštní případ teorie obecnější, se setkáváme ve fyzice častěji a vyjadřujeme ji jako *princip korespondence.*

Einstein tak zobecnil Newtonovu mechaniku a výslovně přitom požádal Newtona o odpuštění. Zároveň zobecnil i Galileiho princip relativity na všechny fyzikální děje, včetně elektromagnetických a optických. Pokud jde o negativní výsledek Michelsonova experimentu, Einstein se o něj přímo neopíral, ale v STR se předpoklad o existenci světelného éteru prostě stává zbytečným. Přijmeme-li tezi o stálosti rychlosti světla ve všech inerciálních vztažných soustavách, musíme přijmout i ostatní důsledky, byť sebepodivnější, které z ní vyplývají. Chceme-li se tedy nevěřícně podivovat nad "paradoxy" speciální teorie relativity, stačí se divit jen jednou, a to stálosti rychlosti světla.

Základní postuláty STR můžeme tedy formulovat takto:

1. Všechny fyzikální děje probíhají stejně ve všech inerciálních vztažných soustavách (Einsteinův princip relativity).

2. Světlo se šíří ve vakuu stejnou rychlostí ve všech inerciálních vztažných soustavách (princip stálosti rychlosti světla).

2. Lorentzovy transformace a jejich důsledky

Ve speciální teorii relativity budeme vždy uvažovat dvě inerciální vztažné soustavy, jednu nehybnou (laboratorní) označenou S a druhou pohybující se rychlostí v ve směru osy x a označenou jako S'. Osy x a x' obou soustav přitom splývají a osy y, z a y', z' jsou vzájemně souhlasně rovnoběžné (viz obr. 1.6). V počátku každé soustavy jsou umístěny hodiny, které měří čas t a t'. Zřejmě existuje okamžik, kdy se počátky obou soustav O , O' právě kryjí. Tento okamžik bereme za počátek pro odečet času v obou soustavách. Taková speciální volba dvou vztažných soustav neovlivní obecnost získaných výsledků.
Předpokládejme, že v počátku každé soustavy je umístěn světelný zdroj svítící všemi směry. V nehybné soustavě bude se světlo šířit v kulových vlnoplochách, které budou mít v okamžiku t rovnici

$$x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2 \;=\; c^2t^2.$$

V pohybující se soustavě je však rychlost světla rovněž ve všech směrech stejná a světlo bude vytvářet rovněž kulové vlnoplochy o rovnici

$$x'^2 \;+\; y'^2 \;+\; z'^2 \;=\; c^2t'^2.$$

Kdybychom použili Galileiho transformace $x' = x - vt,\; y' = y',\; z' = z,\; t' = t$, dostali bychom po dosazení do rovnice vlnoplochy v S'

$$x^2 - \underline{2xvt} + \underline{v^2t^2} + y^2 + z^2 = c^2t^2.$$

obr. 1.6

Tato rovnice však neodpovídá rovnici kulové vlnoplochy v S; liší se od ní podtrženými členy. Abychom dosáhli souhlasu obou rovnic, provedeme lineární transformaci času: $t' = t + \alpha x$. Koeficient α určíme dodatečně. Tak dostaneme

$$x^2 - \underline{2xvt} + v^2t^2 + y^2 + z^2 \;=\; c^2t^2 + \underline{2c^2t\alpha x} + c^2\alpha^2x^2\;.$$

Zvolíme-li $\alpha = -\frac{v}{c^2}$, vyruší se opět podtržené členy a rovnice přejde na tvar

$$x^2\left(1\;-\;\frac{v^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 \;=\; c^2t^2\left(l\;-\;\frac{v^2}{c^2}\right)\;.$$

Nyní stačí už jen znormovat x a t koeficientem $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ a dostáváme *Lorentzovy transformace* splňující podmínku, aby světelná vlnoplocha byla v nehybné i v pohybující se soustavě kulová:

$$x' \;=\; \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad y' \;=\; y,\quad z' \;=\; z,\quad t' \;=\; \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\;.$$

Obvykle zavádíme označení

$$\beta \;=\; \frac{v}{c},\qquad \gamma \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.1}$$

a zapisujeme Lorentzovy transformace ve tvaru

$$x' \;=\; \gamma(x - vt),\quad y' \;=\; y,\quad z' \;=\; z,\quad t' \;=\; \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)\;. \tag{1.2}$$

Vztažná soustava se zřejmě nesmí pohybovat rychlostí světla; jinak bychom dostali ve jmenovateli Lorentzových transformací nulu. Nelze tedy spojit vztažnou soustavu se světelným paprskem, resp. s fotonem. Pokud by se soustava pohybovala rychlostí větší než světelnou, dostali bychom koeficient γ imaginární; nevíme ovšem, co by to fyzikálně znamenalo.

Někdy se zjednodušeně tvrdí, že podle teorie relativity se "nic" nemůže pohybovat rychlostí větší než je rychlost světla ve vakuu. Toto tvrzení není správné, nemluvě už o tom, že "nic" není fyzikální termín. Ukazuje se, že je celá řada veličin a úkazů, které se pohybují rychlostí nadsvětelnou. Tak například fázová rychlost sinusové vlny, průsečík ostří velmi dlouhých nůžek, světelný záblesk ("prasátko") v dostatečné vzdálenosti od zdroje, kterým otáčíme apod. mohou přesahovat rychlost světla. Podrobnější analýza však prokáže, že všechny tyto kuriozní nadsvětelné jevy nemohou přenášet energii ani informaci. Abychom přenesli informaci elektromagnetickou vlnou, musíme ji modulovat; informace se pak bude šířit nikoli fázovou rychlostí, nýbrž grupovou, která je podsvětelná. To co se šíří nadsvětelnou rychlostí jsou tedy v podstatě samé pošetilosti.

Někdy je možné zanedbat druhou mocninu β ve srovnání s jedničkou a položit přibližně $\gamma \approx 1$. Pak dostaneme takzvané "pomalé" Lorentzovy transformace

$$x' = x - vt, \;\; y' = y, \;\; z' = z, \;\; t' = t - \frac{\beta}{c}x \,. \tag{1.3}$$

Snadno dostaneme též zpětné Lorentzovy transformace, tj. vyjádření nečárkovaných veličin pomocí čárkovaných. K tomu zřejmě stačí prostě změnit znaménko rychlosti v na opačné.

Lorentzovy transformace lze zapsat též ve vektorovém tvaru jako

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}\left[\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma t\right], \;\; t' = \gamma\left[t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\right]. \tag{1.4}$$

Pro $\vec{v} \equiv (v, 0, 0)$ odpovídá tato vektorová forma obvyklým Lorentzovým transformacím. Je však obecnější v tom, že ji lze použít i tehdy, má-li rychlost $\vec{v}$ obecný směr (při zachování rovnoběžnosti souřadných os).

Z Lorentzových transformací plyne celá řada překvapivých důsledků. Je to především *relativita soumístnosti a současnosti.* Uvažujme dvě události charakterizované časovým okamžikem a prostorovými souřadnicemi t_1, x_1, y_1, z_1 a t_2, x_2, y_2, z_2. Časový interval mezi nimi v soustavě S bude $\Delta t = t_2 - t_1$, vzdálenost $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, kde $\Delta x = x_2 - x_1, \ldots$. Z (1.2) dostáváme v soustavě S':

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x), \qquad \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \qquad \Delta y' = \Delta y, \qquad \Delta z' = \Delta z \,. \tag{1.5}$$

Odtud je zřejmé, že jsou-li dvě události v soustavě S soumístné, $\Delta l = 0$, nemusí být soumístné v soustavě S'.($\Delta l' = 0$ jen bude-li $\Delta t = 0$). To nás nemusí překvapovat, neboť s podobnou situací se setkáváme i v nerelativistické fyzice. Je však překvapivější, že dvě události současné v jedné vztažné soustavě nemusí být současné v druhé. Je-li $\Delta t = 0$, bude $\Delta t' = 0$ jen pro události probíhající v témž místě (při $\Delta x = 0$).

Další neobvyklý důsledek Lorentzových transformací souvisí s tím, že čas probíhá v různých vztažných soustavách různě. V pohybující se soustavě bude čas probíhat pomaleji než v soustavě nehybné; nazýváme to *dilatace času.* Mějme nějaký objekt, například těleso či částici pohybující se rovnoměrně přímočaře rychlostí v ve směru osy x. Potom s touto částicí můžeme spojit počátek pohybující se vztažné soustavy S' ; tato soustava se nazývá *vlastní (klidová) soustavou částice.* Je zřejmé, že všechny události týkající se této částice budou soumístné, budou probíhat vždy v počátku O'. Proto podle (1.5)

$$\Delta x' = 0, \;\; \Delta x = v\Delta t, \;\; \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}v\Delta t) = \gamma^{-1}\Delta t \,.$$

Budeme-li odečítat čas v obou soustavách od společného okamžiku jejich splynutí a označíme-li *vlastní čas* částice $t' = \tau$, dostaneme vztah pro dilataci času v podobě

$$\tau = \gamma^{-1}t = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \,. \tag{1.6}$$

Experimentální potvrzení tohoto neobvyklého důsledku lze vidět v tom, že částice, které mají v klidovém stavu krátkou dobu života, mohou při pohybu rychlostí blízkou rychlosti světla urazit dráhu odpovídající mnohonásobně delší době. Tak například miony kosmického záření, které se v klidu rozpadají za $2,2.10^{-6}$ s

obr. 1.7 obr. 1.8

mohou v atmosféře proletět mnoho kilometrů, i když by během svého života měly stačit urazit rychlostí blízkou rychlosti světla jen asi 660 m. Podobně se chovají i částice urychlené na urychlovačích. V poslední době se již podařilo prokázat tento efekt i přímým srovnáváním chodu atomových hodin na Zemi a v rychle letících letadlech.

Představa, že kosmonaut pohybující se v raketě rychlostí blízkou rychlosti světla bude stárnout pomaleji než pozorovatel na Zemi se zdá nesmyslná z hlediska ZLR, tím spíše, že v soustavě spojené s raketou by měl opět stárnout pomaleji pozorovatel na Zemi. Je to jeden z mnoha tzv. "paradoxů" STR, ovšem pouze zdánlivých. Na samotném faktu, že se různé věci jeví jinak s hlediska různých vztažných soustav není ještě nic paradoxního. Princip relativity pouze tvrdí, že všechny fyzikální (a ovšem i chemické, biologické atd.) děje probíhají stejně ve všech inerciálních vztažných soustavách. Kosmonaut ve své vlastní vztažné soustavě si bude stárnout stejným tempem jako pozorovatel ve své pozemské soustavě.

Určitý problém nastane, setkají-li se nakonec kosmonaut a pozorovatel ve společné vztažné soustavě, například na Zemi a budou porovnávat, kdo z nich je starší. Někdy hovoříme o tzv. "paradoxu dvojčat". Ze dvou stejně starých dvojčat se jeden, pan Bingle, vydá na kosmickou cestu rychlostí v, zatímco jeho bratr, pan Dingle, zůstane na Zemi. Poté, co urazí vzdálenost Δx (viz obr. 1.7), začne se pan Bingle vracet zpět rychlostí $-v$ na Zem.

Označme A a D události odletu a příletu pana Bingla na Zem, událost B je přistání pana Bingla na cílové planetě. Od odletu do příletu uplyne na Zemi doba Δt_{AD}, současně s přistáním B proběhne na Zemi nějaká událost C, z důvodu symetrie zřejmě právě v polovině intervalu Δt_{AD}. Kosmonaut prožije od odletu do návratu dobu $\Delta\tau_{AD}$, z toho polovinu času v rychlosti v a druhou v rychlosti $-v$. Z (1.6) máme

$$\begin{aligned} \Delta t_{AC} &= \Delta t_{CD} = \Delta t_{AB} = \Delta t_{BD} = \frac{\Delta x}{v}\,, \\ \Delta\tau_{AD} &= \gamma^{-1}(\Delta t_{AC} + \Delta t_{CD}) = \gamma^{-1}\Delta t_{AD} < \Delta t_{AD}\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

S hlediska pana Dingla bude tedy jeho bratr po návratu fyzicky mladší. Sešlejší stav pana Dingla je ovšem absolutní fakt, který se musí jevit stejně s hlediska jakékoli vztažné soustavy. Jak si jej vysvětlí pan Bingle? Jeho situace není zcela symetrická – zatímco jeho bratr trávil život v inerciální soustavě, pan Bingle třikrát přecházel z jedné vztažné soustavy do druhé. Trávil tedy krušné okamžiky prudce neinerciálních pohybů a přesně vzato úloha tím vybočuje z STR. Představa o tom, že přesedání z jedné inerciální soustavy do druhé se dělo okamžitě je samozřejmě idealizací, ale řešení je v rámci STR přesto zcela konzistentní. Zajímavé je, že zatímco Bingle přesedal, šedivěl z toho na Zemi jeho bratr.

Věc je v tom, že v pohybujících se soustavách nebudou události B a C současné. V soustavě v bude k B na Zemi současná událost E a v soustavě $-v$ událost F (viz obrázek), takže $\Delta\tau_{EB} = \Delta\tau_{BF} = 0$, $\Delta\tau_{AE} + \Delta\tau_{FD} = \Delta\tau_{AD}$. Z podmínky (1.5) pro zpětnou transformaci dostaneme

$$\Delta t_{EB} = \Delta t_{BF} = \gamma\frac{v}{c^2}\Delta x', \text{ kde } \Delta x' = \frac{1}{2}v\Delta\tau_{AD}\,.$$

Potom

$$\begin{aligned}\Delta t_{AD} \;=\; \Delta t_{AE}+\Delta t_{FD}+\Delta t_{EF} \;=\; (\Delta t_{AE}+\Delta t_{FD})+2\Delta t_{EB} \;=\\ \gamma^{-1}(\Delta\tau_{AE}+\Delta\tau_{FD}) \;+\; \gamma\beta^2\Delta\tau_{AD} \;=\; (\gamma^{-1}+\gamma\beta^2)\Delta\tau_{AD} \;=\; \gamma\Delta\tau_{AD}\end{aligned} \tag{1.8}$$

v souladu s (1.7). Obecnější řešení s uvážením neinerciálních úseků cesty (brzdění, urychlení, otočka) ukazuje, že v některých případech může dojít i k opačnému efektu (rychlejšímu stárnutí kosmonauta), ale není důvodů pochybovat o tom, že změna ve fyzickém stáří dvojčat bude reálná. V principu tak může kosmonaut přicestovat zpět na Zemi v bližší či vzdálenější budoucnosti. Důležité je, že není možná cesta zpět do minulosti, což by mohlo vyvolat spor s principem příčinnosti (příčiny musí vždy předcházet následkům, i když "post hoc" nemusí ještě znamenat "propter hoc").

S dilatací času úzce souvisí i *relativistický Dopplerův jev.* V roce 1842 zformuloval v Praze Christian Doppler princip, podle něhož se frekvence vlnění registrovaná pozorovatelem (f) liší od frekvence vlnění ve vlastní soustavě zdroje (f_0), pohybují-li se zdroj a pozorovatel *vzájemnou rychlostí* v a je-li θ úhel mezi směrem pohybu a spojnicí od zdroje k pozorovateli (viz obr. 1.8):

$$f \;=\; \frac{f_0}{1-\frac{v}{c}\cos\theta} \tag{1.9}$$

Protože frekvence je převrácenou hodnotou periody, dostaneme v relativistickém případě

$$f \;=\; \gamma^{-1}\frac{f_0}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}\ . \tag{1.10}$$

Při $\theta = 0$, π dostáváme takzvaný podélný Dopplerův jev, při $\theta = \frac{\pi}{2}$ příčný Dopplerův jev:

$$f_{pod} \;=\; \gamma^{-1}\frac{f_0}{1\mp\frac{v}{c}}\ , \qquad f_{p\check{r}} \;=\; \gamma^{-1}f_0\ . \tag{1.11}$$

Příčný Dopplerův jev je čistě relativistický efekt druhého řádu a byl experimentálně pozorován teprve v r. 1938 při vyzařování rychlých iontů vodíku (H.F.Ives, G.R.Stilwell).

Dalším relatistickým jevem je takzvaná *kontrakce délek*. Mějme tuhé těleso konečných rozměrů a spojme s ním vztažnou soustavu S'. V této soustavě bude těleso nehybné a jeho *vlastní délka* zde bude $\lambda = l' = x'_2 - x'_1$. V nepohybující se soustavě S musíme měřit polohu obou konců tělesa v témž okamžiku $t_1 = t_2$. Z Lorentzových transformací pak máme

$$l' \;=\; x'_2 - x'_1 \;=\; \gamma[x_2 - x_1 - v(t_2-t_1)] \;=\; \gamma(x_2-x_1) \;=\; \gamma l\ .$$

Pro vlastní délku tedy dostáváme

$$\lambda \;=\; \gamma l \;=\; \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ . \tag{1.12}$$

Podélný rozměr pohybujícího se tělesa je tedy zkrácen oproti jeho vlastnímu rozměru. Ve stejném poměru se zřejmě zmenšuje i objem tělesa. Také tato kontrakce délek je experimentálně potvrzována; jak uvidíme, jejím přímým důsledkem je i existence magnetického pole. Kontrakce délek a dilatace času spolu úzce souvisejí. Připomeňme si případ kosmických mionů, které proběhly v atmosféře několik kilometrů - ve své vlastní soustavě pozorují, že kolem nich probíhá vrstva atmosféry, jejíž tloušťka je ovšem zkrácena na oněch 660 m, které jsou miony s to během svého života proběhnout.

Z Lorentzových transformací přímo vyplývají pravidla pro *skládání rychlostí.* Dělíme-li dx', dy', dz' veličinou dt' a označíme rychlosti nějaké částice v čárkované a nečárkované soustavě $u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \ldots, u_x = \frac{dx}{dt}, \ldots$, dostáváme

$$u'_x \;=\; \frac{u_x - v}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\ , \qquad u'_{y,z} \;=\; \frac{u_{y,z}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\ . \tag{1.13}$$

Pokud se sčítají pouze rychlosti podél osy x, dostáváme

obr. 1.9

$$u' \;=\; \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}\,, \qquad u \;=\; \frac{u'+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\,. \tag{1.14}$$

Odtud je zřejmé, že součet dvou rychlostí, třeba blízkých rychlosti světla, nikdy rychlost světla nepřesáhne. Snadno ověříme, že vystřelíme-li z rakety pohybující se téměř rychlostí světla laserový paprsek, bude po sečtení rychlostí podle (1.14) jeho rychlost stejná v čárkované i nečárkované soustavě.

Někdy se může hodit vektorový výraz pro skládání rychlostí: 1

$$\vec{u}' \;=\; \frac{\vec{u}+\vec{v}\left[\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2}(\gamma-1)-\gamma\right]}{\gamma\left(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)} \;\approx\; \frac{\vec{u}-\vec{v}}{1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}}\,. \tag{1.15}$$

Pomocí relativistického sčítání lze vysvětlit výsledek *Fizeauova pokusu* se strháváním éteru proudící vodou (obr. 1.9). Jedna část rozštěpeného světelného paprsku prochází vzdálenost $2l$ ve směru proudícího vodního sloupce, druhá proti proudu a poté oba interferují. Rychlost světla v klidné vodě souvisí s indexem lomu n vztahem $v_0 = \frac{c}{n}$; přitom je tato rychlost samozřejmě mnohem větší než rychlost proudění V. Fizeau předpokládal, že světelný éter je částečně strháván proudící vodou a zavedl tzv. koeficient strhávání k, takže podle něj rychlost světla po proudu a proti proudu byla $v_1 = v_0 + kV,\ v_2 = v_0 - kV$.Časový rozdíl chodu obou paprsků, který je možno změřit posunem interferenčních proužků, činí tedy

$$\Delta t \;=\; \frac{2l}{v_0-kV} - \frac{2l}{v_0+kV} \;\approx\; \frac{4klV}{v_0^2} \;=\; \frac{4klVn^2}{c^2}\,.$$

Na základě tohoto vztahu mohl Fizeau experimentálně určit koeficient k a zjistil, že $k = 1 - \frac{1}{n^2}$. Tentýž výsledek můžeme však dostat na základě relativistického sčítání rychlostí. Je-li rychlost světla v soustavě spojené s pohybující se vodou v_0, bude v laboratorní soustavě

$$v \;=\; \frac{v_0 \pm V}{1 \pm \frac{v_0 V}{c^2}} \approx v_0 \mp V\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Dostáváme tedy týž výsledek jako Fizeau, aniž bychom předpokládali existenci éteru a jeho strhávání.

S relativistickým skládáním rychlostí úzce souvisí i *transformace směru*. Uvažme okamžik $t = t' = 0$, kdy počátky pevné a pohybující se soustavy splývají a mějme částici, která se pohybuje v rovině x, z rychlostí $\vec{u}$, resp. $\vec{u}'$ pod úhlem θ, resp. θ' vzhledem k ose x (viz obr. 1.10).

Pak máme $u_x = u\cos\theta,\ u'_x = u'\cos\theta',\ u_z = u\sin\theta,\ u'_z = u'\sin\theta$. Použijeme-li pravidla pro sčítání rychlostí (1.13), dostaneme

obr. 1.10 obr. 1.11

$$\text{tg}\,\theta' \;=\; \frac{u'_z}{u'_x} \;=\; \gamma^{-1}\frac{u_z}{u_x - v} \;=\; \gamma^{-1}\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta - v}\;. \tag{1.16}$$

Jde-li o směr světelného paprsku, (obr. 1.11) položíme $u = u' = c$, a pro $v \ll c$, $\gamma \approx 1$ máme

$$\Delta\theta \;=\; \theta' - \theta \;\approx\; \text{tg}\,(\theta' - \theta) \;=\; \frac{\text{tg}\,\theta' - \text{tg}\,\theta}{1 \;+\; \text{tg}\,\theta'\text{tg}\,\theta} \;=\; \frac{\beta\sin\theta}{1 \;-\; \beta\cos\theta} \approx \beta\sin\theta\;.$$

Poslední výraz odpovídá klasickému přiblížení pro Bradleyho aberaci.

V Newtonově fyzice jsme zvyklí, že délka, vzdálenost dvou bodů v prostoru $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + \Delta y)^2 + \Delta z)^2}$ se nemění při přechodu z jedné soustavy do druhé, je invariantní. Jak víme v STR tomu tak není. Přesto však je možno vytvořit invariant, který se nemění, aplikujeme-li na souřadnice a čas Lorentzovy transformace. Tento invariant nazýváme *intervalem.* Čtverec intervalu je

$$(\Delta s)^2 \;=\; c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 \;=\; c^2(\Delta t')^2 - (\Delta l')^2 \;=\; \text{invariant}\;. \tag{1.17}$$

Na rozdíl od délky v obyčejném euklidovském prostoru může být čtverec intervalu kladný, záporný či nulový a interval může být i imaginární. Zavedeme-li čtyřrozměrný prostor událostí, *prostoročas*, jehož body mají souřadnice ct, x, y, z (koeficient c u t zajišťuje fyzikální rozměr délky), potom můžeme interval považovat za jakousi svéráznou délku, vzdálenost mezi dvěma událostmi tohoto prostoru. Říkáme, že vztahem (1.17) jsme zadali metriku (způsob měření vzdáleností) v tomto prostoru. Metrika takto definovaného čtyřrozměrného prostoru se zřejmě liší od metriky čtyřrozměrného euklidovského prostoru znaménkem minus v (1.17). Proto tento prostor nazýváme s matematického hlediska *prostor pseudoeuklidovský* nebo *prostor Minkowského.*

Interval úzce souvisí s vlastním časem. Probíhají-li nějaké události s určitým tělesem nebo částicí, platí pro ně ve vlastní soustavě tělesa $\Delta l' = 0$. Potom $\Delta s = c\Delta t' = c\Delta\tau$, kde τ je vlastní čas tělesa.

Dvě události, dva body prostoročasu (někdy jej též nazýváme světovým prostorem) mohou být odděleny následujícími typy intervalů:

- $(\Delta s)^2 > 0$, Δs reálný. Takový interval nazýváme *časopodobným.* Má tu vlastnost, že vždy existuje vztažná soustava, v níž tyto dvě události lze učinit soumístnými. To se týká například všech událostí, které se dějí s jedním tělesem a zmíněná soustava je jeho vlastní soustava. Takové události mohou být příčinně spojeny, život, vývoj jednoho tělesa (částice) je vždy řetězem příčin a následků.

- $(\Delta s)^2 = 0$, $\Delta l = \pm c\Delta t$. Takový interval nazýváme *světlopodobným.* Dvě události spojené světlopodobným intervalem jsou například vyslání a přijetí signálu předávaného rychlostí světla.

- $(\Delta s)^2 < 0$, Δs imaginární. Takový interval nazýváme *prostoropodobným.* Má tu vlastnost, že vždy existuje vztažná soustava, v níž lze tyto dvě události učinit současnými. Takové události zřejmě nemohou být v příčinném spojení a nemohou se týkat téhož tělesa.

obr. 1.12

V prostoru událostí (světovém prostoru) obyčejně znázorňujeme tzv. *světelný kužel*. Na obr. 1.12 vidíme jeho projekci do roviny ct, x, kde je zobrazen dvojicí přímek $x = \pm ct$. Počátek O představuje výchozí událost, naše "zde" a "nyní". Všechny události spojené s touto výchozí událostí časopodobným intervalem leží uvnitř světelného kužele (vlastně dvojkužele), světlopodobným intervalem na plášti tohoto kužele a prostoropodobným intervalem mimo tento kužel. Život tělesa tedy představuje sled bodů v prostoročase (světobodů) spojených světočárou procházející vrcholem světelného kužele; události minulé pod osou x, události budoucí nad ní.

3. Relativistická dynamika

Základními pojmy dynamiky jsou hybnost a síla. Po zkušenosti s polohovým vektorem a Lorentzovými transformacemi je logické požadovat, aby i vektor hybnosti $\vec{p} \equiv (p_x, p_y, p_z)$ projevoval podobné transformační vlastnosti jako polohový vektor, tedy zejména aby platilo $p'_y = p_y,\ p'_z = p_z$. Lze se přesvědčit, že takovému požadavku bude vyhověno, budeme-li definovat hybnost částice o hmotnosti m a pohybující se rychlostí $\vec{u}$ vztahem

$$\vec{p} \;=\; \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 \;-\; \frac{u^2}{c^2}}}\;. \tag{1.18}$$

V souhlase s principem korespondence přechází tato definice v nerelativistickou hybnost při $u \ll c$. Hmotnost m je konstantní a nazývá se též *klidovou hmotností.*

K přetransformování složek p_y, p_z nám nyní postačí pravidla pro skládání rychlostí (1.13):

$$p'_{y,z} \;=\; \frac{mu'_{y,z}}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \;=\; \frac{mu_{y,z}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \;=\; p_{y,z}\;. \tag{1.19}$$

Při úpravě jsme zlomek rozšířili $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ a použili identity

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \;=\; \gamma\frac{1-\frac{u_x v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\;, \tag{1.20}$$

kterou si ve volné chvíli snadno dokážeme.

Přetransformujeme nyní složku p_x s použitím (1.20)

$$p'_x \;=\; \frac{mu'_x}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \;=\; \gamma\left(\frac{mu_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \;-\; \frac{v}{c^2}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) \;=\; \gamma\left(p_x \;-\; \frac{\beta}{c}E\right)\;. \tag{1.21}$$

Jako E jsme označili výraz

$$E \;=\; \frac{m\,c^2}{\sqrt{1\;-\;\frac{u^2}{c^2}}}\;, \tag{1.22}$$

který má rozměr energie. Je logické předpokládat, že představuje energii volné, bezsilové částice. Pro malé rychlosti přechází v konstantní hodnotu

$$E_0 \;=\; m\,c^2\;, \tag{1.23}$$

kterou můžeme nazvat *klidovou energií částice.* Je to zřejmě vlastní energie částice v její klidové soustavě. V nerelativistické fyzice se sice s takovou konstantní energií nesetkáváme, ale energie je tam definována s přesností na adiční konstantu, takže k rozporu nedochází. Kinetickou energii v STR můžeme rozložit do řady pro malé hodnoty poměru $\frac{u}{c}$:

$$E_k \;=\; E \;-\; mc^2 \;=\; mc^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \;-\; mc^2 \;=\; mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4}+\cdots-1\right) \;=$$

$$=\frac{1}{2}mu^2 \;+\; \frac{3}{8}m\frac{u^4}{c^4}+\cdots \tag{1.24}$$

Můžeme se přesvědčit, že energie částice definovaná vztahem (2.7) vzrůstá, koná-li vnější síla nad částicí práci. Výkon takové síly bude

$$P \;=\; \vec{F}\cdot\vec{u} \;=\; \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{u} \;=\; \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)\cdot\vec{u} \;=\; \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\;.$$

Protože $P = \frac{dE}{dt}$, dostaneme integrací

$$E \;=\; \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \;+\; \text{konst}\;. \tag{1.25}$$

Pro určení integrační konstanty v (1.25) nemáme teoretický podklad. Zůstává totiž otázkou, zda klidová energie (1.23) představuje skutečně úplnou energii částice. Teprve experimentální objev anihilace částic a antičástic, kdy klidová energie zcela mizí a mění se v energii kinetickou a energii záření (dochází k úplnému *uvolnění energie*), umožnil položit integrační konstantu v (1.25) rovnou nule.

Poznámka. Někdy se zavádí takzvaná relativistická hmotnost $m = \frac{E}{c^2}$, která roste při přibližování rychlosti částice rychlosti světla a při nulové rychlosti přechází v hmotnost klidovou. Je to však zbytečné, neboť tato veličina je stále úměrna energii. Navíc se tím pojem hmotnosti zbytečně komplikuje - v pohybové rovnici už totiž nemůžeme vytknout hmotnost jako konstantní a psát $\vec{F} = m\vec{a}$. Hmotnost částice bude záviset nejen na velikosti rychlosti, ale i na směru rychlosti vzhledem ke směru působící síly. Někdy se setkáváme se starými pojmy "hmotnost podélná" a "hmotnost příčná", působí-li síla rovnoběžně nebo kolmo ke směru rychlosti. Hmotnost tak zřejmě přestává být vhodnou mírou setrvačnosti částice a je nejvyšší čas se tohoto pojmu zbavit. Něco jiného je klidová hmotnost částice, která představuje určitou skalární, invariantní vlastnost. I tu ovšem můžeme vyjadřovat jako klidovou energii v energetických jednotkách (u částic v elektronvoltech a jejich násobcích).

Vraťme se nyní k transformačnímu vztahu pro složku hybnosti p_x (1.21). Vidíme, že tato složka hybnosti se při transformaci váže s energií, podobně jako u Lorentzových transformací se souřadnice x váže s časem. Provedeme ještě transformaci energie (použijeme přitom užitečného vztahu (1.20)):

$$E' \;=\; \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \;=\; \gamma\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - v\frac{mu_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) \;=\; \gamma\,(E \;-\; vp_x)\;. \tag{1.26}$$

Vidíme, že STR spojuje vždy jednu skalární a jednu vektorovou veličinu do čtveřice souřadnic, které se při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé transformují společně. Vzniká tak *polohový čtyřvektor* v prostoročase, který můžeme zapsat ve formě $(ct, x, y, z) \;=\; (x^0, x^1, x^2, x^3)$ nebo *čtyřhybnost* (čtyřvektor energie - hybnosti) $\left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) \;=\; (p^0, p^1, p^2, p^3)$, a jiné. S matematického hlediska jsou to vektory ve čtyřrozměrném prostoru Minkowského a transformují se podle obecných Lorentzových transformací

$$a'^0 = \gamma(a^0 - \beta a^1), \qquad a'^1 = \gamma(a^1 - \beta a^0), \qquad a'^2 = a^2, \qquad a'^3 = a^3\;. \tag{1.27}$$

(Jde o tzv. kontravariantní složky čtyřvektorů, které se značí horními indexy).

Invariant ("délku") těchto čtyřvektorů můžeme vyjádřit jako

$$(a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 \;=\; \text{invariant.}$$

Víme, že pro polohový čtyřvektor je tímto invariantem interval. Pro čtyřhybnost dostáváme

$$\frac{E^2}{c^2} \;-\; p^2 \;=\; \frac{m^2c^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} \;-\; \frac{m^2u^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} \;=\; m^2c^2\;,$$

což je jistě invariant (konstanta).

Odtud dostáváme důležitý relativistický vztah mezi energií a hybností:

$$E \;=\; \sqrt{p^2c^2 \;+\; m^2c^4}\;. \tag{1.28}$$

V nerelativistickém případě tomuto vztahu odpovídá pouze kinetická energie volné částice $E = \frac{p^2}{2m}$. Existují i částice o nulové klidové hmotnosti (například foton) a pro ně pak z (1.28) dostaneme

$$E \;=\; p\;c\;. \tag{1.29}$$

Nakonec najdeme vztah pro *transformaci síly* z jedné vztažné soustavy do druhé. Požadujeme přitom, aby Newtonův pohybový zákon měl formálně týž tvar jako v nerelativistické fyzice, tj. aby platilo

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} .$$

Přitom se ovšem budou relativisticky transformovat jak hybnosti tak čas. Abychom mohli při derivování podle času přecházet od nečárkovaných veličin k čárkovaným a naopak, odvodíme napřed užitečný vztah plynoucí z Lorentzových transformací a transformace x-ové složky rychlosti. Protože

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right),$$

máme

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) = \gamma\left(1 - \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}\,\frac{v}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^{-1} . \tag{1.30}$$

Vyjádříme nyní složky síly $\vec{F}$ pomocí složek $\vec{F}'$:

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = \gamma\left(\frac{dp'_x}{dt'} + \frac{v}{c^2}\,\frac{dE'}{dt'}\right)\frac{dt'}{dt} = \frac{F'_x + \frac{v}{c^2}\vec{F}'\cdot\vec{u}'}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = F'_x + \gamma\frac{v}{c^2}\left(F'_y u_y + F'_z u_z\right),$$

$$F_{y,z} = \frac{dp_{y,z}}{dt} = \frac{dp'_{y,z}}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^{-1} F'_{y,z} = \gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) F'_{y,z} . \tag{1.31}$$

Přejdeme k vektorovému vyjádření. Zapíšeme-li rychlost v jako vektor $\vec{v} \equiv (v, 0, 0)$, můžeme zapsat složky síly ve tvaru

$$F_x = F'_x - \gamma\frac{v}{c^2}F'_x u_x + \gamma\frac{v}{c^2}(\vec{F}'\cdot\vec{u}) = (1-\gamma)F'_x + \gamma\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)F'_x + \gamma\frac{v}{c^2}(\vec{F}'\cdot\vec{u}),$$

$$F_{y,z} = \gamma\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)F'_{y,z} .$$

Shrneme-li vztahy pro transformaci složek síly, můžeme psát

$$\vec{F} = (1-\gamma)\frac{\vec{F}'\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} + \gamma\vec{F}' + \frac{\gamma}{c^2}\left[\vec{v}(\vec{u}\cdot\vec{F}') - \vec{F}'(\vec{u}\cdot\vec{v})\right] = (1-\gamma)\frac{\vec{F}'\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} + \gamma\vec{F}' + \frac{\gamma}{c^2}\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{F}') . \tag{1.32}$$

Má-li síla ve vlastní soustavě zdroje (například v soustavě spojené s pohybujícím se nábojem) tvar

$$\vec{F}' = k\frac{\vec{r}'}{r'^3},$$

potom s použitím (1.4) položíme-li $t = 0$ dostaneme

$$\vec{F} = \frac{k\gamma}{r'^3}\left[\vec{r} + \frac{1}{c^2}\,\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{r})\right] . \tag{1.33}$$

4. O obecné teorii relativity

Einsteinův princip relativity hovoří o rovnocennosti všech inerciálních vztažných soustav. Jak víme, v neinerciálních soustavách se objevují setrvačné síly, které nemají bezprostřední původ v interagujících tělesech. Na druhé straně již v Newtonově mechanice bylo ustanoveno, a postupně experimentálně ověřováno se stále větší přesností, že setrvačná síla a gravitace mají tytéž účinky, že setrvačná hmotnost a gravitační hmotnost jsou si úměrny, že je lze je sčítat a vyjadřovat v týchž jednotkách. Je to tzv. Newtonův princip ekvivalence.

Einstein učinil další krok a vyslovil předpoklad, že setrvačnost a gravitace jsou přímo totožné. Tím na jedné straně vytvořil novou teorii gravitace a straně druhé zobecnil teoii relativity i na neinerciální soustavy. Tuto teorii proto nazýváme *obecnou teorií relativity*, OTR. Její základní postuláty můžeme zformulovat například takto:

1. Fyzikální zákony mají stejný tvar ve všech vztažných soustavách (obecný princip relativity).

2. Všechny fyzikální děje probíhají stejně v inerciální soustavě, v níž působí homogenní gravitační pole intenzity $\vec{g}$ a v neinerciální soustavě pohybující se rovnoměrně zrychleně se zrychlením $-\vec{g}$ (Einsteinův princip ekvivalence).

V malé oblasti prostoru můžeme gravitační pole vždy považovat za homogenní a nahradit je lokální vztažnou soustavou pohybující se vůči inerciálním soustavám s konstantním zrychlením. Obecně v prostoru je však gravitační pole nehomogenní a musíme proto stále přecházet od jedné lokální vztažné sopustavy k druhé. To je ekvivalentní představě o zakřiveném prostoru. Buď můžeme prohlásit, že světelný paprsek zakřivuje svou dráhu pod vlivem gravitačního pole nebo proto, že sám prostor je zakřiven a nejkratší dráhy, spojnici dvou bodů neleží v přímkách, ale v zakřivených, takzvaných geodetických čarách.

Gravitaci můžeme tedy nahradit udáním pravidla měření vzdáleností, tj. *metriky prostoročasu*. Nesmíme zapomínat, že v teorii relativity čas hraje úlohu jedné ze souřadnic a že jde tedy o zakřivený prostoročas, což si lze jistě velmi obtížně představit. Místo čtyřrozměrného pseudoeuklidovského prostoru Minkowského máme nyní čtyřrozměrný prostor pseudoriemannovský. Je třeba podotknout, že geometrické vlastnosti zakřivených, neeuklidovských prostorů byly matematicky prozkoumány již v polovině minulého století. Zabývali se jimi C.F.Gauss, N.Lobačevský, J.Bolyai a zejména německý matematik B.Riemann. Avšak teprve Einsteinova OTR ukázala že tyto matematické prostory vyjadřují gravitační vlastnosti reálného světa, že náš *fyzikální* prostor je zakřiven. Geometrie reálného světa se tak stala součástí fyziky.

Metrické vlastnosti prostoru popisuje takzvaný *metrický tenzor* $g_{\mu\nu}$, pomocí něhož je možno zapsat interval ve tvaru

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \ .$$

Řecké indexy zde probíhají hodnoty $0, 1, 2, 3$ a přes odpovídající si horní a dolní indexy se sčítá. Metrický tenzor je symetrický a má tedy obecně deset různých složek (tzv. gravitačních potenciálů). Pro pseudoeuklidovský prostor Minkowského přechází metrický tenzor na tvar

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

v prvním přiblížení slabého gravitačního pole dostáváme

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+\frac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right) \end{pmatrix} .$$

Zde ϕ označuje gravitační potenciál. V silném gravitačním poli není ovšem metrický tenzor diagonální. Matematický formalismus OTR je poměrně náročný a nebudeme se jím zde zabývat. Podotkneme pouze, že od metrického tenzoru je možno odvodit takzvaný *Einsteinův tenzor křivosti* $G_{\mu\nu}$, který vystupuje ve slavné Einsteinově rovnici z roku 1916:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi\kappa}{c^4} T_{\mu\nu} \,. \tag{1.34}$$

Na pravé straně vystupuje *čtyřtenzor energie - hybnosti* $T_{\mu\nu}$, který udává rozložení hmoty v prostoru, κ je gravitační konstanta. Pokud jde o druhý člen na levé straně, má smysl jej uvažovat pouze u kosmologických problémů vesmíru jako celku; tzv.*kosmologická konstanta* Λ zde je velmi malá.

Einsteinova rovnice tedy spojuje křivost prostoru s rozložením hmoty. Ve skutečnosti představuje deset rovnic pro gravitační potenciály, a to nelineárních, neboť gravitační pole, které vyvolává zakřivení prostoru má samo též energii a působí vlastně samo na sebe. Přes mimořádnou matematickou obtížnost nalezl Schwarzschild první řešení Einsteinovy rovnice ještě v roce 1916. Šlo o řešení pro případ centrálního, sféricky symetrického pole, tedy zobecnění Newtonova gravitačního zákona. Ve sférických souřadnicích dává toto řešení pro interval

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) \,. \tag{1.35}$$

Veličina

$$r_g = \frac{2\kappa m}{c^2} \tag{1.36}$$

představuje známý Schwarzschildův poloměr, při jehož dosažení nastává singularita, gravitační kolaps a zhroucení do černé díry. Pro Slunce je tento poloměr roven asi 3 km, pro Zemi 0,9 cm. Obecně nebyly Einsteinovy rovnice dosud vyřešeny, je známo pouze několik dalších řešení dílčích, například Kerrovo řešení z r. 1963 pro rotující kouli. V OTR se ukazuje, že gravitační pole nerotující a rotující hmoty jsou různá.

Na rozdíl od STR, která je denně ověřována technickou praxí, setkáváme se s důsledky OTR pouze v kosmických podmínkách nebo při velmi precisních experimentech. Za první experimentální ověření OTR je možno považovat jev *stáčení perihelia planet.* Víme, že při sebemenší odchylce od Newtonova gravitačního zákona přestane se planeta pohybovat po uzavřené elipse a její perihelium se začne posouvat. Nejvýraznější je tento posun u Merkuru, činí 5 600" za století. Z větší části je způsoben poruchami se strany dalších planet a nesféričností Slunce, ale hodnotu 43" za století se před objevem OTR nedařilo vysvětlit. Ze Schwarzschildova řešení dostáváme pro tento posun

$$\delta\phi = \frac{6\pi\kappa m}{c^2 a(1-e^2)} = 42,9''/\mathit{století} \,. (1.37)$$

(a je velká poloosa, e excentricita dráhy Merkuru). U Venuše činí toto relativistické posunutí 8,6", u Země 3,8" za století, ale u některých hmotných hvězd je tento jev mnohem patrnější (např. posun periastra u pulsaru PSR 1913+16 činí $4,2^o$ za rok).

Dalším důsledkem OTR je ohyb světelných paprsků procházejících v blízkosti velmi hmotného tělesa. Pro Slunce dostáváme teoretickou hodnotu

$$\delta = \frac{4\kappa M}{Rc^2} = 1.75'' \,. \tag{1.38}$$

Tento efekt je možno ověřovat při zatmění Slunce, kdy se hvězdy ležící v těsné blízkosti zakrytého slunečního kotouče jeví posunuty ze svých obvyklých poloh. Památné měření Eddingtonovy výpravy v roce 1919 zjistilo hodnotu $1.98 \pm 0.12''$. Existuje celá řada dalších testů OTR, jako gravitační rudý posuv spektrálních čar pozorovatelný i v zemském gravitačním poli, gravitační dilatace času, zpoždění světelného signálu v gravitačním poli (radiový signál odražený od Venuše a procházející v blízkosti Slunce), ovlivnění gravitace rotací (Jupiter), ovlivnění precese setrvačníků aj. Významným důkazem by byl objev gravitačních vln, o nějž se, zatím bezúspěšně pokoušely výzkumné týmy amerického fyzika J.Webera a ruského V.B.Braginského. Weber se pokoušel detekovat současné rozkmitání těžkých (1.4 t) hliníkových válců vzdálených 1 000 km, Braginský pracoval s monokrystaly safíru a jeho aparatura by dokázala piezoelektricky zaznamenat délkové změny až 10^{-17} cm. Otevřenou otázkou zůstává také existence a vlastností černých děr, i když na ně byly vytypovány velmi vážné kandidátky mezi astronomickými objekty.

Fyzika černých děr však vyžaduje vzít v úvahu i zákony kvantové fyziky a kvantová teorie gravitace nebyla dosud vytvořena.

Příklady

1.1 Mion v kosmickém záření byl pozorován, jak v atmosféře urazil od svého vzniku do rozpadu 5 km rychlostí 0,99c. Jakou dobu existoval v naší pozorovací soustavě, jakou dobu ve vlastní klidové soustavě a jak silná vrstva atmosféry prošla kolem něho ve vlastní soustavě?

$$[1,67.10^{-5}\text{s},\ 2,33.10^{-6}\text{s},\ 0,7\text{km}]$$

1.2 V kosmickém záření se vyskytují protony o energii 10^{10}GeV. Za jak dlouho proletí naší Galaxií v naší vztažné soustavě a ve své vlastní?

$$[10^5\text{let},\ 5\text{min!}]$$

1.3 Z kosmické lodi pohybující se vzhleden k Zemi rychlostí 0,8c byla ve směru jejího pohybu vypuštěna raketa rychlostí 0,6c vzhledem k lodi. Vlastní délka rakety je 10 m. Jaká je délka této rakety s hlediska pozorovatele v lodi a s hlediska pozorovatele na Zemi?

[8 m, 3,24 m]

1.4 Fyzik hazardér, který přejel autem křižovatku na červenou a byl zastaven policistou se hájil tím, že v důsledku Dopplerova jevu viděl místo červené zelenou. Fyzikálně vzdělaný policista ho však stejně pokutoval, a to za nedovolenou rychlost. Určete tuto rychlost za předpokladu, že červené odpovídá spektrální čára $\lambda_0 = 700$nm a zelené $\lambda = 550$nm.

[71 000 km.s^{-1}]

1.5 Těleso se vzhledem k dané vztažné soustavě pohybuje rychlostí $0,8c$. Určete poměr mezi jeho hustotou v této soustavě a hustotou klidovou.

[2,78]

1.6 Kosmonaut na Měsíci pozoruje dvě kosmické lodi blížící se k němu z opačných stran rychlostmi 0,8c a 0,9c. Jaká je rychlost jedné z lodí měřená z paluby druhé?

[0,988c]

1.7 Určete rychlost a dráhu relativistické částice, na níž působí konstantní síla F. Porovnejte s rovnoměrně zrychleným pohybem v nerelativistické fyzice a ukažte, že rychlost částice nepřekročí c.

$[a = \frac{F}{m} = \text{konst},\ u = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}},\ x = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right),\ \text{při } t \to \infty, u \to c]$

1.8 Urychlovač dodává protonům energii $E = 500\text{GeV}$. Jaké rychlosti dosahují ? (Klidová energie protonu je $E_0 = 0,938\text{GeV}$)

$[v = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E^2}}\, c = 0,999998c]$

1.9 Jak velkou práci je třeba vynaložit na zvýšení rychlosti elektronu z $1,2.10^8\text{m.s}^{-1}$ na $2,4.10^8\text{m.s}^{-1}$ podle nerelativistické a relativistické mechaniky? (Klidová energie elektronu je 0,511 MeV)

[0,122 MeV, 0,296 MeV]

1.10 Mezon π^- (klidová energie 139,6 MeV) se rozpadá z klidu na mion μ^- (klidová energie 105,7 MeV) a antineutrino $\tilde{\nu}$. Určete energii mionu a antineutrina a uvolněnou kinetickou energii.

[109,8 MeV, 29,8 MeV, 33,9 MeV]

1.11 Určete vazebnou energii částice α v MeV, jsou-li klidové hmotnosti protonu, neutronu a částice α $m_p = 1,672\,65.10^{-27}$ kg, $m_n = 1,674\,95.10^{-27}$kg, $m_\alpha = 6,644.10^{-27}$kg.

[28,3 MeV]

1.12 Energie slunečního záření, které dopadá za jednotku času na čtvereční metr na hranici zemské atmosféry, představuje takzvanou *sluneční konstantu* $K = 1\ 327\ \text{W.m}^{-2}$, střední vzdálenost Země od Slunce je 1,5.10^{11}m. Zdrojem sluneční energie je tzv. vodíkový cyklus, při němž se vždy čtyři jádra vodíku (protony) o relativní atomové hmotnosti 1,008 mění na jedno jádro helia (4,0039). Určete úbytek hmotnosti Slunce a množství spáleného vodíku za sekundu. Odhadněte dobu během níž by se spálilo množství vodíku odpovídající dnešní hmotnosti Slunce 2.10^{30}kg.

$[4,2.10^6\text{t.s}^{-1},\ \ 5,9.10^8\text{t.s}^{-1},\ \ 10^{11}\text{let}]$

2. E L E K T R O S T A T I K A

1. Elektrický náboj

Základními stavebními kameny látky jsou elementární částice (elektrony, protony, neutrony), které vytvářejí sloľitějaí struktury (atomová jádra, atomy, molekuly). Částice mezi sebou interagují, vzájemně na sebe působí. Dnes známe čtyři typy takového vzájemného působení neboli čtyři druhy sil:

1. gravitační   2. slabé   3. *elektromagnetické*   4. silné.

S gravitačními silami jsme se setkali v mechanice; jejich velikost udává Newtonův gravitační zákon a jejich podstatu se snaľí objasnit OTR. Se slabými silami se setkáváme u některých druhů radioaktivních přeměn za účasti neutrina, silné síly drľí pohromadě atomová jádra a jsou zdrojem jaderné energie. V roce 1983 se podařilo experimentálně prokázat, ľe elektromagnetické a slabé síly jsou projevem téľe elektroslabé síly, takľe se počet základních typů sil zredukoval na tři. V denním ľivotě se vedle gravitace setkáváme předevaím s působením elektromagnetickým, které je také nejlépe prozkoumáno. Síly tření, přilnavost, soudrľnost těles a kapilarita, chemické vazby a reakce ľivé hmoty včetně svalové činnosti, sluneční záření i magnetické síly, to vae má svůj původ v elektromagnetických interakcích.

Elektromagnetické působení se projevuje pouze mezi některými částicemi, o nichľ pravíme, ľe jsou elektricky nabité, ľe nesou *elektrický náboj.* Tyto částice pak mohou vytvářet sloľité struktury, mohou se sloľitým způsobem pohybovat, a elektromagnetické síly mezi těmito strukturami mohou mít velmi sloľitou povahu - nemusí být centrální ani izotropní, mohou různým způsobem záviset na vzdálenosti a rychlostech částic a nemusí ani splňovat Newtonův zákon akce a reakce.

Podstatu elektrického náboje neznáme a jeho existence je pro nás základní experimentální fakt. Můľeme pouze uvést jeho vlastnosti; na rozdíl od matematických pojmů soubor těchto vlastností nebude nikdy úplný, experimentálně mohou být objevovány dalaí, nové vlastnosti. Stručně tyto vlastnosti shrneme:

1. Náboj neexistuje jako samostatná substance, je vľdy *vázán na nabité částice* a charakterizuje jejich elektromagnetické silové působení. Je moľné ho zjistit jen prostřednictvím tohoto silového působení; jediný osamocený náboj ve vesmíru by se nijak neprojevoval.

2. Na rozdíl od gravitačních sil jsou síly mezi náboji jak přitaľlivé tak odpudivé. To lze vysvětlit nejjednoduaeji tak, ľe existují *dva druhy náboje - kladný a záporný*, při čemľ náboje stejného znamení se vzájemně odpuzují, náboje opačného znamení se přitahují. S hlediska elektrických sil se nic nezmění, vyměníme-li znaménka u vaech nábojů. Ukazuje se, ľe v přírodě existuje symetrie mezi částicemi a antičásticemi: ke kaľdé částici existuje antičástice s opačným znaménkem elektrického náboje (a některých dalaích tzv. kvantových čísel). Tato podivuhodná symetrie souvisí i s vlastnostmi prostoru a času - názorně lze říci, ľe zrcadlový obraz částice má i opačný náboj.

3. Platí *zákon zachování náboje.* Náboj je nestvořitelný a nezničitelný, při reakcích mezi částicemi je celkový náboj před reakcí vľdy roven celkovému náboji po reakci. Celkové mnoľství elektrického náboje v elektricky izolované soustavě (tj. takové, jejíľ hranicí nemohou procházet náboje) zůstává stejné. Experimentální důkaz tohoto zákona podal M. Faraday r. 1843.

4. Náboj se nemění při pohybu, je *relativisticky invariantní.* Velikost náboje je stejná ve vaech vztaľných soustavách. Toto tvrzení podporuje i skutečnost, ľe atomy a molekuly tvořené nabitými částicemi jsou jako

celek elektricky neutrální.[3]

5. Náboj je *kvantován.* Existuje nejmenaí moľný takzvaný *elementární* náboj a vaechny náboje jsou jeho celými násobky. Pro tento fakt nemá fyzika dosud uspokojivé vysvětlení; kdyby se vaak podařilo experimentálně prokázat existenci takzvaného *magnetického monopólu*, tj. částice nesoucí jen jeden magnetický pól, vyplynulo by kvantování elektrického náboje z teorie kvantové fyziky.

Náa vesmír je elektricky *kvazineutrální*, tj. v kaľdém dostatečně velkém objemu je vľdy stejně velký kladný a záporný náboj. Kdykoliv by doalo k oddělení kladných a záporných nábojů, projevily by se mezi takovými oblastmi obrovské elektrické síly, které by se snaľily kvazineutralitu obnovit. Přitom podle posledních poznatků astrofyziky v naaem vesmíru převaľují částice nad antičásticemi; tato asymetrie je důsledkem malé převahy počtu částic nad antičásticemi na raných stadiích vývoje vesmíru (v poměru asi $1 : 10^9$). Poté, kdyľ převáľná větaina částic anihilovala s antičásticemi za vzniku záření (tzv. reliktové záření), staly se zbylé částice materiálem k tvorbě látkových struktur naaeho vesmíru.

Předpokládejme, ľe máme dva statické (nehybné) bodové náboje ve vakuu ve vzájemné vzdálenosti r_{21}. *Bodovým nábojem* rozumíme určitou abstrakci, fyzikální model nabité částice nebo tělesa, jehoľ rozměry jsou zanedbatelné ve srovnání se vzdáleností mezi tělesy. Jak uvidíme později, je-li náboj těles konečné velikosti rozloľen s kulovou symetrií, můľeme je povaľovat přesně za bodové náboje umístěné ve středu této symetrie.

Také předpoklad o tom, ľe náboje jsou statické je abstrakcí - reálné náboje jsou vľdy v pohybu. Vzniká proto otázka, zda je elektrostatika, věda o elektrických nábojích v klidu, vůbec oprávněna. Později uvidíme, ľe její opodstatnění ve skutečnosti vyplývá pouze z moľnosti vystředovat rychlé chaotické pohyby nábojů.

Podle *Coulombova zákona* síla, kterou statický bodový náboj q_1 působí na náboj q_2 ve vzdálenosti r_{21} ve vakuu, klesá se čtvercem vzdálenosti podobně jako síla gravitační a je dána vztahem

$$\vec{F}_{21} \;=\; k\,\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\,\vec{r}^{\,0}_{21} \;=\; k\,\frac{q_1 q_2}{r_{21}^3}\,\vec{r}_{21}\;. \tag{2.1}$$

Tato síla je *centrální* (míří podél spojnice dané jednotkovým vektorem $\vec{r}^{\,0}_{21}$), je přitaľlivá nebo odpudivá podle toho zda náboje mají nesouhlasná nebo souhlasná znamení (její velikost přitom na znaménkách nábojů nezávisí) a je *izotropní*, tj. nezávisí na směru v prostoru.

Máme-li v prostoru soustavu N bodových nábojů q_α, které vaechny působí na zkuaební náboj q_0, od něhoľ jsou vzdáleny $r_{0\alpha}$, potom se jejich silové účinky nezávisle vektorově sčítají (*princip superpozice*), takľe výsledná síla působící na náboj q_0 bude

$$\vec{F}_0 \;=\; k q_0 \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{q_\alpha}{r_{0\alpha}^2}\,\vec{r}^{\,0}_{0\alpha}\;. \tag{2.2}$$

Podstatným tvrzením Coulombova zákona je, ľe síla klesá se čtvercem vzdálenosti; to je ovaem nutno ověřit experimentálně. Přímý experimentální důkaz provedl Ch. A. Coulomb v roce 1785 pomocí torzních

[3]Svazky atomů a molekul se neodchylují v silných elektrických a magnetických polích. Experimentálně to ověřovali v r. 1960 J.G.King na molekulách vodíku a v roce 1963 J.C.Zorn na atomech cesia s přesností aľ $10^{-20}\,e$, kde e je elementární náboj. Elektrické náboje protonů a elektronů se v atomech dokonale kompenzují i tehdy, jsou-li tyto systémy tvořeny týmiľ částicemi pohybujícími se naprosto odlianým způsobem, například v atomu helia a molekule deuteria.

vah, které sám zkonstruoval (obr. 2.1).

Vahadélko z hedvábné navoskované niti délky $2r$ bylo zavěaeno na tenkém stříbrném drátku délky l =76 cm. Na jednom konci vahadélka byla malá kulička z bezové duae vyváľená na druhém konci papírovým kotoučkem. Po doteku se stejnou upevněnou elektricky nabitou kuličkou se obě kuličky nabily stejným nábojem a jejich vzájemná odpudivá síla byla vyrovnávána torzní silou drátku. Úhel zkrutu α mohl být přesně měřen odrazem světelného paprsku zrcátkem Z, celé zařízení bylo umístěno ve skleněném válci a elektricky izolováno. Moment tečné sloľky Coulombovy síly musí být roven momentu torznímu:

$$rF_t \;=\; \frac{\pi}{2}\,\frac{GR^4}{l}\alpha, \qquad F_{21} \;=\; \frac{F_t}{\cos\frac{\alpha}{2}}\;.$$

(G je modul smyku a R poloměr drátku).

obr. 2.1

Přes vysokou citlivost torzních vah dosahovala přesnost Coulombových experimentů 5 - 10% . Později byl experiment zpřesňován a prováděn i pro síly přitaľlivé. Coulomb sám měřil tímto způsobem i síly mezi póly dlouhých tyčových magnetů a ustanovil i Coulombův zákon pro náboje magnetické. Dnes víme, ľe magnetické pole je vytvářeno elektrickými proudy a otázka existence magnetického náboje (monopólu) zůstává stále otevřena.

Přesnějaí způsob, jak dokázat , ľe síly mezi bodovými náboji klesají se čtvercem vzdálenosti, je ověřit, ľe u dutých vodičů sídlí náboje jen na *vnějaím* povrchu; jak uvidíme, je to tvrzení ekvivalentní. Byl si toho vědom uľ H.Cavendish, který tímto způsobem ověřil Coulombův zákon jiľ v roce 1772. Jeho práce byly vaak publikovány aľ Maxwellem o sto let později. Moderní přesný experiment tohoto typu provedli v r. 1936 S.J. Plimpton a W.E.Lawton. Zákon převrácených čtverců byl tak experimentálně dokázán s přesností 10^{-9}. Zatím nejsou známy meze platnosti Coulombova zákona - platí jak pro vesmírné vzdálenosti tak pro vzdálenosti jaderné. Existují i dalaí moľnosti ověřování tohoto zákona - kdyby se jen nepatrně odchyloval od zákonitosti převrácených čtverců, fotony by musely mít nenulovou klidovou hmotnost a pozorovali bychom disperzi elektromagnetických vln ve vakuu.

Dosud jsme uľívali termín elektrický náboj ve dvou významech - jako fyzikální jev, vlastnost částic a jako fyzikální veličinu. Abychom mohli měřit *velikost elektrického náboje*, musíme zvolit konstantu k v (2.1) a zvolit tak jednotku náboje. V absolutní soustavě jednotek je tato konstanta kladena $k = 1$, v námi uľívané soustavě SI ji klademe

$$k \;=\; c^2.10^{-7} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \;=\; 0,8988.10^{10}\ \mathrm{N.m^2.C^{-2}}\;. \tag{2.3}$$

Konstanta v Coulombově zákonu je tak přímo vázána s rychlostí světla ve vakuu. Jednotka pro měření velikosti náboje takto zavedená se nazývá coulomb (C) a má fyzikální rozměr [TI] (čas krát proud).[4] Podle (2.3) jsme zavedli téľ dalaí konstantu ε_0 nazývanou *permitivita vakua* nebo téľ elektrická konstanta. Vyjadřuje se v jednotkách farad na metr ($\mathrm{F.m^{-1}}$) a má hodnotu $\varepsilon_0 = 8,854.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$. Tato konstanta nemá ovaem ľádný bezprostřední fyzikální význam a souvisí pouze s volbou soustavy jednotek SI.

Po zavedení jednotky elektrického náboje se můľeme ptát, jakou má velikost *elementární náboj*, nejmenaí moľný náboj, jaký nesou elementární částice. Přímý způsob stanovení elementárního náboje (a zároveň důkaz kvantování náboje) představuje *Millikanův experiment* z roku 1911 (viz obr. 2.2). Při tomto experimentu jsou do prostoru mezi vodorovně orientovanými deskami kondenzátoru vstřikovány drobné olejové kapičky a je mikroskopem pozorován jejich pohyb. Systém je umístěn ve vakuové komoře za sníľeného

[4] Coulomb je tedy ampérsekunda.

obr. 2.2

tlaku vzduchu a termostatován. Kapičky nesou malé elektrické náboje získané třením při rozstřikování; jejich náboj je moľno případně měnit ionizujícím zářením. Pokud na kondenzátor není podáno napětí, budou se kapičky pohybovat vertikálně dolů pod vlivem tíľe, vztlaku a odporu prostředí, který je moľno popsat Stokesovou silou

$$F_S \;=\; 6\pi\eta r v \;,$$

kde r je poloměr kapiček, v jejich rychlost a η dynamická viskozita vzduchu při daném tlaku. Díky odporu prostředí se rychlost kapiček v_g ustálí jako konstantní. Podáme-li na kondenzátor napětí, bude se táľ kapička pohybovat vzhůru k opačně nabité desce kondenzátoru, opět konstantní rychlostí v_E. Změříme-li rychlost kapičky v obou případech, můľeme z pohybových rovnic (označíme m hmotnost kapičky, m' hmotnost objemu vytlačeného vzduchu, σ hustotu oleje, ρ hustotu vzduchu)

$$F_g \;=\; mg - m'g - 6\pi\eta r v_g \;=\; 0\;, \qquad F_E \;=\; qE - mg + m'g - 6\pi\eta r v_E \;=\; 0$$

určit poloměr kapičky (obtíľně měřitelný) a její náboj:

$$r \;=\; 3\sqrt{\frac{\eta v_g}{2(\sigma-\rho)g}}\;, \qquad q \;=\; \frac{6\pi\eta r}{E}(v_g + v_E)\;.$$

Statistickým proměřováním mnoha kapiček zjistíme, ľe jejich náboje nejsou rozloľeny spojitě, ľe jsou celými násobky nejmenaího, elementárního náboje. Typické hodnoty pozorované Millikanem byly: $r = 2 - 4\ \mu m$, $E = 10^4 - 10^5$V.m^{-1}, $v \approx 0,1$ mm.s^{-1}. Pro elementární náboj Millikan dostal $e \;=\; (1,591 \pm 0,003).10^{-19}$ C. Jeho kapičky nesly 5 - 25 elektronů.

I kdyľ Millikanův experiment byl později různě zdokonalován, jeho přesnost není přília vysoká. Jinou moľnost, jak určit elementární náboj poskytuje elektrolýza. Měřením proudu a doby můľeme určit náboj přenesený ionty v elektrolytu. Jde-li o jednovazné ionty (např. Ag^+), potom k vyloučení jednoho molu stříbra je zapotřebí takzvaného *Faradayova náboje* $F \;=\; 9,649.10^4$ C.mol^{-1}. Elementární náboj pak získáme, dělíme-li Faradayův náboj Avogadrovou konstantou:

$$e \;=\; \frac{F}{N_A} \;=\; 1,602.10^{-19}\ \mathrm{C}\;. \tag{2.4}$$

Existuje řada poměrně přesných metod umoľňujících měřit takzvaný měrný náboj částic, tj. poměr náboje a hmotnosti částice; jde například o pozorování pohybu nabitých částic v elektrických a magnetických polích. Pro elektron dostáváme měrný náboj $\frac{q_e}{m_e} = -1,759.10^{11}$ C.kg^{-1}. Pak můľeme ze znalosti náboje částice určit její hmotnost a naopak.

Nabité částice mohou být rozloľeny s velkou hustotou tak, ľe se náboj můľe jevit spojitým. Ve skutečnosti ovaem jak představa o soustavě bodových nábojů, tak o spojitě rozloľeném náboji jsou pouhými abstrakcemi, modely více či méně vystihujícími skutečný stav. Jsou-li náboje rozloľeny v prostoru a je-li v daném objemu V celkový náboj $q = \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha$, můľeme definovat střední hustotu náboje v tomto objemu jako $\bar{\rho} = \frac{q}{V}$. Zvolíme-li v okolí daného bodu o souřadnicích x, y, z malý objem ΔV, který obsahuje náboj Δq, a budeme jej kolem tohoto bodu stahovat, můľeme definovat *objemovou hustotu náboje* vztahem

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} . \tag{2.5}$$

Tento vztah bývá někdy zapisován jako derivace $\frac{dq}{dV}$; není to vaak korektní, nebo¿¿ ve skutečnosti neznáme funkční vztah $q(V)$. Naproti tomu celkový náboj v daném objemu V můľeme vyjádřit jako

$$q = \int_V \rho(x, y, z)\, dV . \tag{2.6}$$

Také tento vztah můľeme povaľovat za definici objemové hustoty náboje.

Jak uvidíme, vaechny veličiny a vztahy můľeme vyjadřovat buď ve formě integrální (vázány na nějaký objem, plochu či křivku) nebo diferenciální (jako funkce souřadnic daného bodu). S tohoto hlediska je náboj veličina integrální a objemová hustota náboje odpovídající veličina diferenciální. Měříme ji zřejmě v C.m^{-3}. Vedle objemové hustoty náboje můľeme zavést *ploanou hustotu náboje* σ a *lineární hustotu náboje* τ, nahradíme-li objemový integrál v (2.6) integrálem ploaným nebo křivkovým. Ploanou hustotu pak měříme v C.m^{-2}, lineární v C.m^{-1}.

Elektrické náboje se projevují pouze svým silovým působením; to ovaem znamená, ľe při jejich vzájemném přemis¿¿ování je třeba konat práci. Uvaľujme nějakou soustavu bodových nábojů rozmístěných v daných bodech prostoru a ptejme se, jak tato soustava vznikla. Můľeme si představovat, ľe náboje byly původně vzdáleny v nekonečnu a postupně byly přibliľovány do výsledných poloh. Vnějaí síly přitom konaly práci - kladnou, pokud překonávaly odpudivé síly mezi náboji, zápornou, pokud působily proti přitaľlivým silám nábojů.

Coulombova síla mezi dvěma náboji, podobně jako Newtonova síla gravitační, můľe být vyjádřena jako záporně vzatý gradient potenciální energie W

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}} .$$

Tato energie závisí pouze na velikostech obou nábojů a jejich vzdálenosti a nikoli na tom, po jaké dráze byl druhý náboj k prvnímu z nekonečna přibliľován. Coulombovy síly jsou, podobně jako síly gravitační, konzervativní.

Budeme-li nyní ke dvěma nábojům přibliľovat dalaí, uplatní se princip superpozice a výsledná práce nebude záviset ani na pořadí ani na dráze po níľ náboje přibliľujeme. Tato práce vnějaích sil představuje tedy celkovou *elektrostatickou energii soustavy*, která má charakter energie potenciální (je funkcí vzdáleností) a můľeme ji zapsat ve tvaru dvojnásobné sumy

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\alpha,\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N} \frac{q_\alpha q_\beta}{r_{\alpha\beta}} . \tag{2.7}$$

Koeficient 1/2 je uveden z toho důvodu ľe v sumě je kaľdá dvojice nábojů započtena dvakrát.

Uvedeme vlastnosti některých konkretních nábojových soustav.

1. Rovnováha soustavy bodových nábojů

Existují takové způsoby rozmístění bodových nábojů, ľe vaechny náboje jsou v rovnováze, tj. působí na ně nulová výsledná síla. Umístěme například n stejných nábojů q symetricky po obvodu kruľnice a umístěme do středu kruľnice náboj q_0. K dosaľení rovnováhy musíme zřejmě volit pro

$$
\begin{aligned}
n &= 2 \qquad & q_0 &= -\frac{q}{4} \\
n &= 3 \qquad & q_0 &= -\frac{q}{\sqrt{3}} \\
n &= 4 \qquad & q_0 &= -\frac{2\sqrt{2}+1}{4}\, q\ .
\end{aligned}
$$

Můľeme ověřit, ľe ve vaech těchto případech bude elektrostatická energie rovna nule. Důleľitá je ovaem otázka, zda rovnováha těchto soustav je stabilní či labilní. Přitom musíme uvaľovat malé vychýlení nábojů z jejich rovnováľných poloh a zjia¿¿ovat, zda síly ostatních nábojů budou výchylku dále zvětaovat nebo zda budou vracet náboj do rovnováľné polohy. Můľeme téľ zjistit, zda potenciální energie jako funkce takové výchylky má maximum či minimum. Tímto způsobem ověříme, ľe rovnováha soustavy bodových nábojů je *vľdy nestabilní* a ľe náboje nelze udrľovat ve stabilní rovnováze čistě elektrostatickými silami. Toto tvrzení je obsahem tzv. *Earnshawovy věty* a později je zdůvodníme obecně.

2. Elektrostatická energie lineárního krystalu

Mějme nekonečnou řadu bodových nábojů střídavě kladných a záporných, téľe velikosti (například rovné elementárnímu náboji) rozloľených podél přímky ve vzájemných vzdálenostech a. Takovému uspořádání někdy říkáme lineární krystal. Snadno určíme elektrostatickou energii připadající na jeden náboj:

$$
W \;=\; \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\, 2\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\right) \;=\; -2\ln 2\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \;=\; -\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \;=\; -2,30.10^{-28}\ \frac{\alpha}{a}\ .
$$

Jako α jsme zde označili veličinu $\alpha = 2\ln 2 = 1.386$ nazývanou Madelungova konstanta, řádu jednotky. Pololíme-li a rovné řádově typické vzdálenosti iontů v krystalu 10^{-10}m, vidíme, ľe energie na jeden náboj je záporná a řádově velikosti 10^{-18} joulů. Rovnováha lineárního krystalu vůči příčnému vychýlení je stabilní, vůči podélnému nestabilní.

3. Prostorový iontový krystal

Iontové krystaly představují prostorové uspořádání elektrických nábojů. Uvaľme například element takového krystalu v podobě krychle o hraně a, v jejíchľ rozích jsou rozmístěny záporné elementární náboje a v jejímľ centru leľí kladný elementární náboj. Elektrostatická energie takového krystalu bude

$$
W \;=\; \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(12+\frac{12}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{16}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 a},\quad \alpha = 13.6\ .
$$

Výpočet energie prostorového krystalu připadající na jeden iont vyľaduje počítač. Výsledná energie je záporná a liaí se od energie lineárního krystalupouze hodnotou Madelungovy konstanty. Tak pro krystal chloridu sodného dostáváme $\alpha = 1.747$, pro oxid zinečnatý $\alpha = 1.638$ atd. Záporná energie iontového krystalu s klesajícím a klesá a krystal má tedy tendenci se zhroutit. Jeho stabilitu tedy musí zajia¿¿ovat jiné neľ elektrostatické síly.

4. Kulově symetrický spojitě rozloľený náboj

Uvaľme objemově nabitou kouli poloměru R o nábojové hustotě ρ. Energie takového spojitého uspořádání náboje se musí rovnat práci vynaloľené na jeho vytvoření. Představme si, ľe jsme kouli vytvářeli tak jako se lepí sněhové koule; ke kulovému náboji poloměru r jsme vľdy přidávali dalaí kulovou slupku tloua¿¿ky dr. Protoľe kulový náboj se navenek chová jako bodový náboj umístěný v centru, můľeme práci vynaloľenou na přidání dalaí slupky přirovnat energii dvou bodových nábojů ve vzdálenosti r. Integrací pak dostaneme

$$
W \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{4}{3}\pi r^3\rho\frac{4\pi r^2\rho dr}{r} \;=\; \frac{4\pi R^5\rho^2}{15\varepsilon_0} \;=\; \frac{3}{5}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}\ ,
$$

kde Q je celkový náboj koule. Kdybychom povaľovali například elektron za takovou objemově nabitou kouli, mohli bychom tuto energii přirovnat relativistické klidové energii částice $m_e c^2$ a určit tak její poloměr. Pro elektron (s vynecháním koeficientu 3/5) najdeme takzvaný "klasický poloměr elektronu"

$$r_e \;=\; \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \;=\; 2,82.10^{-15}\mathrm{m}\;.$$

Přestoľe takový model elektronu je s hlediska moderní fyziky neudrľitelný (není také jasné, které obrovské síly by mohly drľet takový náboj pohromadě), odpovídá získaný poloměr přibliľně rozměrům elementárních částic.

Pokud by uvaľovaný kulově symetrický náboj byl ploaný, můľeme jeho energii určit opět tak, ľe k částečnému ploanému náboji Q', který se chová navenek jako bodový náboj v centru, přidáváme dalaí náboj dQ'. Oba náboje teď zůstávají ve stálé vzdálenosti R. Pak máme

$$W \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^Q \frac{Q'dQ'}{R} \;=\; \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}\;.$$

2. Elektrostatické pole

Vra¿¿me se k soustavě bodových nábojů $q_1, \ldots, q_N$, které vaechny působí na zkuaební náboj q_0 sídlící v bodě o souřadnicích x, y, z. Sílu na náboj q_0 vyjádřenou vztahem (2.2) můľeme zapsat takto:

$$\vec{F}_0 \;=\; q_0\vec{E}(x,y,z), \quad \text{kde} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{q_\alpha}{r_{0\alpha}^2}\,\vec{r}^{\,0}_{0\alpha}\;. \tag{2.8}$$

Vektor $\vec{E}$, který jsme zavedli vztahem (2.8), se nazývá *intenzitou elektrostatického pole* vytvářeného soustavou bodových nábojů. Má fyzikální význam síly působící v daném bodě na jednotkový zkuaební náboj a měří se v jednotkách newton na coulomb, kterou obvykle zapisujeme jako volt na metr ($\mathrm{V.m^{-1}}$), kde voltem rozumíme joule na coulomb. Vztah (2.8) nám umoľňuje určit sílu na daný náboj se strany ostatních nábojů tak, ľe nejdříve určíme v kaľdém bodě intenzitu elektrostatického pole (pak můľeme zapomenout na náboje, které toto pole vytvářejí) a potom vynásobíme vektor intenzity pole nábojem v daném místě. Znalost rozloľení nábojů a znalost intenzity pole, které tyto náboje vytvářejí je ekvivalentní.

Můľe vzniknout otázka nakolik je elektrostatické pole fyzikálně reálné, nakolik vektor $\vec{E}(x,y,z)$ popisuje nějaký fyzikální stav prostoru, v němľ elektrostatické síly působí. V rámci elektrostatiky nelze tuto otázku zodpovědět, nebo¿¿ elektrostatické pole se projevuje pouze silovým působením na zkuaební náboj, a to můľeme popsat ekvivalentním způsobem superpozicí Coulombových sil se strany ostatních nábojů. Jak uvidíme, teprve časově proměnné, elektromagnetické pole se projevuje jako nová fyzikální realita, schopná existovat mimo elektrické náboje, s vlastní energií, hybností atd. Elektrostatické pole pak můľeme chápat jako zvláatní případ elektromagnetického pole, navíc matematicky vystředovaný, protoľe reálné náboje nejsou nikdy statické.

Existuje výhodný způsob názorného zobrazování elektrostatického pole *siločarami.* Jsou to křivky, jejichľ tečna má v kaľdém bodě směr síly působící na kladný jednotkový zkuaební elektrický náboj a hustota siločar je úměrná velikosti této síly. Moľnost jejich zavedení vyplývá z Coulombova zákona. Mějme bodový kladný náboj q a definujme, ľe z něho vychází N siločar; ty zřejmě probíhají radiálně po přímkách vycházejících z náboje a jsou v prostoru rozděleny izotropně, se stejnou hustotou ve vaech směrech. Veličina N tedy představuje celkový tok siločar vycházejících z náboje a protínajících kolmo kulové plochy poloměru r se středem v bodě, kde je umístěn náboj. Hustota toku siločar, tj. počet siločar procházejících kolmo jednotkovou plochy bude $\frac{N}{4\pi r^2}$. Budeme-li normovat hustotu toku siločar tak, ľe jej přirovnáme velikosti intenzity elektrického pole, dostaneme

obr. 2.3

$$\frac{N}{4\pi r^2} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,,$$

a tedy

$$N \;=\; \frac{q}{\varepsilon_0}\,.$$

Můľeme tedy říci, ľe z kaľdého kladného náboje vychází právě $\frac{q}{\varepsilon_0}$ siločar a do záporného náboje stejný počet siločar vstupuje. Kromě toho mohou siločáry také odcházet nebo přicházet z nekonečna. Protoľe platí zákon zachování náboje a veličina q se nemění ani za pohybu, můľeme postulovat ľe celkový počet siločar vycházející z elektrického náboje se zachovává a nemění se ani při pohybu náboje. Pro pohybující se náboje nebude ovaem uľ platit Coulombův zákon a siločáry se mohou v prostoru různě zhua¿¿ovat a zakřivovat, ale ľádná se nemůľe ztratit ani vzniknout. Můľeme říci, ľe siločáry jsou jakési "vlasy" elektrického náboje, které mají tu vzácnou vlastnost, ľe principiálně nemohou vypadávat. Na obr. 2.3 vidíme rozloľení siločar bodových nábojů a dvojic nábojů stejného a opačných znamení.

Názorný pojem siločáry ovaem ani nemusíme zavádět. Stačí definovat integrální veličinu *tok intenzity elektrického pole* plochou S vztahem

$$\Phi \;=\; \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}\,. \tag{2.9}$$

Tento tok je skalární veličina a měří se v jednotkách volt krát metr (V.m). Hustota toku, tj. intenzita elektrického pole je pak odpovídající veličinou diferenciální a je to vektor. Tok vektoru malou rovinnou ploakou je zřejmě maximální, je-li rovnoběľný s normálou k této ploace a nulový, je-li k této normále kolmý; to právě vyjadřuje skalární součin v integrálu (2.9).

Určíme nyní tok intenzity elektrického pole uzavřenou plochou obklopující bodový kladný náboj. Přijmeme přitom dohodu, ľe tok vytékající z objemu uzavřeného plochou budeme povaľovat za kladný, tok vtékající za záporný. Je-li tato plocha kulová a náboj q v jejím středu, máme zřejmě

$$\Phi \;=\; \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\oint_S dS \;=\; \frac{q}{\varepsilon_0}\,.$$

Bude-li plocha obklopující náboj obecného tvaru (obr. 2.4), můľeme uvnitř této plochy vést plochu kulovou se středem v náboji a ukázat, ľe toky oběma těmito plochami jsou stejné.

Vedeme-li kuľelovou plochu s malým vrcholovým úhlem, která vytne na kulové ploae ploaku dS' a na obecné ploae ploaku dS, budou toky těmito ploakami $d\Phi' = E(r)\,dS'$ a $d\Phi = E(R)\,dS\cos\theta$. Přitom vaak

obr. 2.4 obr. 2.5

intenzity pole jsou v převráceném poměru čtverců vzdáleností a velikosti ploaek v poměru $\frac{dS'}{dS} = \frac{r^2 \cos\theta}{R^2}$. Máme tedy $d\Phi' = d\Phi$. Názorně je zřejmé, ľe kaľdá siločára, která protne myalenou kulovou plochu, protne i obklopující plochu obecného tvaru. Tento závěr bude platit i tehdy, nebudou li siločáry rozděleny v prostoru izotropně a dokonce i budou-li zakřiveny. Důkaz lze snadno rozaířit na případ nebude-li plocha konvexní (siločára protne plochu vícenásobně) a bude-li náboj leľet vně plochy; v tomto případě bude zřejmě tok nulový. Můľeme to zdůvodnit i podle obr. 2.5. Leľí-li náboj mimo plochu S, obklopíme jej opět myalenou kulovou plochou S', která se plochy S těsně dotýká a propojíme obě plochy malým spojovacím kanálkem. Náboj teď leľí uvnitř spojené plochy $S + S'$ a tok touto plochou je $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$. Tento tok vaak připadá celý na kulovou plochu S', takľe tok plochou S je nulový.

Bude-li uvnitř uzavřené plochy více nábojů, můľeme pouľít princip superpozice a zformulovat obecný *Gaussův zákon*:

Tok intenzity elektrického pole libovolnou uzavřenou plochou je roven celkovému náboji obklopenému touto plochou dělenému ε_0.

Matematicky můľeme Gaussův zákon zapsat pro případ bodových nábojů a spojitě rozloľených nábojů takto:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\alpha q_\alpha = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \,. \tag{2.10}$$

Gaussův zákon jsme sice odvozovali pro pole elektrostatické, ale protoľe se velikost náboje a tedy i celkový tok siločar vyjádřený jako tok intenzity elektrického pole nemění ani jsou-li náboje v pohybu, můľeme předpokládat, ľe Gaussův zákon platí zcela obecně i pro pohybující se náboje a časově proměnná elektrická pole. Je to jeden z nejobecnějaích přírodních zákonů a ve zvláatním případě statických bodových nábojů z něho plyne zákon Coulombův.

Podstatným tvrzením Gaussova i Coulombova zákona je, ľe intenzita elektrostatického pole bodového náboje klesá se čtvercem vzdálenosti. Ukáľeme, ľe toto tvrzení je ekvivalentní skutečnosti, ľe *na vnitřním povrchu dutých vodičů nejsou elektrické náboje.* Představme si tenkostěnnou dutou vodivou kouli nabitou elektrickým nábojem. Protoľe náboje se mohou v objemu vodiče volně pohybovat, rozmístí se na povrchu vodiče takovým způsobem, aby elektrostatické pole uvnitř vodiče bylo nulové. Kdyby tomu tak nebylo, nastal by dalaí pohyb nábojů ve vodiči a museli bychom vyčkat, aľ se rozloľení nábojů ustálí. Vzhledem ke kulové symetrii můľeme dále očekávat, ľe rozloľení nábojů bude rovněľ kulově symetrické, s ploanou hustotou σ.

Vyjdeme-li z předpokladu, ľe platí Gaussův zákon, můľeme vést uvnitř vodiče myalenou kulovou Gaussovu plochu. Tok intenzity elektrického pole touto plochou bude roven nule, a tedy i náboj uvnitř musí být nulový. Znamená to, ľe na vnitřním povrchu vodiče nebudou náboje. Potom i intenzita elektro-

obr. 2.6 obr. 2.7

statického pole v celé dutině bude rovna nule.

Zpětně vyjdeme z předpokladu, ľe pole uvnitř dutiny je nulové. V kaľdém bodě dutiny můľeme vést dvojkuľel s vrcholem v tomto bodě tak, ľe nám vytne na opačných koncích kulové ploaky ΔS, $\Delta S'$ (viz obr. 2.6). Prostorový úhel vymezený kuľelovou plochou označíme $\Delta\Omega$. Nabité ploaky můľeme povaľovat za bodové náboje o velikosti $\sigma\Delta S, \sigma\Delta S'$. Předpokládejme dále, ľe pole bodového náboje klesá se vzdáleností jako neznámá funkce $f(r)$. Podle principu superpozice vytváří vybraná dvojice ploaek v bodě A pole o velikosti $E = k\sigma[\Delta S f(r_1) - \Delta S' f(r_2)]$. Protoľe vaak celý povrch koule můľeme takto pokrýt dvojicemi ploaek vy¿¿atými úzkými kuľelíky, musí být v kaľdém případě příspěvek takových dvojic bodových nábojů roven nule. Musí tedy platit

$$\frac{f(r_1)}{f(r_2)} = \frac{\Delta S'}{\Delta S} = \left(r_2^2 \frac{\Delta\Omega}{\cos\theta}\right) : \left(r_1^2 \frac{\Delta\Omega}{\cos\theta}\right) = \frac{r_2^2}{r_1^2} \, .$$

Vidíme tedy, ľe neznámá funkce f klesá se čtvercem vzdálenosti. Experimentální ověřování skutečnosti, ľe na vnitřním povrchu vodičů nejsou náboje je moľno provádět s velkou přesností a ověřovat tak Coulombův, resp. Gaussův zákon (obr. 2.7). Na tomto principu je zaloľen van de Graaffův elektrostatický generátor (obr. 2.8).

obr. 2.8

Ze střídavého zdroje se přes usměrňovač nabíjí nekonečný pás z pogumovaného hedvábí; pás se pohybuje rychlostí několika desítek metrů za sekundu. Náboj se tak přenáaí na vnitřní povrch velké duté vodivé koule a odtud se sám okamľitě přemis¿¿uje ne vnějaí povrch. Tak lze kouli nabít značným nábojem na potenciál několika milionů voltů.

Gaussův zákon (2.10) můľeme pomocí Gaussovy věty vektorové analýzy vyjádřit i v diferenciálním tvaru. Platí

$$\Phi \;=\; \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV \;=\; \int_V \mathrm{div}\vec{E}\, dV\ .$$

Vzhledem k tomu, ľe rovnost těchto dvou objemových integrálů musí být splněna pro libovolný objem, musí se rovnat i integrované funkce. Vedle toho z podmínky konzervativnosti elektrostatického pole a s pouľitím Stokesovy věty máme

$$\Gamma \;=\; \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} \;=\; \int_S \mathrm{rot}\vec{E}\cdot d\vec{S} \;=\; 0\ .$$

Dostáváme tak soustavu *Maxwellových rovnic* pro elektrostatické pole:

$$\mathrm{div}\ \vec{E} \;=\; \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \mathrm{rot}\ \vec{E} \;=\; 0\ . \tag{2.11}$$

První z těchto rovnic je tedy vlastně Gaussův zákon v diferenciálním tvaru a nazývá se téľ rovnicí Poissonovou. Druhá rovnice vyjadřuje, ľe elektrostatické pole je potenciální a umoľňuje zavést skalární elektrostatický *potenciál* $\varphi(x, y, z)$ vztahem

$$\vec{E} \;=\; -\nabla\varphi\ . \tag{2.12}$$

Znaménko u gradientu potenciálu bylo zvoleno tak, aby *potenciální rozdíl*

$$\varphi_{21} \;=\; \varphi_2 - \varphi_1 \;=\; \int_1^2 d\varphi \;=\; -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

vyjadřoval práci vnějaích sil při přemis¿¿ování jednotkového elektrického náboje proti silám pole. Je-li tato práce kladná, zvyauje potenciál náboje.

Naproti tomu zavádíme veličinu opačnou potenciálnímu rozdílu, která vyjadřuje práci sil pole a nazývá se *napětí*:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \, .$$

Potenciál je určen s přesností na aditivní konstantu a nulový potenciál můľeme volit kdekoli. Jsou-li vaechny náboje rozmístěny v konečné oblasti prostoru, můľeme zvolit nulový potenciál v nekonečnu. Potom

$$\varphi = -\int_\infty^{A(x,y,z)} \vec{E} \cdot d\vec{l} \, .$$

Je zřejmé, ľe vaechny tři veličiny, potenciál, potenciální rozdíl a napětí mají týľ fyzikální rozměr a měří se v týchľ jednotkách joule na coulomb, kterou nazýváme volt (V).

Zavedením skalárního potenciálu je nyní druhá z rovnic (2.11) splněna automaticky a dosazením do první z nich dostáváme

$$\mathrm{div}\vec{E} = -\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\varphi = -\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, ,$$

neboli

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \, . \tag{2.13}$$

Tato rovnice se nazývá *Laplaceova - Poissonova.*

V té části prostoru, kde je hustota nábojů nulová, musí potenciál splňovat *Laplaceovu rovnici*

$$\Delta\, \varphi = 0 \, , \tag{2.14}$$

s přísluanými okrajovými (hraničními) podmínkami. Funkce, které vyhovují Laplaceově rovnici se nazývají harmonické a mají celou řadu zajímavých vlastností. Jednu z nich vyjadřuje tzv. "věta o střední hodnotě potenciálu". Podle ní je *hodnota potenciálu ve středu kulové plochy rovna střední hodnotě potenciálu na této ploae.* Můľeme se o tom přesvědčit jednoduchou fyzikální úvahou. Mějme v nějakém místě náboj q, který vyvolává v bodě A potenciál φ. Přivedeme-li do bodu A z nekonečna náboj q' , potom energie takto vzniklé soustavy bude rovna $q'\varphi$. Náboj q' se vaak navenek chová stejně, jako kdyby byl rovnoměrně rozprostřen na kulové ploae se středem v A, kde náboj q budí střední hodnotu potenciálu $\bar{\varphi}$. Je tedy $q'\varphi = q'\bar{\varphi}$. Z věty o střední hodnotě potenciálu například plyne, ľe v místě, kde nejsou náboje, nemůľe mít potenciál minimum a elektrostatické pole tak nemůľe udrľovat vloľený náboj ve stabilní rovnováze (*Earnshawova věta*). Je-li potenciál na hranici nějaké oblasti nulový, nemůľe mít nikde v této oblasti extrém a musí zde být tudíľ vaude roven nule.

V kartézských souřadnicích můľeme Laplaceovu rovnici zapsat jako

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \, .$$

Odtud je rovněľ zřejmé, ľe potenciál nemůľe mít extrémy - v takovém místě by vaechny druhé parciální derivace musely být buď kladné nebo záporné.

Potenciál elektrostatického pole bodového náboje je zřejmě

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{q}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \, . \tag{2.15}$$

Soustava N bodových nábojů tak vytvoří v bodě o souřadnicích x, y, z potenciál

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_\beta \frac{q_\beta}{r_\beta} \, . \tag{2.16}$$

Pomocí (2.16) můľeme zapsat energii soustavy bodových nábojů (2.7) jako

$$W = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^N q_\alpha\varphi_\alpha \tag{2.17}$$

obr. 2.9

(φ_α je potenciál vytvářený vaemi ostatními náboji v místě, kde sídlí náboj q_α). Je-li náboj rozloľen spojitě v objemu V, přejde suma v (2.17) na integrál a s pouľitím Laplaceovy - Poissonovy rovnice a Gaussova zákona můľeme vyjádřit energii v tomto objemu jako

$$W_V = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varphi\Delta\varphi dV = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_V \mathrm{div}(\varphi\nabla\varphi)dV - \int_V (\nabla\varphi)^2 dV\right] =$$

$$-\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\oint_S (\varphi\nabla\varphi)dS - \int_V (\nabla\varphi)^2 dV\right] .$$

Plochu S ohraničující objem V můľeme nyní rozpínat do nekonečna; přitom bude integrand v ploaném integrálu klesat jako $\frac{1}{r}$ a v nekonečnu tento integrál vymizí. Zbývá tedy objemový integrál, který se nyní rozprostře na celý prostor:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2 dV = \int_\infty w dV . \tag{2.18}$$

Zde jsme označili *hustotu energie elekrostatického pole*

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} . \tag{2.19}$$

Energii prostorově rozloľených statických nábojů můľeme tedy vyjádřit buď pomocí nábojů a jejich vzdáleností nebo na základě znalosti jimi vyztvářeného elektrostatického pole; oba způsoby jsou matematicky ekvivalentní. Hustotu energie *elektrostatického* pole nemůľeme v prostoru nijak zjistit, fyzikální význam má pouze celková energie soustavy daná integrálem (2.18).

Zabývejme se nyní úlohou určit elektrostatické pole a potenciál daného rozloľení elektrických nábojů. Nech¿¿ tyto náboje jsou rozloľeny v objemu V a my máme určit pole a potenciál v bodě A o polohovém vektoru $\vec{r}$. Podle principu superpozice můľeme objem V rozdělit na malé, bodové náboje ρdV s polohovými vektory $\vec{r}'$. Označme dále vektor průvodiče daného bodového náboje s bodem A jako $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ (viz obr. 2.9). Intenzitu elektrostatického pole a potenciál pak najdeme integrováním

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(x',y',z')\vec{R}\, dV}{R^3} , \qquad \varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(x',y',z')\, dV}{R} . \tag{2.20}$$

Je-li náboj rozloľen ploaně nebo lineárně, nastoupí místo objemových integrálů a hustot integrály a hustoty ploané, resp. lineární.

Je otázka, zda integrály (2.20) budou poskytovat konečné a spojité hodnoty, zejména v tomto případě, bude-li bod A leľet uvnitř objemu V. Potom totiľ bude ve jmenovateli integrované funkce nula a integrál můľe, ale nemusí konvergovat. Z obecné teorie potenciálu vyplývá pro objemové rozloľení nábojů:

1. Je-li funkce ρ konečná a dostatečně hladká uvnitř objemu V, bude pole $\vec{E}$ *vaude* konečné a spojité a potenciál φ bude mít navíc i parciální derivace alespoň prvního řádu.

2. Je-li náboj rozloľen ploaně s hustotou σ, není na nabité ploae intenzita pole definována a potenciál zde nemá derivaci. Při průchodu touto plochou zůstávají tečné sloľky intenzity pole spojité, zatímco normálové se mění skokem o $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Uvedené hraniční podmínky na nabité ploae snadno získáme z Gaussovy a Stokesovy věty. Představíme-li si nízký válcový objem těsně přimykající k této ploae, s osou ve směru normály, potom můľeme zanedbat tok pole pláatěm a uvaľovat jen tok podstavami ΔS. Z Gaussova zákona pak máme

$$(E_{1n} - E_{2n})\ \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}\ .$$

Vedeme-li uzavřenou křivku tak, ľe dvě její větve délky Δl procházejí těsně podél obou stran plochy, dostaneme ze Stokesovy věty

$$(E_{1t} - E_{2t})\ \Delta l = 0\ .$$

Na nabité ploae je tedy potenciál spojitý a pro normálové a tečné sloľky intenzity pole platí

$$\mathrm{Div}\ \vec{E} = E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ , \qquad |\mathrm{Rot}\ \vec{E}| = E_{1t} - E_{2t} = 0\ . \tag{2.21}$$

Při výpočtu intenzity pole můľeme tedy pouľít buď přímo první z integrálů (2.20), nebo můľeme vypočítat potenciál (druhý integrál je skalární a tedy jednoduaaí) a pak určit intenzitu ze vztahu (2.12). Pokud je rozloľení nábojů symetrické, můľe být výhodnějaí pouľít přímo Gaussův zákon. V případě nepravidelného rozloľení náboje můľeme pouľít přibliľné metody umoľňující určit pole v dosti velké vzdálenosti od náboje; o ní pojednáme v následujícím odstavci.

Určíme nyní pole a potenciály některých nábojových uspořádání.

1. <u>Nabitá přímka</u>

Mějme elektrický náboj rozloľený podél přímky s konstantní lineární hustotou τ (obr. 2.10) a určeme intenzitu elektrostatického pole v bodě A ve vzdálenosti r od přímky. Uvaľme příspěvky dvou nábojových elementů τdl leľících ve stejné vzdálenosti l na obě strany od paty kolmice spuatěné z bodu A na přímku. Jejich vektorový součet bude zřejmě kolmý k přímce a bude mířit od přímky, je-li náboj kladný. Jeho velikost můľeme jej zapsat jako

$$dE = 2\cos\alpha \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dl}{R^2}\ ,$$

kde

$$R = \frac{r}{\cos\alpha}, \qquad l = r\mathrm{tg}\alpha, \qquad dl = \frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha}\ .$$

Po dosazení a integraci máme

$$E\ =\ \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{\pi/2}\cos\alpha\ d\alpha\ =\ \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\ . \tag{2.22}$$

Týľ výsledek bychom dostali jednoduaaím způsobem přímo z Gaussova zákona. Na směr vektoru intenzity můľeme usoudit ze symetrie úlohy a obklopíme-li část přímky souosým válcem o poloměru podstavy r a libovolné délky L, máme pro tok intenzity pláatěm válce

$$E.2\pi r L\ =\ \frac{1}{\varepsilon_0}\tau L\ ,$$

odkud ihned plyne (2.22). Pokud jde o potenciál pole, máme

$$\varphi\ =\ -\int_\infty^r E\ dr\ =\ -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\ +\ \mathrm{konst}\ . \tag{2.23}$$

obr. 2.10

Integrační konstantu tentokrát nemůľeme vybrat tak, aby potenciál v nekonečnu byl nulový. Je to pochopitelné, nebo¿¿ jsme do nekonečna umístili elektrické náboje! Jinak můľeme tuto konstantu ovaem volit libovolně.

2. Nabitá rovina a rovinná vrstva

Mějme elektrický náboj rozloľený rovnoměrně na rovině s konstantní ploanou hustotou σ a určeme pole a potenciál v bodě A ve vzdálenosti r od roviny. Mohli bychom například rozdělit rovinu na dvojice rovnoběľných úzkých přímých pásů symetricky umístěných vzhledem k patě kolmice spuatěné s bodu A na rovinu, povaľovat tyto pásy za nabité přímky a sčítat jejich příspěvky. Ze symetrie úlohy je vaak zřejmé, ľe vektor intenzity pole bude mířit kolmo od kladně nabité roviny. Zvolíme-li tedy Gaussovu plochu opět ve tvaru povrchu válce s osou kolmou k rovině a s podstavami libovolného tvaru a plochy S tak, aby leľely ve vzdálenosti r na obě strany od roviny, dostaneme

$$E.2S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S\ .$$

Odtud dostaneme pro intenzitu pole a potenciál nabité roviny

$$E\ =\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},\quad \varphi\ =\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,r\ +\ \text{konst} \tag{2.24}$$

(pole vpravo od svislé roviny budeme brát jako kladné, vlevo jako záporné). Je pozoruhodné, ľe velikost intenzity pole se nemění se vzdáleností od roviny; předpoklad o tom, ľe rovina je nekonečná je ovaem idealizací. Průběh intenzity pole a potenciálu nabité roviny jsou na obr. 2.11. Z něho je patrno, ľe na nabité rovině má normálová sloľka intenzity pole nespojitost $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Nabitou rovinu jsme povaľovali za nekonečně tenkou. Ve skutečnosti jde vľdy o nabitou vrstvu konečné tloua¿¿ky. Je-li taková vrstva nabita s konstantní objemovou hustotou ρ (viz obr. 2.12) a má-li aířku a, můľeme myaleně rozřezat vrstvu na nekonečně tenké roviny s ploanou hustotou náboje $d\sigma = \rho dr$ a podle principu superpozice sčítat příspěvky takových rovinných nábojů. Tak dostaneme vně vrstvy

$$E\ =\ \int_{-a/2}^{a/2}\frac{\rho dr}{2\varepsilon_0}\ =\ \frac{\rho a}{2\varepsilon_0},\quad \varphi\ =\ -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\,r + \text{konst.}$$

Uvnitř vrstvy se odečtou příspěvky vrstev o tloua¿¿ce $\frac{a}{2} + r$ a $\frac{a}{2} - r$:

$$E\ =\ \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\left(\frac{a}{2}+r\right)-\left(\frac{a}{2}-r\right)\right]\ =\ \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,r,\quad \varphi\ =\ -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\,r^2 + \text{konst}\ .$$

obr. 2.11 obr. 2.12

Protoľe jde o prostorově rozloľený náboj, je pole na hranici vrstvy spojité, i kdyľ tam nemá derivaci. Potenciál ovaem derivaci má.

Z principu superpozice snadno odvodíme průběh pole a potenciálu buzených dvojicemi souhlasně a nesouhlasně nabitých rovin (obr. 2.13). Jsou-li roviny nabité opačnými náboji téľe velikosti hustoty, bude pole homogenní a bude zcela soustředěno mezi rovinami (deskový kondenzátor). Vaimněte si skoků intenzity elektrického pole na nabitých rovinách.

obr. 2.13

obr. 2.14

3. Nabitá koule

Elektrostatické pole a potenciál objemově či povrchově nabité koule určíme snadno pomocí Gaussova zákona.[5]Uvedeme proto pouze výsledky graficky zachycené na obr. 2.14.

Je-li koule o poloměru R nabita povrchově s ploanou hustotou σ, nese náboj $Q = 4\pi R^2\sigma$, je-li nabita objemově s hustotou ρ, má náboj $\frac{4}{3}\pi R^3\rho$. Pro pole vně koule ($r > R$) dostáváme v obou případech stejné vztahy jako pro bodový náboj umístěný ve středu koule:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \,. \tag{2.25}$$

Pole uvnitř ($r < R$) povrchově nabité koule bude zřejmě nulové a konstantní potenciál roven potenciálu na povrchu

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \,; \tag{2.26}$$

pro objemově nabitou kouli dostáváme

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\, r, \qquad \varphi = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\, r^2 + \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \,. \tag{2.27}$$

Snadno se přesvědčíme, ľe na hranici koule jsou splněny poľadavky na normálové sloľky pole a potenciál.

[5]A velmi nesnadno bez něho, Newton musel řeait obdobnou úlohu pro gravitační pole koule sloľitým integrováním mnoho let.

obr. 2.15

Podobným způsobem bychom mohli najít pole a potenciál buzený nekonečným povrchově či objemově nabitým válcem. Zjistili bychom, ľe navenek se válec chová jako lineární náboj v ose, pole uvnitř povrchově nabitého válce je nulové, uvnitř objemově nabitého válce bude

$$E \;=\; \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\, r, \qquad \varphi \;=\; -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}\, r^2 + \text{konst} \;.$$

4. Pole a potenciál na ose nabité kruľnice

Mějme kruľnici poloměru r nabitou s lineární hustotou τ. Z důvodu symetrie můľeme usoudit, ľe pole na ose této kruľnice bude leľet v této ose, nad rovinou kruľnice bude kladné (směr vzhůru) pod rovinou záporné (směr dolů). Určíme, jak závisí toto pole na vzdálenosti od středu kruľnice h (viz obr. 2.15).

Rozdělíme kruľnici na dvojice protilehlých elementů délky dl, které představují bodové náboje τdl, a zintegrujeme příspěvky takových dvojic:

$$E \;=\; 2\cos\alpha \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi r} \frac{\tau dl}{h^2+r^2} \;=\; \frac{\tau r h}{2\varepsilon_0 (h^2+r^2)^{3/2}}\;, \quad \varphi \;=\; \frac{\tau r}{2\varepsilon_0\sqrt{h^2+r^2}}\;. \tag{2.28}$$

Intenzita pole nabývá extrémů ve vzdálenostech $h_m = r/\sqrt{2}$, ve středu kruľnice je pole samozřejmě nulové.

3. Elektrický dipól a vektor polarizace

Mějme objem V, v němľ je nějakým způsobem rozmístěn elektrický náboj; celkový náboj v tomto objemu můľe přitom být nulový i nenulový. Umístěme v tomto objemu počátek souřadnic a hledejme potenciál elektrostatického pole v bodě A leľícím ve vzdálenosti r od počátku například na ose z. Objem V rozdělíme na malé elementy dV, s nimiľ budeme zacházet jako s bodovými náboji. Polohové vektory těchto elementů označíme $\vec{r}'$, průvodič z tohoto elementu do bodu A označíme $\vec{R}$, takľe $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Princip superpozice dává

$$\varphi_A \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(x',y',z')}{R}\, dV \;.$$

obr. 2.16 obr. 2.17

Předpokládejme nyní, ľe bod A leľí ve vzdálenosti mnohem větaí neľ jsou rozměry objemu V. Potom můľeme povaľovat poměr r'/r za malý a rozloľit funkci $\frac{1}{R}$ pod integrálem do Taylorova rozvoje. Jinak můľeme téľ pouľít kosinové věty (viz obr. 2.16)

$$R \;=\; (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{1/2}$$

a binomického rozvoje do druhého řádu r'/r [6]

$$\frac{1}{R} \;=\; \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} \;=\; \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \cdots\right] .$$

Dosadíme-li tuto řadu do integrálu pro potenciál, dostaneme takzvaný *multipólový rozvoj* elektrostatického pole. Potenciál v bodě dostatečně vzdáleném od uvaľovaného objemu můľeme vyjádřit jako součet příspěvků, jejichľ velikost postupně klesá s rostoucími mocninami vzdálenosti. V teorii elektromagnetického pole se dokazuje, ľe takový rozvoj vľdy existuje a je jednoznačný:

$$\varphi \;=\; \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \cdots \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \cdots\right) . \tag{2.29}$$

Integrály K_n nazýváme *elektrickými multipólovými momenty*. Jsou to elektrické charakteristiky daného objemu, které závisejí pouze na rozloľení náboje v tomto objemu a jeho symetrii. Pokud je rozloľení náboje komplikované či neznámé a nemůľeme ho vypočítat, můľeme se pokusit určit multipólové momenty experimentálně z jimi vyvolávaného pole.

Zapíaeme první tři multipólové momenty vzhledem k naaí volbě bodu A:

$$K_0 \;=\; \int_V \rho dV, \quad K_1 \;=\; \int_V r'\cos\theta\rho dV, \quad K_2 \;=\; \frac{1}{2}\int_V r'^2(3\cos^2\theta - 1)\rho dV .$$

První z multipólových momentů K_0 odpovídá *elektrickému monopólu*, a je to vlastně celkový náboj daného objemu. Ve velké vzdálenosti se malý nabitý objem jeví jako bodový náboj, coľ je pochopitelné.

[6] Pro $\alpha \ll 1 \quad (1+\alpha)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 - \frac{15}{48}\alpha^3 + \cdots$

V případě, ľe objem bude jako celek nenabitý, stane se rozhodujícím dalaí člen K_1, který představuje moment *elektrického dipólu.*

Pro naai speciální volbu bodu A, kdy $r' \cos\theta = z'$, odpovídá integrál K_1 z-ové sloľce vektorové veličiny, kterou nazýváme *elektrický dipólový moment* a který můľeme zapsat pro případ spojitého a nespojitého rozloľení nábojů jako

$$\vec{p} \;=\; \int_V \vec{r}' \rho dV \;, \qquad \vec{p} \;=\; \sum_\alpha r'_\alpha q_\alpha \;. \tag{2.30}$$

Elektrický dipólový moment je tedy vedle náboje dalaí charakteristika elektrického působení částice či tělesa a měří se v coulombech krát metr. Potenciál odpovídající elektrickému dipólovému momentu je

$$\varphi^{(1)} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}_0}{r^2} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \;. \tag{2.31}$$

Na rozdíl od potenciálu náboje klesá potenciál dipólu se čtvercem vzdálenosti.

Důleľitou je otázka, zda definice elektrického dipólového momentu není závislá na volbě počátku souřadnic. Přejdeme-li od počátku souřadnic O_1 k novému počátku O_2, a označíme vektor spojující oba počátky jako $\vec{a}$, bude transformace souřadnic $\vec{r}'_1 = \vec{r}'_2 + \vec{a}$ a dipólový moment

$$\vec{p}_1 \;=\; \sum_\alpha r'_{\alpha 1} q_\alpha \;=\; \sum_\alpha \vec{r}'_{\alpha 2} q_\alpha + \vec{a} \sum_\alpha q_\alpha \;=\; \vec{p}_2 + \vec{a}\, Q \;.$$

Elektrický dipólový moment je tedy invariantní vůči volbě počátku tehdy, je-li celkový náboj v objemu nulový. Takový objem se nazývá *polarizovaný.*

Můľe se stát, ľe jak celkový náboj v objemu, tak dipólový moment budou nulové. Převládajícím se pak stane následující člen rozvoje odpovídající *elektrickému kvadrupólu.* Definujeme jej obecně jako tenzor o sloľkách

$$Q_{ij} \;=\; \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2)\rho \, dV \;, \tag{2.32}$$

v případě bodových nábojů ve tvaru sumy. Z této definice je zřejmé, ľe tenzor kvadrupólového momentu je symetrický a součet jeho diagonálních momentů je roven nule. V hlavních osách budou vaechny nediagonální momenty nulové a bude-li navíc náboj rozloľen symetricky kolem osy z, dostaneme

$$Q_{xx} \;=\; Q_{yy} \;=\; -\frac{1}{2} Q_{zz} \;.$$

Potom je kvadrupólový moment určen jediným prvkem. Kvadrupólový moment bude nezávislý na volbě počátku souřadnic, bude-li jak celkový náboj tak dipólový moment soustavy nulový. V naaem multipólovém rozvoji pro potenciál v bodě na ose x bude kvadrupólový příspěvěk k potenciálu

$$\varphi^{(2)} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{1}{2} \, \frac{Q_{zz}}{r^3}$$

a klesá s třetí mocninou vzdálenosti.

Je-li i kvadrupólový moment soustavy nulový, nastupuje moment *oktupólový.* Tak se s rostoucí symetrií rozloľení náboje uplatňují stále vyaaí multipóly. Nejvyaaí symetrii vykazuje sférické rozloľení náboje; v tom případě jsou vaechny multipólové momenty nulové a nabitá koule se navenek chová přesně tak jako bodový náboj (monopól).

Vaimneme si nyní blíľe elektrického dipólu. *Bodovým dipólem* nazýváme elektricky neutrální útvar zanedbatelných rozměrů, který v prostoru vytváří elektrické pole o potenciálu daném vztahem (2.31). Příkladem takových útvarů mohou být například některé molekuly (nazýváme je polární). Intenzita elektrického pole bodového dipólu bude tedy

$$\vec{E} \;=\; -\nabla\varphi \;=\; -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) \vec{p}\cdot\vec{r} + \frac{\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3} \right] \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] \;. \tag{2.33}$$

Je-li bodový dipól umístěn v počátku souřadnic v rovině x, z a orientován ve směru osy z, budou mít siločáry pole průběh znázorněný na obr. 2.17. Potom pro sloľky intenzity pole dostaneme

$$E_x \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3pxz}{r^5}, \quad E_y \;=\; 0, \quad E_z \;=\; \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \;. \tag{2.34}$$

obr. 2.18 obr. 2.19

Na ose z bude $x = 0$ a

$$E_x = 0, \qquad E_y = 0, \qquad E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2p}{r^3}\,, \tag{2.35}$$

na ose x bude $z = 0$ a

$$E_x = 0, \qquad E_y = 0, \qquad E_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3}. \tag{2.36}$$

Bodový elektrický dipól obyčejně aproximujeme dvojicí bodových nábojů stejné velikosti a opačných znamení ve vzájemné vzdálenosti l. Dipól má pak velikost $p = ql$ a je orientován od záporného náboje ke kladnému. Pole vytvářené takovou dvojicí nábojů ovaem odpovídá poli dipólu (2.33) jen na vzdálenostech $r \gg l$. Umístíme-li takový dipól do počátku souřadnic a orientujeme ve směru osy z, dostaneme v tomto přiblíľení z principu superpozice výrazy, (2.35) resp. (2.36). Takovou dvojici nábojů nazýváme *konečný dipól*.

Umístíme-li dipól do vnějaího homogenního elektrického pole, bude výsledná síla působící na dipól nulová, ale bude naň působit moment silové dvojice (viz obr. 2.18).

$$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E}\,. \tag{2.37}$$

Při natáčení dipólu v homogenním poli koná tento moment silové dvojice práci

$$A = \int_{\pi/2}^{\alpha} D\, d\alpha = \int_{\pi/2}^{\alpha} pE \sin\alpha\, d\alpha = -pE\cos\alpha$$

Dipól tak získá energii závislou na jeho orientaci vůči směru pole. Tato energie je rovna

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E} \tag{2.38}$$

Odečet této energie jsme zvolili tak, ľe ji bereme jako nulovou, je-li dipól orientován kolmo k siločarám pole, zápornou je-li orientován souhlasně se směrem pole a kladnou míří-li proti poli (obr. 2.19).

V nehomogenním elektrickém poli bude na dipól působit výsledná síla. Na obr. 2.20 jsou znázorněny případy, kdy gradient pole je kolmý na směr siločar a rovnoběľný s ním. V prvním případě můľeme napsat pro x-ovou sloľku výsledné síly

$$F_x = F_1 - F_2 = q(E_1 - E_2) \approx q\frac{\partial E_x}{\partial z}\Delta z = p\frac{\partial E_x}{\partial z}\cos\beta = \vec{p} \cdot \operatorname{grad} E_x\,.$$

I v obecném případě dostaneme přímo z (2.38)

$$\vec{F} = -\nabla W = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p}\nabla)\vec{E}\,. \tag{2.39}$$

Obecně lze říci, ľe dipól po vloľení do vnějaího elektrického pole je vľdy natáčen souhlasně se směrem pole a pak vtahován do oblasti silnějaího pole.

obr. 2.20

Atomy a molekuly mohou mít buď své vlastní elektrické dipólové momenty závislé na vnitřním uspořádání elektrických nábojů nebo mohou získat dipólový moment tak, ľe se ve vnějaím poli zpolarizují. Takový získaný dipólový moment se nazývá *indukovaný*, bývá o několik řádů menaí neľ vlastní momenty atomů a molekul a v prvním přiblíľení bude zřejmě úměrný intenzitě vnějaího elektrického pole. Koeficient úměrnosti se nazývá *atomovou*, resp. *molekulovou polarizovatelností*:

$$\vec{p}_{ind} \;=\; \alpha\vec{E}\;. \tag{2.40}$$

Odhadneme velikost atomové polarizovatelnosti. Pouľijeme model vodíkového atomu jako záporně nabité koule o Bohrově poloměru $r_B = 0,529.l0^{-10}$ m, v jejímľ středu sídlí proton. Takto symetrické uspořádání nábojů zřejmě dipólový momenmt neprojevuje. Nech¿¿ se nyní vlivem vnějaího elektrického pole proton vychýlí ze své středové polohy na vzdálenost a. Indukovaný dipólový moment bude mít tedy velikost $p = ea$. Síla, která vyvolala takové posunutí je silou mezi nábojem e a záporným nábojem uvnitř koule o poloměru a. Tuto sílu snadno určíme jako

$$F \;=\; eE \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2a}{r_B^3}\;.$$

Odtud

$$a \;=\; \frac{4\pi\varepsilon_0 r_B^3}{e}E, \qquad \alpha \;=\; 4\pi\varepsilon_0 r_B^3 \;=\; 1,65.10^{-41}\ \mathrm{CV^{-1}m^2}\;.$$

Odtud odhadneme, ľe například v poli o obrovské intenzitě $E = 10^6$ V.m^{-1} se jádro atomu vodíku vychýlí o pouhých 10^{-16} m a indukovaný dipólový moment bude mít velikost $p_{ind} = 1,6.10^{-35}$ C.m. [7] Odtud si můľeme učinit představu u velikosti vnitroatomových elektrických polí. Molekuly, které mají vlastní dipólové momenty se nazývají polární. Typickým příkladem je molekula vody, jejíľ dipólový moment směřuje od atomu kyslíku kolmo směrem k linii atomů vodíku a má velikost $p = 6,1.10^{-30}$ C.m. K polárním molekulám patří dále molekula chlorovodíku, amoniaku, oxidu uhelnatého a dalaí. Velikosti vlastních dipólových momentů ukazují na vnitroatomová elektrická pole řádově 10^{11}V.m^{-1}.

Podobně jako bodové náboje mohou být i dipóly rozloľeny jakoby spojitě v prostoru či na ploae. Představme si nejprve obecnou plochu tvořenou dvěma nekonečně tenkými vrstvami, jednou kladně nabitou s ploanou hustotou náboje σ, druhou záporně nabitou s hustotou $-\sigma$. Takovou plochu nazýváme *elektrickou dvojvrstvou*. Vzniká například na povrchu plazmatu, kde pohyblivějaí elektrony se vzdalují dále od hranice plazmatu neľ ionty, a má dobré elektrické a tepelné izolační vlastnosti. Můľeme na ni pohlíľet jako na ploaně rozloľené elektrické dipóly orientované ve směru normály a o ploané hustotě $\vec{p}_S = \sigma\Delta l\vec{n}$, kde Δl je vzdálenost nabitých ploch. Plocha S dvojvrstvy bude budit v bodě o polohovém vektoru $\vec{r}$ elektrické pole o potenciálu

$$\varphi(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\vec{p}_S\cdot\vec{R}}{R^3}dS \;=\; \frac{p_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\vec{R}\cdot d\vec{S}}{R^3} \;=\; \frac{p_S\Omega}{4\pi\varepsilon_0}\;. \tag{2.41}$$

[7] Přesný kvantově mechanický výpočet dává hodnotu atomové polarizovatelnosti pro vodík 9/2 krát větaí. Hodnoty atomové polarizovatelnosti různých atomů a molekul najdeme v tabulkách.

obr. 2.21

Zde Ω představuje prostorový úhel, pod nímľ je vidět plochu dvojvrstvy z bodu A. To je pozoruhodná vlastnost dvojvrstvy - můľeme ji libovolně zmuchlat a potenciál v daném bodě se přitom nezmění, zachováme li přísluaný prostorový úhel. Plyne odtud také, ľe při přechodu dvojvrstvou se potenciál mění skokem o $\frac{p_S}{\varepsilon_0}$.

Přejdeme nyní k prostorovému rozloľení elektrických dipólů. Mysleme si nějaký objem, kde jsou dipóly $\vec{p}$ rozloľeny s hustotou N a vaechny jsou souhlasně orientovány. Objemová hustota elektrických dipólů pak bude $\vec{P} = N\vec{p}$ a nazýváme ji *vektorem elektrické polarizace*. Ve skutečnosti nejsou elementární dipóly (například molekulární dipóly v látce) nikdy vaechny souhlasně orientovány a budeme-li se je snaľit orientovat vnějaím elektrickým polem, bude tepelný chaotický pohyb tuto orientaci opět naruaovat. I tak můľeme vaak zavést vektor polarizace $\vec{P}$ a definovat jej jako *elektrický dipólový moment jednotky objemu látky.* V případě dokonalého uspořádání dipólů bude mít maximální velikost, v případě dokonale neuspořádaných dipólů bude nulový. Vektor polarizace se měří v jednotkách coulomb na metr čtverečný, a má tedy stejný rozměr jako ploaná hustota elektrického náboje.

Určíme potenciál elektrostatického pole buzený v bodě o polohovém vektoru $\vec{r}$ polarizovaným objemem s vektorem polarizace $\vec{P}(\vec{r}')$:

$$\varphi(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot\vec{R}}{R^3}dV \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \mathrm{div}'\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{R}\right)dV - \int_V \frac{\mathrm{div}'\vec{P}(\vec{r}')}{R}dV\right] \;=$$

$$=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot d\vec{S}}{R} - \int_V \frac{\mathrm{div}'\vec{P}(\vec{r}')}{R}dV\right] \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_S \frac{\sigma_v(\vec{r}')dS}{R} + \int_V \frac{\rho_v(\vec{r}')dV}{R}\right],$$

kde pod div' se rozumí divergence derivovaná podle proměnné $\vec{r}'$.

Výsledný potenciál je tedy ekvivalentní potenciálu pole buzeného ploaným nábojem hustoty σ_v vázaným na povrch tělesa a objemovým nábojem hustoty ρ_v vázaným uvnitř tělesa, kde

$$\sigma_v \;=\; \vec{P}\cdot\vec{n}, \qquad \rho_v \;=\; -\mathrm{div}\;\vec{P} \tag{2.42}$$

($\vec{n}$ je jednotkový vektor normály k povrchu tělesa).

Polarizovaný objem se tedy chová jako určité ekvivalentní rozdělení ploaných a objemových nábojů. Vezměme například objem tvaru válce homogenně polarizovaný ve směru osy ($\vec{P}$ = konst). Potom div $\vec{P}$ je nulová, normála na pláati válce je kolmá k vektoru polarizace a pole takového válce bude ekvivalentní poli dvou nabitých podstav s opačným znamením náboje (obr. 2.21). Je-li válec atíhlý, bude představovat konečný elektrický dipól s náboji $P\Delta S$ a $-P\Delta S$ na koncích. Přejde-li válec v nekonečnou rovinnou vrstvu, bude představovat dvojici nesouhlasně nabitých rovin s hustotami náboje $\sigma = P$ a $\sigma = -P$. Pole uvnitř takové vrstvy bude tedy mířit proti směru vektoru polarizace a bude rovno

$$E_p \;=\; -\frac{P}{\varepsilon_0}\,. \tag{2.43}$$

Pole vně vrstvy bude nulové.

obr. 2.22

Určíme jeatě pole polarizované koule. Nech¿¿ vektor polarizace míří ve směru osy z a je opět konstantní. Na povrchu koule se vytvoří ploaný náboj s proměnnou hustotou

$$\sigma_v \;=\; \vec{P}\cdot\vec{n} \;=\; P\;\cos\theta\;.$$

Víme, ľe pole objemově nabité koule se navenek chová jako pole bodového náboje v centru. Lze snadno ukázat, ľe také pole polarizované koule se navenek chová, jako kdyby celý dipólový moment koule

$$\vec{p} \;=\; V\vec{P} \;=\; \frac{4}{3}\pi R^3\vec{P}$$

byl umístěn ve středu koule. Ploané rozloľení náboje na povrchu si totiľ lze představit tak, jako kdybychom měli dvě vzájemně se překrývající koule objemově nabité opačnými náboji s nepatrně posunutými středy. V místech překrytí se náboje kompenzují, na rovníku je hustota náboje nulová, na pólech maximální a rovna P a $-P$ (viz obr. 2.22).

Potom bude potenciál vně koule potenciálem dipólu a můľeme psát

$$\varphi_e \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \;=\; \frac{P}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3}z\;.$$

Uvnitř koule musí potenciál splňovat Laplaceovu rovnici a hraniční podmínku spojitosti na povrchu koule. Tomu vaak vyhoví pouze potenciál

$$\varphi_i \;=\; \frac{1}{3\varepsilon_0}Pz\;.$$

Intenzita elektrostatického pole uvnitř koule je tedy konstantní, míří proti směru vektoru polarizace a je rovna

$$\vec{E}_i \;=\; -\nabla\varphi_i \;=\; -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}. \tag{2.44}$$

Lze se přesvědčit, ľe tečné sloľky pole uvnitř a vně koule jsou spojité, normálové sloľky se mění skokem o P/ε_0.

Fakt, ľe pole uvnitř polarizované koule je homogenní se můľe zdát překvapivý. Ukazuje se, ľe je to obecná vlastnost vaech polarizovaných těles tvaru elipsoidu, jehoľ jsou koule a nekonečná rovinná vrstva zvláatními případy.

1. Síly působící mezi elektrickými dipóly

Mějme dva dipóly $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2$ v rovině x, z, přičemľ dipól $\vec{p}_1$ nech¿¿ je umístěn v počátku a orientován ve směru osy z. Pro gradienty sloľek pole prvního dipólu dostaneme

$$\text{grad}\;E_x \;=\; \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3z}{r^5}-\frac{15x^2z}{r^7},\;\; 0,\;\; \frac{3x}{r^5}-\frac{15xz^2}{r^7}\right)$$

obr. 2.23

$$\text{grad } E_z \;=\; \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3x}{r^5}-\frac{15xz^2}{r^7},\;\; 0,\;\; \frac{9z}{r^5}-\frac{15z^3}{r^7}\right) .$$

Sloľky síly, kterou tento dipól působí na obecně umístěný a orientovaný dipól $\vec{p}_2$ najdeme jako skalární součiny vektoru $\vec{p}_2$ a gradientu přísluané sloľky pole. Tak bude-li druhý dipól umístěn ve vzdálenosti z na ose z a souhlasně orientován (obr. 2.23), budou sloľky síly

$$F_x \;=\; \vec{p}_2\cdot\text{grad } E_x \;=\; 0, \qquad F_z \;=\; \vec{p}_2\cdot\text{grad } E_z \;=\; -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{6p_1p_2}{r^4} .$$

Znaménko minus ukazuje, ľe jde o sílu přitaľlivou.

Bude-li druhý dipól umístěn ve vzdálenosti x na ose x a opět souhlasně orientován, dostaneme odpudivou sílu o sloľkách

$$F_x \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3p_1p_2}{r^4}, \qquad F_z \;=\; 0.$$

Nejzajímavějaí je případ, kdyľ druhý dipól je opět umístěn na ose x, ale orientován kolmo k prvnímu dipólu, například směrem od něho. Pak dostaneme

$$F_x \;=\; 0, \qquad F_z \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3p_1p_2}{r^4} .$$

Ve vaech případech klesá síla se čtvrtou mocninou vzdálenosti, ale jak ukazuje poslední případ, není obecně centrální, nemusí mířit po spojnici obou dipólů. Kdybychom například druhý dipól přibliľovali k prvnímu z nekonečna kolmo natočený, nemuseli bychom překonávat ľádnou sílu, nekonali bychom práci.

2. Energie soustavy dvou dipólů

Energii soustavy dvou dipólů ve vzájemné vzdálenosti r najdeme obecně jako energii jednoho dipólu ve vnějaím poli vytvářeném druhým dipólem:

$$W \;=\; -\vec{p}_2\cdot\vec{E}_1 \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{r^3}-\frac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{r})(\vec{p}_2\cdot\vec{r})}{r^5}\right) .$$

4. Vodiče v elektrostatickém poli

Zabýváme-li se vlastnostmi elektrostatického pole v látkovém prostředí, musíme rozliaovat pole *mikroskopická* a *makroskopická*. Mikroskopická pole vyvolávaná vaemi náboji v látce, protony v atomových jádrech, elektrony v atomech, atd. nemůľeme bezprostředně měřit a nadto se rychle mění v prostoru i čase. Naae měřicí přístroje udávají hodnoty vystředovaných, makroskopických polí, pro něľ také formulujeme přísluané Maxwellovy rovnice. S hlediska chování látek v elektrostatickém poli můľeme rozliait dva základní typy - *vodiče* a *dielektrika* (nevodiče, izolanty). Pod vodičem budeme rozumět těleso, v němľ existují volné elektrické náboje, které se mohou pod vlivem elektrického pole v celém objemu volně pohybovat, ale nemohou jej opustit (pak by doalo k takzvané emisi).

Odtud plyne, ľe po vloľení vodiče do vnějaího elektrostatického pole budou se v něm náboje pohybovat tak dlouho, dokud makroskopické pole nevymizí. Stane se to tak, ľe se elektrické náboje budou hromadit na povrchu vodiče a vytvářet uvnitř pole opačně orientované k poli vnějaímu. Vodič se tak zpolarizuje, na jeho povrchu se naindukují elektrické náboje. Kdybychom jej uzemnili a část těchto nábojů tak odvedli, a potom opět odizolovali, mohli bychom vodič nabít, aniľ bychom na něj přivedli náboje z jiného nabitého tělesa. Tento jev je znám jako *elektrostatická indukce.*

Rozloľení nábojů na povrchu vodiče proběhne téměř okamľitě a tak je můľeme opět povaľovat za statické. Jev můľeme popsat také tak, ľe elektrické siločáry vnějaího pole dopadající na povrch vodiče se na jeho povrchu zachytí na záporných nábojích a dále budou opět vycházet z kladných povrchových nábojů. Zvětaí-li se intenzita vnějaího pole, dodá vodič dalaí volné náboje, které se rozmístí tak, aby vnějaí pole opět vykompenzovaly. V tom spočívá *stínící účinek vodičů* (Faradayova klec). Nejde tedy vlastně o stínění, vnějaí pole do prostoru vodiče pronikne, ale je zde vykompenzováno polem polarizačním.

Je-li vnějaí pole nehomogenní, indukuje se na nenabitém vodiči elektrický dipólový moment orientovaný souhlasně se směrem pole a takový vodič bude vtahován do oblasti silnějaího pole. Z uvedeného chování vodičů vyplývá zejména

- elektrické náboje jsou rozloľeny pouze na povrchu vodiče
- makroskopické elektrostatické pole uvnitř vodiče je nulové
- elektrostatický potenciál je v celém objemu vodiče konstantní
- povrch vodiče představuje ekvipotenciální plochu
- siločáry elektrostatického pole jsou vľdy kolmé k povrchu vodiče
- v těsné blízkosti povrchu vodiče je intenzita pole $E = \sigma/\varepsilon_0$ (takzvaná *Coulombova věta*, plyne ihned z Gaussova zákona)
- na hrotech vodičů dochází k prudkým změnám směru siločar a zhuatění ekvipotenciálních ploch. S tím souvisí sraení elektřiny z hrotů a efekt hromosvodu.
- v důsledku silového působení povrchových nábojů vzniká na povrchu vodiče mechanické napětí.

Velikost tohoto mechanického napětí můľeme určit následujícím způsobem. Vyřízneme-li na povrchu vodiče malou ploaku ΔS, můľeme tuto ploaku povaľovat za rovinnou a pole v těsné blízkosti ploaky na obou jejích stranách brát rovno $\sigma/2\varepsilon_0$. Protoľe po opětovném vrácení ploaky na povrch vodiče musí se pole uvnitř vodiče vynulovat, znamená to, ľe celý ostatní povrchový náboj vytváří v místě této ploaky pole kolmé k povrchu a rovné $\sigma/2\varepsilon_0$. Na ploaku tedy působí síla

$$\Delta F = \sigma \Delta S \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Delta S$$

a mechanické napětí je rovno

$$T = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \,, \tag{2.45}$$

kde E je intenzita elektrického pole v těsné blízkosti povrchu vodiče.

Vidíme, ľe toto napětí je právě rovno objemové hustotě pole v blízkosti vodiče. Tuto skutečnost si můľeme ujasnit myaleným pokusem. Mějme nabitou vodivou kouli, kterou vaestranně mechanicky stlačíme.

obr. 2.24

Vykonáme tím práci proti silám mechanického napětí o velikosti $4\pi r^2 T dr$. Tím vaak vytvoříme elektrostatické pole v objemu kulové slupky tloua¿¿ky dr, kde bylo dříve pole nulové. Energie takto vzniklého pole se ovaem musí rovnat vykonané práci.

Mějme nyní v prostoru soustavu vodičů, nabitých či nenabitých. Známe jejich povrchové plochy S_i, vzájemné geometrické uspořádání, náboje Q_i a potenciály jednotlivých vodičů φ_i. Náboje se na povrchu vodičů rozloľí jednoznačným způsobem, a to tak, aby potenciální energie celé soustavy byla minimální (*Thomsonova věta*). Jejich siločáry budou vzájemně provázány, mezi vodiči vznikne tzv. *kapacitní vazba* (obr. 2.24). Přiblíľíme-li k soustavě dalaí, nenabitý vodič, bude se polarizovat a soustava jej bude přitahovat. Tím se zmenaí celková potenciální energie.

Protoľe povrchy vodičů tvoří ekvipotenciální plochy, můľeme formulovat matematickou úlohu na řeaení Laplaceovy rovnice s dobře definovanými okrajovými podmínkami. Nazýváme ji *základní úlohou elektrostatiky*:

Najít elektrostatický potenciál $\varphi(\vec{r})$, definovaný a spojitý i s derivacemi aľ do druhého řádu v daném uzavřeném objemu (nebo v celém prostoru), aby vyhovoval Laplaceově rovnici

$$\Delta\varphi \;=\; 0$$

a okrajovým podmínkám na plochách S_i

$$\varphi|_{S_i} \;=\; \varphi_i \;=\; \text{konst}\;.$$

Je-li oborem celý prostor a jsou-li vaechny vodiče v konečnu, musí platit

$$\lim_{r\to\infty} \varphi(\vec{r}) \;=\; 0\;.$$

Lze dokázat, ľe řeaení základní úlohy elektrostatiky existuje a je jediné. Jednoznačnost řeaení plyne z věty o střední hodnotě potenciálu. Uvaľme dvě různá řeaení úlohy φ, χ, vyhovující týmľ okrajovým podmínkám. Podle principu superpozice musí pak být řeaením Laplaceovy rovnice také funkce $\varphi - \chi$, která bude ovaem na povrchu vaech vodičů nulová. Podle věty o střední hodnotě potenciálu musí tato funkce být identicky rovna nule i v prostoru mezi vodiči, takľe $\varphi = \chi$, čímľ je jednoznačnost dokázána.

Při řeaení základní úlohy elektrostatiky je problém vybrat z mnoha řeaení Laplaceovy rovnice to, které vyhoví okrajovým podmínkám. Existuje na to řada metod, které zkoumá matematická fyzika (metoda elektrostatického zobrazení, metoda konformního zobrazení, metoda Greenových funkcí aj.) Na konci tohoto odstavce se seznámíme s pouľitím metody elektrostatického zobrazení.

Mějme v prostoru jeden nabitý vodič. Potenciál vytvářený tímto vodičem v libovolném bodě prostoru je zřejmě úměrný jeho náboji a jinak můľe záviset jen na tvaru a velikosti vodiče. Označíme potenciál na povrchu tohoto vodiče jako φ_0. Poměr náboje a potenciálu na povrchu vodiče

$$C = \frac{Q}{\varphi_0} \tag{2.46}$$

nazýváme *kapacitou vodiče* a měříme ji v jednotkách coulomb na volt nazývaných farad. Snadno ověříme, ľe kapacita koule o poloměru R je rovna $C = 4\pi\varepsilon_0 R$. Farad je přília velká jednotka a v praxi uľíváme dekadické díly. Tak povaľujeme-li Zemi za vodivou kouli, zjistíme, ľe její kapacita je pouhých 710 μF.

Přejdeme-li nyní k soustavě vodičů zjistíme, ľe náboje na nich budou lineárně záviset na potenciálech vaech vodičů, přičemľ koeficienty úměrnosti jsou dány pouze geometrickými parametry soustavy:

$$\begin{aligned}
Q_i &= C_{11}\,\varphi_1 + C_{12}\,\varphi_2 + \cdots \\
Q_2 &= C_{21}\,\varphi_1 + C_{22}\,\varphi_2 + \cdots \\
\cdots &
\end{aligned}$$

neboli zkráceně

$$Q_i = C_{ik}\,\varphi_k\ . \tag{2.47}$$

Koeficienty C_{ik} nazýváme *kapacitní koeficienty*, je-li $i \neq k$ *influenční koeficienty*. Vyjádříme-li naopak potenciály jako funkce nábojů

$$\varphi_i = B_{ik}\,Q_k\ , \tag{2.48}$$

dostaneme takzvané *potenciálové koeficienty* B_{ik}.

Při nabíjení soustavy vodičů konáme práci, dodáváme soustavě energii. Tato energie by neměla záviset na tom v jakém pořadí a jakou rychlostí vodiče nabíjíme. Zvolme tedy takový postup, ľe nabíjíme vaechny vodiče současně a to tak, aby nabíjení vaech vodičů bylo také současně ukončeno. Potenciály a náboje vodičů musí tedy být v kaľdém okamľiku úměrny jejich konečným hodnotám. Jsou-li konečné potenciály a náboje na vodičích φ_i, Q_i a t bezrozměrný časový parametr měnící se během nabíjení od 0 do 1, budou průběľné hodnoty potenciálů a nábojů $\varphi_i' = t\varphi_i, Q_i' = tQ_i$. Výsledná energie pak bude rovna práci vykonané nabíjením vaech vodičů

$$W = \sum_i A_i = \sum_i \int_0^{Q_i} \varphi_i' dQ_i' = \sum_i \varphi_i Q_i \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i\ . \tag{2.49}$$

Na základě energetické úvahy zaloľené na tom, ľe výsledná energie nezávisí na pořadí nabíjení vodičů lze dokázat, ľe matice C_{ik} a B_{ik} jsou symetrické (*věta o vzájemnosti kapacit*).

Podle (2.49) bude energie jednoho osamoceného vodiče rovna

$$W = \frac{1}{2}\varphi_0 Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C\varphi_0}{2}\ . \tag{2.50}$$

Mějme nyní soustavu dvou vodičů (budeme jim říkat elektrody) nabité stejně velkými náboji opačného znamení tak, ľe vaechny siločáry, které vycházejí z kladné elektrody se uzavírají na záporné. Elektrody mohou mít podobu nekonečně rozlehlých rovnoběľných rovinných desek (tj. desek velkých rozměrů ve srovnání se vzdáleností mezi deskami), koaxiálních válců nebo koncentrických koulí apod. (viz obr. 2.25). Stačí nabít jen jednu z desek a druhou uzemnit; na ní se pak naindukuje stejně velký opačný náboj. Elektrické pole bude soustředěno (kondenzováno) v ohraničené oblasti prostoru mezi elektrodami. Uvedené uspořádání nazýváme *kondenzátorem*. Soustava rovnic (2.47) se pak redukuje na

$$\begin{aligned}
Q &= C_{11}\,\varphi_1 + C_{12}\,\varphi_2 \\
-Q &= C_{21}\,\varphi_1 + C_{22}\,\varphi_2\ .
\end{aligned}$$

Rozdíl potenciálů na elektrodách kondenzátoru představuje napětí $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Bude-li kondenzátor nenabitý, bude napětí na něm nulové a $\varphi_1 = \varphi_2$. Z této podmínky a také ze symetrie matice kapacitních

obr. 2.25

obr. 2.26

koeficientů dostáváme $C_{11} = -C_{12} = -C_{21} = C_{22} = C$ a tak můľeme kapacitní vlastnosti kondenzátoru popsat jedinou veličinou zvanou *kapacita kondenzátoru*:

$$C = \frac{Q}{U} . \tag{2.51}$$

Podobně zjistíme, ľe energie nahromaděná v kondenzátoru bude

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} . \tag{2.52}$$

Rovinný (deskový) kondenzátor vytváří v prostoru mezi deskami homogenní elektrické pole (s výjimkou okrajových oblastí). Je-li S plocha desek a d vzdálenost mezi deskami, bude intenzita pole v takovém kondenzátoru

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

a napětí

$$U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} .$$

Odtud kapacita deskového kondenzátoru

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} . \tag{2.53}$$

Přesnějaí výpočet by musel započítat i okrajové efekty (viz obr. 2.26). Lze odhadnout, ľe pokud je poměr vzdálenosti desek k jejich lineárnímu rozměru řádově 0,01, bude oprava na okrajové efekty činit asi 2%.

Dosadíme-li výraz pro kapacitu deskového kondenzátoru do vztahu pro energii kondenzátoru (2.52), dostaneme

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{d}(Ed)^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V = wV ,$$

kde w je hustota energie elektrického pole a V objem mezi deskami kondenzátoru.

Snadno můľeme určit *kapacitu kulového kondenzátoru* tvořeného koncentrickými kulovými elektrodami o poloměrech $R_1 < R_2$. Je-li například vnějaí elektroda uzemněna a vnitřní nabita kladně, bude pole mezi

obr. 2.27

elektrodami totoľné s polem bodového náboje. Napětí určíme jako

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} ,$$

odkud pro kapacitu máme

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} . \tag{2.54}$$

Vaimněme si, ľe je-li rozdíl poloměrů elektrod malý, přechází (2.54) ve výraz pro kapacitu deskového kondenzátoru.

V praxi se pouľívají téľ válcové kondenzátory; za válcový kondenzátor můľeme konec konců povaľovat i koaxiální kabel s vnitřní a vnějaí válcovou elektrodou. Vnitřní válec můľe být plný (drát) nebo dutý. Výpočtem analogickým shora provedenému určíme *kapacitu válcového kondenzátoru* a *kapacitu koaxiálního kabelu na jednotku délky*:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} , \qquad C_l = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} . \tag{2.55}$$

Nakonec můľeme určit *kapacitu na jednotku délky dvojlinky*, tj.dvojice rovnoběľných lineárních vodičů nabitých opačnými náboji (viz obr. 2.27). Přitom sice nejde o kondenzátor v pravém smyslu, nebo¿¿ pole se rozprostírá v celém prostoru. Přesto vaak můľeme určit potenciál integrováním pouze mezi vodiči a brát je jako superpozici polí buzených oběma vodiči. Při integrování je podstatné, ľe vodiče mají vľdy konečný průřez; předpoklad o nekonečně tenkých vodičích by vedl k divergujícímu integrálu. Je-li R poloměr vodičů, l vzdálenost mezi jejich středy a τ lineární hustota náboje na nich, máme

$$U = \int_{R}^{l-R} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{l-r}\right] dr = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{l-R}{R} ,$$

a

$$C_l = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{l-R}{R}} . \tag{2.56}$$

Potřebujeme-li získat kondenzátor o značné kapacitě, můľeme buď zvětaovat plochu elektrod (např. u svitkových kondenzátorů), nebo zmenaovat vzdálenost mezi nimi (elektrolytické kondenzátory, kde d dosahuje 10^{-5} mm).

Z definice kapacity plynou i známá pravidla o sčítání kapacit kondenzátorů zapojených sériově (kdy se sčítají napětí na elektrodách) a paralelně (kdy se sčítají náboje) (viz obr. 2.28):

$$C_{ser} = \left(\sum_i \frac{1}{C_i}\right)^{-1} , \qquad C_{par} = \sum_i C_i . \tag{2.57}$$

obr. 2.28

obr. 2.29

1. Elektrostatické zobrazení

Ukáľeme na způsob řeaení základní úlohy elektrostatiky metodou elektrostatického zobrazení. Mějme vodivou uzemněnou vodorovnou rovinu o nulovém potenciálu a nad ní ve výace h bodový elektrický náboj Q. Máme určit elektrostatické pole v celém poloprostoru nad rovinou (s výjimkou bodu, v němľ se nachází náboj Q). Úloha modeluje například situaci malého nabitého bouřkového mračna nad zemským povrchem. Potenciál pole musí splňovat Laplaceovu rovnici a okrajovou podmínku $\varphi = 0$ při $h = 0$. Této podmínce lze vaak vyhovět tak, ľe umístíme zrcadlově symetricky na druhou stranu roviny (kde nás řeaení stejně nezajímá) stejně velký náboj opačného znamení - viz obr. 2.29. Vaimněte si, ľe jsme spolu se zrcadlovým zobrazením změnili i znamení náboje, tedy zkombinovali prostorovou a nábojovou symetrii. Pak můľeme zapomenout na okrajovou podmínku a řeait prostě úlohu o superpozici polí dvou bodových nábojů. Pro body blízko nad uzemněnou rovinou dostaneme řeaení

$$E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{2Qh}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \, ,$$

kde r značí vzdálenost od paty kolmice spuatěné z náboje na rovinu. Je zřejmé, ľe pro $r \gg h$ řeaení přechází na pole dipólu. Na rovině se indukuje náboj opačného znamení s ploanou hustotou $\sigma = \varepsilon_0 E$, která klesá se vzdáleností od paty kolmice. Můľeme si ověřit, ľe celkový indukovaný náboj bude roven právě $-Q$. Lze téľ spočítat, ľe polovina celkového indukovaného náboje zaujme plochu kruhu o poloměru

$\sqrt{3}\,h$. Náboj Q bude k vodivé uzemněné rovině přitahován silou

$$F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q^2}{4h^2}$$

a práce potřebná ke vzdálení náboje od vodivé stěny do nekonečna bude

$$A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q^2}{4h}\,.$$

Vaimněte si, ľe energie dvou nábojů Q a $-Q$ ve vzájemné vzdálenosti $2h$ má velikost dvakrát větaí.

obr. 2.30

2. Kulové elektrostatické zobrazení

Mějme nyní uzemněnou vodivou kouli poloměru R a ve vzdálenosti x_1 od jejího středu na ose x bodový náboj Q_1 a hledejme potenciál pole vně koule (obr. 2.30). Pokusme se splnit podmínku nulového potenciálu na povrchu koule umístěním fiktivního náboje Q_2 do vzdálenosti x_2 uvnitř koule. Jsou-li $r_1,\ r_2$ vzdálenosti nábojů od obecného bodu A na povrchu koule, musí platit

$$\varphi \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\left(\frac{Q_1}{r_1}+\frac{Q_2}{r_2}\right) \;=\; 0\ .$$

Fiktivní náboj Q_2 musí splňovat podmínku

$$Q_2 \;=\; -\frac{r_2}{r_1}\,Q_1\ .$$

Přitom ovaem musí zůstávat poměr r_2/r_1 konstantní pro vaechny body na kulové ploae. To lze splnit při takzvané kulové inverzi, kdy

$$\frac{r_2}{r_1} \;=\; \frac{x_2}{R} \;=\; \frac{R}{x_1}, \qquad x_1 x_2 \;=\; R^2\ ,$$

jak se lze přesvědčit z podobnosti trojúhelníků na obrázku. Hraniční podmínku tedy splníme, umístíme-li do bodu o souřadnici x_2 na ose x náboj Q_2, přičemľ

$$x_2 \;=\; \frac{R^2}{x_1}, \qquad Q_2 \;=\; -\frac{x_2}{R}Q_1\ .$$

Na uzemněné kulové ploae se tedy indukuje náboj Q_2 a náboj Q_1 je ke kouli přitahován silou

$$F \;=\; -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1^2 x_1 R}{(x_1^2-R^2)^2}\ .$$

Práce potřebná ke vzdálení náboje do nekonečna je

$$A \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1^2 R}{2\,(x_1^2-R^2)}\ .$$

Nebude-li koule uzemněna (bude-li izolována), potom zřejmě celkový na ní indukovaný náboj musí být nulový. Musíme pak doplnit uvnitř koule dalaí fiktivní náboj $-Q_2$ a umístit jej do středu kulové plochy, aby potenciál na ní zůstal konstantní, tj. roven

$$\varphi \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1}{x_1}\ .$$

obr. 2.31

Snadno zjistíme, ľe silové působení mezi nábojem Q_1 a izolovanou vodivou koulí bude nyní

$$F \;=\; -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1^2 R^3\,(2x_1^2 - R^2)}{x_1^3\,(x_1^2 - R^2)^2}\;.$$

Práce potřebná ke vzdálení náboje je

$$A \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1^2 R^3}{2x_1^2\,(x_1^2 - R^2)}\;.$$

5. Dielektrika v elektrostatickém poli

Dielektrika budeme povaľovat za tělesa tvořená elementárními elektrickými dipóly; jejich dipólové momenty odpovídají momentům atomů a molekul, z nichľ dielektrikum sestává. Elektrické náboje jsou tedy v dielektriku vázány a nemohou se volně přemis¿¿ovat. Ve vnějaím elektrostatickém poli se tyto dipóly budou snaľit orientovat ve směru siločar pole a dielektrikum se bude polarizovat. Naproti tomu chaotický tepelný pohyb atomů a molekul bude působit proti polarizaci. Dielektrikum bude vytvářet vlastní polarizační pole, které bude oslabovat pole vnějaí. Nemůľe ho vaak zcela vykompenzovat jako v případě vodičů. Je to dáno tím, ľe u vodičů se na vytváření vlastního polarizačního pole podílejí náboje z celého objemu, které putují na povrch, kdeľto u dielektrik se mohou uplatnit pouze nevykompenzované náboje na povrchu. Je to vidět na obrázku 2.31. V dielektriku mohou být ovaem vedle vázaných také volné náboje. Budeme proto rozliaovat objemovou hustotu nábojů volných (ρ), vázaných (ρ_v) , a celkovou hustotu $\rho_c = \rho + \rho_v$. Hustota vázaných nábojů vaak souvisí s vektorem polarizace vztahem (2.42). Můľeme tedy psát Maxwellovu rovnici

$$\mathrm{div}\,\vec{E} \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0}\,(\rho + \rho_v) \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0}\,(\rho - \mathrm{div}\vec{P})\;.$$

Vynásobíme-li tuto rovnici ε_0, převedeme - div$\vec{P}$ na levou stranu a zavedeme vektor

$$\vec{D} \;=\; \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\;, \tag{2.58}$$

můľeme zapsat soustavu Maxwellových rovnic pro elektrostatické pole v dielektriku jako

$$\mathrm{div}\,\vec{D} \;=\; \rho\;, \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E} \;=\; 0\;. \tag{2.59}$$

Účelnost zavedení vektoru $\vec{D}$, který nazýváme *vektorem elektrické indukce*, je v tom, ľe se pak můľeme omezit pouze na zadání objemové hustoty *volných* nábojů; vlastnosti vázaných nábojů v dielektriku jsou jiľ ve vektoru $\vec{D}$ obsaľeny. Tak Gaussův zákon pro tok elektrické indukce bude znít

$$\Psi \;=\; \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} \;=\; \int_V \rho\; dV \;, \tag{2.60}$$

kde ρ je hustota volných nábojů. Nejsou-li v dielektriku volné náboje, nemají indukční čáry zdroje a musejí se uzavírat do sebe. Také je odtud zřejmo, ľe na hranici dvou dielektrik, tj. na ploae, kde jsou pouze vázané ploané náboje, budou normálové sloľky vektoru elektrické indukce spojité na rozdíl od sloľek intenzity pole, které zde mají skok σ_v/ε_0. Naproti tomu vektor elektrické indukce nemá tak obecný význam jako vektor intenzity elektrického pole, který určuje sílu mezi náboji. Nemůľeme také například udat obecný vztah pro rotaci $\vec{D}$.

Soustava rovnic (2.60) nemá plně určené řeaení a bylo by ji třeba jeatě doplnit o vztah mezi vektory $\vec{E}$ a $\vec{D}$. Z definice je patrno ľe tyto vektory nemusí mít obecně ani stejný směr. Vektor $\vec{P}$ můľe být konstantní, nezávislý na vnějaím elektrickém poli. Taková dielektrika nazýváme *ideálně tvrdými*. Příkladem ideálně tvrdých dielektrik mohou být takzvané *elektrety*, které představují obdobu permanentních magnetů. Získávají se například při tuhnutí směsi určitých pryskyřic, vosků a dalaích látek ve vnějaím elektrickém poli.

Větaina dielektrik se vaak polarizuje teprve pod vlivem vnějaího elektrického pole. Pokud atomy či molekuly dielektrika mají vlastní elektrické dipólové momenty (takovým dielektrikům se říká *polární*), budou se tyto dipóly ve vnějaím elektrickém poli natáčet ve směru pole. Mluví o tzv. orientační polarizaci. Pokud tyto částice vlastní momenty nemají, budou se v elektrickém poli indukovat. Jak víme, indukované momenty jsou o několik řádů menaí neľ vlastní. V obou případech můľeme očekávat, ľe pro nepřília silná pole bude vektor polarizace úměrný intenzitě pole; taková dielektrika nazýváme *ideálně měkkými*. Potom

$$\vec{P} \;=\; \varepsilon_0\chi\vec{E}\;. \tag{2.61}$$

Konstantu úměrnosti χ nazýváme *elektrickou susceptibilitou*.

Pro dostatečně silná pole u některých dielektrik (nazývaných *feroelektrika*) pozorujeme jev *hystereze*. Spočívá v tom, ľe při růstu intenzity pole se přímá úměrnost (2.61) naruauje, dochází k nasycení (saturaci) polarizace, která se bliľí určité hodnotě P_s. při zmenaování intenzity neklesá jiľ polarizace po původní křivce (takzvaná panenská křivka), ale dielektrikum zůstává i při nulovém poli zpolarizováno na úrovni takzvané *remanentní polarizace* P_r. Teprve při reverzaci pole na hodnotu *koercitivního pole* E_k vrací se polarizace k nule. Proces se opakuje s polarizací v opačném směru a hodnota polarizace tak opisuje uzavřenou *hysterezní křivku* (obr. 2.32).

Vra¿¿me se k předpokladu, ľe mezi polarizací a intenzitou pole platí vztah přímé úměrnosti. Potom můľeme psát

$$\vec{D} \;=\; \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \;=\; \varepsilon_0\vec{E}+\varepsilon_0\chi\vec{E} \;=\; \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} \;=\; \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \;=\; \varepsilon\vec{E}\;. \tag{2.62}$$

Vektor elektrické indukce je tedy úměrný vektoru intenzity elektrického pole s koeficientem úměrnosti ε, který nazýváme *absolutní permitivitou* dielektrika. V soustavě jednotek SI, kde byla formálně zavedena rozměrná konstanta ε_0, nazývaná permitivitou vakua, je absolutní permitivita součinem této konstanty a bezrozměrné tzv. *relativní permitivity* dielektrika ε_r. Pokud vektory elektrické indukce a intenzity pole nemají týľ směr (například v krystalech nebo v plazmatu umístěném v magnetickém poli), bude mít permitivita charakter tenzoru a dostaneme

$$D_i \;=\; \varepsilon_{ik}\; E_k\;. \tag{2.63}$$

V dielektriku jsme tedy zavedli veličinu zvanou elektrická indukce, která má v soustavě SI rozměr [D]=$\mathrm{L^{-2}TI}$ a měří se v coulombech na čtverečný metr a elektrický indukční tok Ψ s rozměrem $[\Psi]$ = TI a měřený v coulombech.

Podle (2.62) platí mezi relativní permitivitou a elektrickou susceptibilitou vztah

$$\varepsilon_r \;=\; 1+\chi\;; \tag{2.64}$$

obr. 2.32

obr. 2.33

Protoľe v elektrostatice je elektrická susceptibilita vľdy kladná, bude relativní permitivita dielektrik větaí neľ 1. Relativní permitivita dielektrika je důleľitou makroskopickou charakteristikou jeho elektrických vlastností. Vloľíme-li dielektrikum do homogenního elektrického pole mezi deskami rovinného kondenzátoru, vzroste jeho kapacita ε_r - krát na

$$C \;=\; \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d} \,. \tag{2.65}$$

Protoľe náboj na deskách kondenzátoru zůstává stejný, klesne napětí a intenzita pole v kondenzátoru - dielektrikum pole oslabí. Názorně je to vidět na obr. 2.33. Dielektrikum se polarizuje ve směru původního pole $\vec{E}_0$ a na hranicích dielektrika vznikají ploané polarizační náboje opačného znamení neľ jsou náboje na přísluaných deskách kondenzátoru. Ploaná hustota těchto polarizačních nábojů je přitom rovna $\pm P$. Ty vytvoří polarizační pole $\vec{E}_p = -\vec{P}/\varepsilon_0$ a pro výsledné pole a polarizaci můľeme psát

$$\vec{E} \;=\; \vec{E}_0 + \vec{E}_p \;=\; \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \,, \qquad \vec{P} \;=\; \varepsilon_0 \,(\varepsilon_r - 1)\, \vec{E} \,. \tag{2.66}$$

Vyjádříme-li odtud výsledné pole a polarizaci vzhledem k původnímu poli ve vakuu, dostaneme

$$\vec{E} \;=\; \frac{1}{\varepsilon_r}\, \vec{E}_0 \,, \qquad \vec{P} \;=\; \varepsilon_0\, \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\, \vec{E}_0 \tag{2.67}$$

Odtud je zřejmo, ľe elektrické pole v dielektriku je oslabováno ε_r - krát. V případě nehomogenního pole můľeme vľdy vzít dostatečně malý objem, v němľ lze pole povaľovat za homogenní (obr. 2.34). Tak pro Coulombův zákon a objemovou hustotu elektrického pole v dielektriku můľeme nyní psát

$$F \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\, \frac{q_1 q_2}{r^2} \,, \qquad w \;=\; \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 E^2}{2} \;=\; \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2} \,. \tag{2.68}$$

Z vlastností vektorů $\vec{E}$, $\vec{D}$ plynou téľ podmínky pro změnu jejich sloľek na rozhraní dvou dielektrik o permitivitách $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (viz obr. 2.35). Na tomto rozhraní jsou ploaně rozloľeny pouze vázané náboje, takľe normálové sloľky $\vec{D}$ jsou spojité. Spojitými zůstávají také tečné sloľky vektoru $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$, takľe máme

$$D_{1n} \;=\; D_{2n} \,, \qquad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} \;=\; \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} \,, \tag{2.69}$$

obr. 2.34 obr. 2.35

neboli

$$D_1 \cos\theta_1 \;=\; D_2 \cos\theta_2 \;, \qquad E_1 \sin\theta_1 \;=\; E_2 \sin\theta_2 \;.$$

Dělením těchto vztahů dostáváme "zákon lomu" elektrických siločar (indukčních čar), který se liaí od Snelliova zákona lomu světla:

$$\frac{\mathrm{tg}\theta_1}{\mathrm{tg}\theta_2} \;=\; \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \;. \tag{2.70}$$

Měřením relativní permitivity dielektrik zjistíme, ľe existují různé skupiny takových látek, které se svým chováním, v elektrickém poli značně liaí. Navíc tato permitivita jeví i teplotní závislost, kterou můľeme v prvním přiblíľení vyjádřit jako

$$\varepsilon_r \;=\; C_1 + \frac{C_2}{T} \;. \tag{2.71}$$

Tak pro nepolární dielektrika nacházíme $C_2 \approx 0$ a hodnoty statické permitivity $\varepsilon_r \approx 1 \;-\; 10$:

látka	ε_r
vodík	$1,00026$
vzduch	$1,00060$
oxid uhličitý	$1,00097$
olej	$2,24$
benzen	$2,28$
skla	$3,7 \;-\; 7,0$
chlorid sodný	$6,0x$

Pro polární dielektrika $C_1 \approx 1$ a $\varepsilon_r \approx 10 \;-\; 100$:

ethanol	$25,0$
nitrobenzen	$35,7$
voda	81

Ve dvacátých letech byla zkoumána nová skupina látek zvaných *feroelektrika* (někdy téľ seignettoelektrika), které jevily extrémně vysoké hodnoty relativní permitivity (řádově 10^4) a u nichľ byl pozorován jev hystereze. Poprvé byly tyto vlastnosti pozorovány u Seignettovy soli (vínan sodnodraselný), jiným feroelektrikem je titaničitan barnatý aj. Ve feroelektrickém stavu existují v látce celé oblasti spontánní polarizace, zvané domény, které se pak ve vnějaím poli orientují. Feroelektrický stav trvá jen pod tzv. *Curieovou tepolotou*, při níľ látka přechází do paraelektrického stavu a její permitivita prudce klesá.

Permitivita dielektrik se mění v případě časově proměnných elektrických polí; například permitivita vody ve vysokofrekvenčním poli (optických frekvencí) klesá aľ na hodnotu 1,77. Vedle feroelektrik existují téľ látky zvané *antiferoelektrika*, u nichľ permitivita pod Curieovým bodem s rostoucí teplotou roste. Feroelektrické látky vykazují téľ takzvaný *piezoelektrický jev* spočívající v tom, ľe elastickou deformací se mění elektrická polarizace krystalu. Inverzní jev se nazývá *elektrostrikcí*; při změně pole, které má za následek změnu elektrické polarizace, nastává elektrostrikční deformace. Piezoelektrický jev jeví i některé krystaly, které nejsou feroelektrické; klasickým příkladem je křemen, u něhoľ byl tento jev P. Curiem v r. 1880 poprvé pozorován. Povrchová hustota náboje u piezoelektrických krystalů je úměrná mechanickému napětí. Piezoelektrická konstanta činí pro křemen $2,3.10^{-12}$ CN^{-1}, pro krystal ADP $5,0.10^{-11}$ CN^{-1}, pro Seignettovu sůl $2,3.10^{-9}$ CN^{-1} apod. Piezoelektrický jev má značné uplatnění při generaci ultrazvuku, stabilizaci kmitočtu apod. Souvisí s dalaím, tzv. *pyroelektrickým* jevem, který byl poprvé pozorován u turmalínu, kdy při zahřátí dielektrika dochází k objemovým změnám a objevují se povrchové náboje.

1. Dielektrická koule ve vnějaím elektrostatickém poli

Určíme intenzitu elektrického pole a polarizaci v objemu dielektrika kulového tvaru ve vnějaím elektrostatickém poli $\vec{E}$. Budeme řeait napřed obecnějaí úlohu o kouli poloměru R z dielektrika s permitivitou ε_i obklopené dielektrikem o permitivitě ε_e. Na základě řeaení (2.44) budeme předpokládat, ľe pole uvnitř koule bude homogenní a úměrné vnějaímu poli $\vec{E}$, pole vně koule bude superpozicí homogenního pole $\vec{E}$ a pole dipólu, jehoľ moment bude rovněľ úměrný poli $\vec{E}$. Do středu koule umístíme počátek sférické soustavy souřadnic, osu z vedeme ve směru elektrického pole $\vec{E}$ a úhel θ odečítáme od tohoto směru. Pro pole uvnitř a vně koule máme tedy

$$\vec{E}_i \;=\; a\,\vec{E}\;,\quad \vec{E}_e \;=\; \vec{E} + b\left(\frac{3Ez\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{E}}{r^3}\right)\;,$$

kde a a b jsou konstanty, které musíme určit z hraničních podmínek $E_{ti} = E_{te},\;\; D_{ni} = D_{ne}$ při $r = R$. Máme tedy

$$a\;E\;\sin\theta \;=\; E\;\sin\theta - b\,\frac{E\sin\theta}{R^3}\;,$$

$$\varepsilon_i a\;E\;\cos\theta \;=\; \varepsilon_e\left[E\;\cos\theta + \frac{3bE\cos\theta}{R^3} - \frac{bE\cos\theta}{R^3}\right]\;.$$

Z první podmínky dostaneme vztah mezi konstantami $a,\ b$

$$a \;=\; 1 - \frac{b}{R^3}$$

a z druhé

$$\varepsilon_i\left(1 - \frac{b}{R^3}\right) \;=\; \varepsilon_e\left(1 + \frac{2b}{R^3}\right)\;,$$

odkud

$$\frac{b}{R^3} \;=\; \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}\;,$$

takľe

$$E_i \;=\; \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}\,E\;. \tag{2.72}$$

Mějme nyní kouli z měkkého dielektrika, kterou vloľíme do vnějaího elektrického pole (obr. 3.36). Pole uvnitř této koule bude homogenní, bude mířit ve směru vnějaího pole E_0 a poloľíme-li v (2.72) $\varepsilon_e = \varepsilon_0,\ \varepsilon_i = \varepsilon_r\varepsilon_0$, dostaneme pro pole uvnitř koule

$$E_k \;=\; \frac{3}{\varepsilon_r + 2}\,E_0\;. \tag{2.73}$$

K témuľ výsledku dospějeme, budeme-li pole uvnitř koule povaľovat za superpozici pole E_0 a pole polarizované koule (2.44). Ze vztahů

$$E_k \;=\; E_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\,P,\quad P \;=\; \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\;E_k$$

obr. 2.36 obr. 2.37

plyne

$$E_k \;=\; \frac{3}{\varepsilon_r + 2}\, E_0\;, \quad P \;=\; 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\, E_0\;. \tag{2.74}$$

Bude-li dielektrikum tvrdé, bude vektor $\vec{P}$ konstantní, na vnějaím poli nezávislý.

Máme-li v elektrickém poli obecně dielektrický elipsoid, bude pole uvnitř elipsoidu

$$\vec{E}_{el} \;=\; \vec{E}_0 - N\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\;, \tag{2.75}$$

kde N se nazývá *depolarizační faktor*. Případ $N = 0$ odpovídá nekonečně dlouhému válci, jehoľ osa je rovnoběľná s polem, $N = 1/3$ kouli, $N = 1/2$ válci s osou kolmou k poli, $N = 1$ rovinné vrstvě. Je-li elipsoid obecně velmi protáhlý ve směru pole, depolarizační faktor klesá. Naopak v plochém elipsoidu je depolarizační faktor blízký jedničce a pole v něm je blízké E_0/ε_r.

Určíme jeatě energii polarizované dielektrické koule ve vnějaím poli. U tvrdého dielektrika jde zřejmě o energii dipólu ve vnějaím poli:

$$W \;=\; -(\vec{P}\cdot\vec{E}_0)\;V\;, \tag{2.76}$$

kde V je objem koule. V případě měkkého dielektrika se přičítá energie potřebná ke zpolarizování dielektrika. Změní-li se vektor polarizace o $d\vec{P}$, změní se energie koule o $(E_0 \cdot d\vec{P})\;V$. Protoľe $\vec{P} = k\vec{E}_0$, bude celková práce

$$A \;=\; V\int_0^P \vec{E}_0\cdot d\vec{P} \;=\; kV\int_0^P \vec{P}\cdot d\vec{P} \;=\; \frac{1}{2}(\vec{E}_0\cdot\vec{P})V\;.$$

Energie koule z měkkého dielektrika tedy bude

$$W \;=\; -\frac{1}{2}(\vec{P}\cdot\vec{E}_0)\;V\;. \tag{2.77}$$

2. <u>Kulová dutina v dielektriku</u>

Mějme nyní nekonečné měkké dielektrikum, v němľ je homogenní elektrické pole s intenzitou $\vec{E}$, a v něm kulovou dutinu poloměru R (obr. 2.37). Pole uvnitř dutiny určíme z (2.72), kde poloľíme $\varepsilon_i = \varepsilon_0,\ \varepsilon_e = \varepsilon_r\varepsilon_0$:

$$E_d \;=\; \frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1}\;E\;. \tag{2.78}$$

Někdy je třeba určit pole v kulové dutině v tvrdém dielektriku, které zůstává homogenně zpolarizováno i po vyříznutí dutiny nebo v dutině vyříznuté pouze myalenně. Potom pole v dutině bude superpozicí homogenního pole $\vec{E}$ od něhoľ odečítáme pole polarizované koule (na hranicích dutiny zůstávají naindukovány povrchové náboje opačného znamení neľ náboje odebrané s koulí). Potom z rovnic

$$E_d \;=\; E + \frac{1}{3\varepsilon_0} P, \quad P \;=\; \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

dostaneme

$$E_d \;=\; \frac{\varepsilon_r + 2}{3}\, E \, . \tag{2.79}$$

3. Clausiův - Mosottiho vztah

Z mikroskopické teorie dielektrika lze určit vztah mezi atomovou polarizovatelností a elektrickou susceptibilitou, resp. relativní permitivitou dielektrika. U nepolárních látek jej vyjadřuje tzv. *Clausiův - Mosottiho vztah*. Výsledná polarizace je zřejmě dána součtem indukovaných elektrických dipólů v jednotce objemu. Je-li koncentrace atomů rovna n, dostáváme s pouľitím (2.40)

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\; \vec{E} = \alpha n \vec{E}\; .$$

Odtud

$$\varepsilon_r \;=\; 1 + \frac{\alpha n}{\varepsilon_0}, \qquad \chi \;=\; \frac{\alpha n}{\varepsilon_0}\; . \tag{2.80}$$

Přitom jsme vaak nebrali v úvahu polarizační pole, tj. vzájemné působení mezi dipóly. Při malé koncentraci částic (plyny) je můľeme zanedbat. Ne tak u kapalin a pevných látek. Za předpokladu, ľe vliv ostatních dipólů můľeme vyjádřit makroskopicky, tj. zanedbat v podstatě chaotická mikroskopická pole vyvolávaná nejbliľaími sousedními atomy, obklopíme daný atom myalenou kulovou plochou a pouľijeme výrazu pro pole uvnitř kulové dutiny v dielektriku (2.79). Tak dostaneme

$$P \;=\; \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\; E \;=\; 3\varepsilon_0\, \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\, E_d \;=\; \alpha\; n\; E_d\; ,$$

takľe

$$\varepsilon_r \;=\; \frac{1 + \frac{2\alpha n}{3\varepsilon_0}}{1 - \frac{\alpha n}{3\varepsilon_0}}, \quad \chi \;=\; \frac{\frac{\alpha n}{\varepsilon_0}}{1 - \frac{\alpha n}{3\varepsilon_0}}\; . \tag{2.81}$$

Uvedené výrazy vyjadřují Clausiův - Mosottiho vztah. Vidíme, ľe takto určená hodnota permitivity dielektrika je teplotně nezávislá (pokud se nemění koncentrace). Při malých hodnotách n přechází výsledek (2.80) v (2.81).

4. Debyeova - Langevinova teorie orientační polarizace

Vaimněme si nyní permitivity polárních dielektrik. Vedle konstantní, teplotně nezávislé sloľky atomové polarizovatelnosti se zřejmě uplatní uspořádávání jiľ existujících dipólových momentů ve vnějaím poli, tj. orientační polarizovatelnost. Je moľno očekávat, ľe s růstem teploty a rychlosti chaotického pohybu se bude toto uspořádání naruaovat a celková polarizace se bude zmenaovat. Je-li koncentrace dipólů n, jejich velikost p a označíme-li θ úhel, který svírá dipól se směrem pole, bude zřejmě velikost vektoru polarizace dána vztahem

$$P \;=\; n\; p\; \langle \cos\theta \rangle\; .$$

Je tedy třeba určit střední hodnotu $\cos\theta$. Protoľe na tomto kosinu závisí energie dipólu v elektrickém poli vztahem

$$\langle \cos\theta \rangle \;=\; -\frac{1}{pE}\; \langle W \rangle,$$

jde o to určit střední hodnotu energie. Předpokládáme-li Boltzmannovo rozdělení pro počet dipólů s energií W

$$n_W \;=\; \text{konst}\; \mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}}$$

(k je Boltzmannova konstanta), dostaneme integrováním

$$\langle \cos\theta \rangle = -\frac{1}{pE} \frac{\int_0^\infty W \, \mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}} \, dW}{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}} \, dW} = \frac{\int_0^\pi \cos\theta \, \mathrm{e}^{a\cos\theta} \, \sin\theta \, d\theta}{\int_0^\pi \mathrm{e}^{a\cos\theta} \, \sin\theta \, d\theta} = \mathrm{cotgh}\, a - \frac{1}{a} = L(a) \, .$$

Zde jsme označili bezrozměrnou proměnnou $a = (pE)/(kT)$. Výsledek integrování dá takzvanou Langevinovu funkci $L(a)$, kterou lze rozloľit do řady pro malé hodnoty a:

$$La = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \cdots \, .$$

Uváľíme-li jen první člen tohoto rozvoje, dostaneme

$$P = \frac{npa}{3} = \frac{np^2}{3kT} E, \quad \chi = \frac{np^2}{3\varepsilon_0 kT}, \quad \varepsilon_r = 1 + \frac{np^2}{3\varepsilon_0 kT} \, . \tag{2.82}$$

Jeví-li dielektrikum atomovou i orientační polarizovatelnost, bude teplotní závislost relativní permitivity dána jako (2.71) s konstantami

$$C_1 = 1 + \frac{\alpha n}{\varepsilon_0} \, , \; C_2 = \frac{np^2}{3\varepsilon_0 k} \, . \tag{2.83}$$

Získaný výsledek platí ovaem za řady zjednoduaujících předpokladů ($pE \ll kT$, nepřília velká koncentrace dipólů, moľnost jejich volného otáčení, moľnost zanedbat vzájemné působení mezi dipóly), které nemusí být vľdy splněny.

Příklady

2.1 Dvě stejné malé kuličky o hmotnostech $m = 1$ g visí na dvou nitích délky $l = 1$ m. Nabijeme-li je souhlasným nábojem stejné velikosti q, rozestoupí se tak, ľe niti budou svírat pravý úhel. Určete velikost náboje q.

$[1,5.10^{-6}$ C $]$

2.2 Na dvou stejných vodních kapkách je po jednom přebytečném elektronu, přičemľ síla elektrického odpuzování je stejně velká jako síla gravitačního přitahování. Určete poloměr kapek.

$[7,63.10^{-5}$ m $]$

2.3 Tři náboje $-e$, e, $-e$ jsou umístěny v uvedeném pořadí ve stejných vzdálenostech a. Určete síly působící na kaľdý náboj a elektrostatickou energii soustavy.

$\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3e^2}{4a^2}, \quad -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{3e^2}{a}\right]$

2.4 Najděte takové geometrické uspořádání jednoho protonu a dvou elektronů na jedné přímce, aby elektrostatická energie soustavy byla nulová.

$\left[-e, -e, e, \text{ poměr vzdáleností } \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

2.5 Najděte energii potřebnou k umístění čtyř elektronů do vrcholů čtyřstěnu o hraně $a = 10^{-10}$m, v jehoľ středu je proton.

$[-\ 1,226.10^{-18}\ \mathrm{J}\ ]$

2.6 Atomová jádra těľkých prvků můľeme povaľovat za koule nabité s objemovou hustotou náboje $\rho = \frac{4}{3}.10^{25}$C.m^{-3}. Jak se změní elektrostatická energie při symetrickém rozpadu jádra uranu na dvě stejná jádra palladia?

$$\left[\Delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{3}{5}\ \frac{Q^2}{R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = 6,65.10^{-11}\ \mathrm{J}\ \right]$$

2.7 Bodový náboj je umístěn a) ve středu krychle, b) v jednom z rohů krychle. Určete tok intenzity elektrického pole kaľdou ze stěn krychle.

$$\left[\frac{1}{6}\ \frac{q}{\varepsilon_0};\quad \frac{1}{24}\ \frac{q}{\varepsilon_0},\quad 0\ \right]$$

2.8 Tenká tyč nabitá s lineární hustotou náboje τ je umístěna na ose z mezi body $z = a$, $z = -a$. Určete potenciál v bodech na ose $x > 0$.

$$\left[\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ \ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\ \right]$$

2.9 Určete potenciál ve středu destičky nabité nábojem Q, má-li destička tvar a) kruhu o poloměru R, b) čtverce o straně a.

$$\left[\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R},\quad \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 a}\ln(1+\sqrt{2})\ \right]$$

2.10 Určete potenciál a velikost intenzity elektrického pole na ose kruhového kotouče poloměru R nabitého s ploanou hustotou náboje σ.

$$\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ (\sqrt{R^2+h^2} - |h|),\quad \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ \left(\pm 1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)\ \right]$$

2.11 Určete velikost intenzity elektrického pole ve středu kulové slupky poloměru R, je-li jedna její polovina nabita s ploanou hustotou σ.

$$\left[\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\ \right]$$

2.12 Z vodivé mýdlové bubliny poloměru $R = 2$cm nabité na potenciál $\varphi = 10^4$V vznikne po prasknutí kapka vody o poloměru $r = 0,05$cm. Určete potenciál kapky.

$[4.10^5\ \mathrm{V}\ ]$

2.13 Tenká tyč je ohnuta do tvaru téměř uzavřené kruľnice poloměru $r = 0,5$m. Mezi konci zůstává mezera aířky $d = 2$ cm, tyč nese náboj $q = 3,34.10^{-10}$ C. Určete velikost a směr elektrického pole ve středu kruľnice.

$[7,6.10^{-2}\ \mathrm{V.m^{-1}}\ ]$

2.14 Mějme kulovou slupku poloměru R nabitou s ploanou hustotou σ. V okolí vybraného bodu na této ploae seřízneme malý kulový vrchlík o poloměru $a \ll R$. Určete velikost elektrického pole uprostřed otvoru.

$$\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{1}{4}\ \frac{a^2}{R^2}\right)\ \right]$$

2.15 Intenzita elektrostatického pole u povrchu Země je 100 V.m^{-1} a míří směrem dolů. Určete náboj a potenciál Země.

$[-4.10^5\ \mathrm{C},\quad -6.10^8\ \mathrm{V}\ ]$

2.16 Jaký maximální náboj se udrľí na kovové kouli o poloměru $R = 10$ cm, je-li dielektrická pevnost vzduchu 30 kV.cm^{-1}?

$[3,3.10^{-6}\ \mathrm{C}\ ]$

2.17 Bodové náboje jsou uspořádány a) ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně a v pořadí $q,\ q,\ -2q$, b) ve vrcholech čtverce o straně a v pořadí $-q,\ q,\ q,\ -q$, c) v pořadí $-q,\ q,\ -q,\ q$. Určete elektrický dipólový moment soustavy.

$[aq\sqrt{3}, \quad 2aq, \quad 0\ ]$

2.18 Určete elektrický dipólový moment tenké tyče délky l a) jejíľ jedna polovina je nabita kladně a druhá záporně s lineární hustotou náboje τ, b) jejíľ nábojová hustota roste lineárně od $-\tau_0$ na jednom konci k $+\tau_0$ na druhém konci.

$\left[\frac{l^2\tau}{4}, \quad \frac{l^2\tau_0}{6}\ \right]$

2.19 Náboj je rozloľen na povrchu koule o poloměru R tak, ľe na jedné polokouli je kladný náboj s hustotou σ, na druhé polokouli záporný náboj s hustotou $-\sigma$. Určete elektrický dipólový moment koule. Jaký bude tento moment, budou-li obě polokoule nabity objemově s opačnými náboji téľe velikosti objemové hustoty ρ ?

$\left[2\pi\sigma R^3, \qquad \frac{1}{2}\ \pi\rho R^4\ \right]$

2.20 Elektrický dipól o momentu $\vec{p} \equiv (0, p, 0)$ leľí v bodě $(x, 0, 0)$ v elektrickém poli bodového náboje q umístěného v počátku. Určete sílu $\vec{F}$ a moment silové dvojice $\vec{D}$, které budou na dipól působit.

$\left[F_y = \frac{qp}{4\pi\varepsilon_0 x^3}, \quad D_z = -\ \frac{qp}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\ \right]$

2.21 Čtyři náboje $q,\ -q,\ q,\ -q$ jsou v tomto pořadí rozmístěny v rozích čtverce o straně a. Určete hlavní kvadrupólové momenty soustavy.

$[3qa^2,\ -3qa^2,\ 0\ ]$

2.22 Určete elektrický kvadrupólový moment rotačního elipsoidu.

$\left[\frac{2}{5}\ q\ (c^2 - a^2)\ \right]$

2.23 Mračno malých rozměrů nesoucí náboj $Q = 20$ C je ve výace $h = 1$ km nad povrchem Země. Určete intenzitu elektrostatického pole vzbuzeného tímto nábojem na povrchu Země ve vzdálenosti $l = 3$ km od místa nad nímľ se vznáaí mrak.

$[1,14.10^4\ \mathrm{V.m^{-1}}\ ]$

2.24 Náboj q je ve vzdálenosti $2R$ od středu uzemněné vodivé koule poloměru R. Jakou práci vykonáme, vzdálíme-li tento náboj do nekonečna? Jaký bude výsledek, bude-li koule izolována?

$$\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{6R}, \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{24R}\right]$$

2.25 Malá kulička nesoucí náboj $1,67.10^{-8}$ C je ve vzdálenosti 3 cm od rovinné kovové stěny, která je uzemněna. Jakou silou je kulička ke stěně přitahována?

$[6,9.10^{-4}$ N]

2.26 Kolik elektronů tvoří náboj kuličky o hmotnosti 10^{-11} g, jestliľe je udrľována v rovnováze v deskovém kondenzátoru jehoľ desky jsou od sebe vzdáleny 5 mm a jsou nabity na napětí 76,5 V ?

[40]

2.27 Kovová koule poloměru R je uzemněna. Ve vzdálenosti $2R$ od středu koule je umístěn bodový náboj q. Určete náboj q' indukovaný na kouli.

$$\left[-\,\frac{q}{2}\right]$$

2.28 Jakou plochu by musely mít elektrody deskového kondenzátoru o vzdálenosti 1 mm aby kondenzátor měl kapacitu 1 F ?

[113 km^2]

2.29 Jakou silou se přitahují desky kondenzátoru?

$$\left[-\,\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\right]$$

2.30 Mějme válcový kondenzátor o poloměrech elektrod $R_1 = 3$ cm, $R_2 = 10$ cm nabitý na napětí 450 V. Určete náboj připadající na jednotkovou délku, ploanou hustotu náboje na kaľdém z válců a intenzitu elektrostatického pole ve středu vzdálenosti mezi válci.

$[2,1.10^{-8}$ C.m^{-1}, $1,1.10^{-7}$ C.m^{-2}, $3,3.10^{-8}$ C.m^{-2}, $58,1$ V.cm^{-1}]

2.31 Určete napětí mezi dvěma koncentrickými koulemi o poloměrech $R_1 < R_2$ a nábojích $Q_1,\ Q_2$.

$$\left[\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon 0}\,\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right]$$

2.32 Určete kapacitu vedení tvořeného dvěma rovnoběľnými dráty délky 9 km, poloměru 1 mm a vzájemné vzdálenosti 15 cm.

$[0,05\ \mu F$]

obr. 2.38 obr. 2.39

2.33 Kondenzátor (Geigerův - Müllerův počítač) je tvořen drátem o poloměru 5 mm a koaxiálním válcem poloměru 5 cm. Na jaké maximální napětí můľeme kondenzátor nabít, je-li průrazné napětí vzduchu 30 kV.cm^{-1} ? Jak se bude měnit rozloľení průběhu napětí mezi elektrodami, budeme-li zmenaovat poloměr vnitřní elektrody?

$[3,45.10^4 \text{ V }]$

2.34 Určete kapacitu mezi body A, B soustavy kondenátorů na obr. 2.38. Vaechny kondenzátory mají stejnou kapacitu C.

$\left[\frac{11}{5}\ C\right]$

2.35 Deskový kondenzátor je z poloviny zaplněn dielektrikem o relativní permitivitě ε_r, a to a) rovnoběľně s deskami, b) kolmo k deskám (viz obr. 2.40). Jak se změní jeho kapacita?

$\left[\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}, \quad \frac{\varepsilon_r+2}{2} \quad \text{krát}\right]$

2.36 Prostor mezi deskami kondenzátoru je zaplněn dielektrikem, jehoľ permitivita se mění lineárně od hodnoty ε_1 u jedné desky k ε_2 u druhé desky. Určete jeho kapacitu.

$\left[\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\ S}{\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\ d}\right]$

2.37 Deskový vzduchový kondenzátor má kapacitu C_0. Je připojen ke zdroji napětí U_0 a je na něm nashromáľděna energie W_0. Potom je ponořen do oleje o relativní permitivitě ε_r, přičemľ zůstává připojen ke zdroji napětí. Jeho energie se změní na W_1. Nakonec jej odpojíme od zdroje a vyjmeme z oleje. Bude na něm napětí U_2 a energie W_2.Určete W_1, U_2, W_2.

$[\varepsilon_r\ W_0, \quad \varepsilon_r\ U_0, \quad \varepsilon_r^2\ W_0\ ]$

2.38 Určete polarizovatelnost α atomu helia, je-li jeho relativní permitivita za normálních podmínek $\varepsilon_r = 1,000074$.

$\left[\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0} = 0,219.10^{-30} \text{ m}^3\right]$

2.39 Indukovaný elektrický dipólový moment kuličky z vosku ($\varepsilon_r = 3$) v elektrickém poli je 1,5 krát menaí neľ u stejně velké skleněné kuličky. Jaká je relativní permitivita skla?

[5,5]

2.40 Jaká bude velikost indukovaného dipólového momenmtu vodivé kuličky poloměru R v poli E_0, budeme-li brát $\varepsilon_r \to \infty$?.

[$4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0$]

2.41 Máme kondenzátor s olejovým dielektrikem ($\varepsilon_r = 2,24$) a intenzitou elektrického pole $E = 9.10^6$ V.m^{-1}. V oleji vznikne bublina plynu. Jaká bude intenzita pole v bublině?

[$1,1.10^7$ V.m^{-1}]

3. STACIONÁRNÍ ELEKTRICKÉ POLE

1. Elektrický proud

Dosud jsme se zabývali vlastnostmi a vzájemným působením statických nábojů, tedy takových, které byly vůči dané soustavě souřadnic v klidu. Víme, že je to pouze modelová situace, neboť reálné náboje jsou vždy v pohybu. Přejdeme nyní ke zkoumání pohybujících se nábojů. Uvažujme nějakou plochu S, například průřez vodiče a předpokládejme, že touto plochou prošel elektrický náboj Q. Tok náboje danou plochou, tedy náboj prošlý touto plochou za jednotku času, nazýváme *elektrickým proudem.* Termínem "elektrický proud" budeme podobně jako u náboje označovat jak sám jev (tedy průchod náboje), tak fyzikální veličinu, tok náboje.

Tok náboje může být obecně proměnný v čase. Vezmeme-li do ruky nabitou kouli a proběhneme-li s ní dveřmi, proteče otvorem dveří krátkodobý proudový impuls. Přeneseme-li však nabitý kondenzátor, proud neproteče, neboť přenášíme současně stejně velký kladný a záporný náboj.

Ve vodiči jsou volné náboje v neustálém tepelném pohybu značnými rychlostmi. Tak elektrony se při pokojové teplotě pohybují střední rychlostí

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1,1.10^5 \text{ m.s}^{-1} , \tag{3.1}$$

kde $k = 1,38.10^{-23}$ J.K^{-1} je Boltzmannova konstanta a m hmotnost elektronu. Je-li však tento pohyb dokonale chaotický, nebude průřezem vodiče protékat proud, neboť tok náboje z jedné i druhé strany plochy se vzájemně vyrovnávají. Proud začne téci, jakmile se na tento neuspořádaný, chaotický pohyb superponuje pohyb uspořádaný, to jest získají-li elektrony převládající složku rychlosti kolmou k průřezu, byť malou. Pokud jde o velikost elektrického proudu, můžeme definovat buď jeho střední hodnotu:

$$\langle I \rangle = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

nebo okamžitou hodnotu

$$I = \frac{dQ}{dt} . \tag{3.2}$$

Pokud jde o směr proudu, musíme definovat, který směr normály k ploše považujeme za kladný. Proteče-li plochou v kladném směru kladný náboj, je to zřejmě ekvivalentní situaci, kdy proteče v záporném směru náboj záporný. Můžeme i uvažovat i proud uzavřenou plochou; potom považujeme podle dohody vytékající proud za kladný.

Elektrický proud byl zvolen v soustavě jednotek SI za jednu ze základních veličin a jeho jednotkou je ampér (A), který budeme definovat později. Zřejmě je A = C.s^{-1}. Proud jako tok náboje je vázán na určitou plochu a je podobně jako náboj veličinou integrální. Můžeme zavést též *hustotu proudu* $\vec{j}(x, y, z)$ jako odpovídající veličinu diferenciální vztahy

$$d\,I = \vec{j} \cdot d\,\vec{S} , \qquad I = \int_S \vec{j} \cdot d\,\vec{S} . \tag{3.3}$$

Vektor $d\vec{S}$ má velikost diferenciálně malé plošky a míří směrem normály.

Elektrický proud může téci též po dané ploše, například po povrchu nějakého tělesa. Potom můžeme zavést *lineární hustotu proudu* $\vec{\alpha}$ vztahem

$$d\,I = \vec{\alpha} \cdot \vec{n}\; d\,l, \tag{3.4}$$

obr. 3.1 obr. 3.2

kde dl je diferenciálně malá část nějaké křivky na proudové ploše protínaná proudem a vektor $\vec{n}$ jednotkový vektor normály k ní. Hustota proudu se zřejmě měří v ampérech na metr čtvereční (A.m^{-2}), lineární hustota proudu v ampérech na metr (A.m^{-1}).

Existuje přímý vztah mezi proudovou hustotou a koncentrací a rychlostí elektrických nábojů. Předpokládejme že všechny náboje jsou rovnoměrně rozloženy v prostoru s koncentrací n a pohybují se touž rychlostí $\vec{v}$ tak, že procházejí rovinnou plochou ΔS. Nechť střední proud za dobu Δt je ΔI. Sestrojíme-li z plochy ΔS a vektoru $\vec{v}\ \Delta t$ rovnoběžnostěn (obr. 3.1), potom za dobu Δt projdou plochou ΔS všechny náboje obsažené v objemu tohoto rovnoběžnostěnu.

Protože objem rovnoběžnostěnu bude $\Delta V = \vec{v} \cdot \Delta\vec{S}\ \Delta t$, dostaneme

$$\Delta I \ = \ \frac{\Delta Q}{\Delta t} \ = \ \frac{qn\Delta V}{\Delta t} \ = \ qn\vec{v} \cdot \Delta\vec{S} \ = \ \vec{j} \cdot \Delta\vec{S} \, .$$

Proto

$$\vec{j} \ = \ q\ n\ \vec{v} \ = \ \rho\ \vec{v}, \qquad \vec{\alpha} \ = \ \sigma\ \vec{v}\ , \tag{3.5}$$

kde ρ a σ jsou objemová a plošná hustota hustota náboje. Pokud bude proud vytvářen více druhy nábojů velikosti q_α s různými koncentracemi n_α a různou střední *uspořádanou* rychlostí $\vec{u}_\alpha$, bude výsledná hustota náboje a hustota proudu

$$\rho \ = \ \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha\ , \qquad\qquad \vec{j} \ = \ \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha\ . \tag{3.6}$$

Všimněme si, že může nastat situace, kdy celková hustota náboje bude nulová (hustota kladných a záporných nábojů se vzájemně vyrovnají) a hustota proudu přitom může být nenulová (pohybují-li se kladné a záporné náboje různými uspořádanými rychlostmi).

Mezi hustotou náboje a hustotou proudu platí důležitý vztah nazývaný *rovnice kontinuity proudu.* Je matematickým vyjádřením zákona zachování elektrického náboje. S rovnicí kontinuity jsme se již setkali v hydrodynamice, kde vyjadřovala zákon zachování hmotnosti proudící kapaliny, rovnice kontinuity platí, jak uvidíme, i pro hustotu energie a hustotu toku energie. Rovnici kontinuity lze formulovat v integrálním nebo diferenciálním tvaru. Uvažujme objem V ohraničený uzavřenou plochou S. Vytéká-li z tohoto objemu proud I, není možno jinak, než že stejnou měrou ubývá elektrický náboj Q v tomto objemu. Matematicky to lze vyjádřit následovně:

$$I \;=\; \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \;=\; -\,\frac{d}{dt}\int_V \rho dV \;=\; -\,\frac{dQ}{dt}\;. \tag{3.7}$$

Aplikujeme-li na plošný integrál Gaussovu větu, dostaneme rovnici kontinuity ve tvaru

$$\int_V \mathrm{div}\vec{j}\; dV \;=\; -\,\frac{d}{dt}\int_V \rho dV\;.$$

Protože tento vztah musí platit obecně pro libovolný objem v okolí libovolného bodu, musí se rovnat i integrované funkce. Při přechodu k diferenciálním veličinám definovaným v daném bodě prostoru musíme ovšem nahradit totální časovou derivaci derivací parciální. Tím dostáváme rovnici kontinuity v diferenciálním tvaru

$$\mathrm{div}\;\vec{j} \;=\; -\,\frac{\partial\,\rho}{\partial\,t}\;. \tag{3.8}$$

Pod elektrickým proudem jsme dosud rozuměli přemisťování volných elektrických nábojů v prostoru. Charakter pohybu nábojů však může být obecně mnohem složitější. Především můžeme rozlišovat elektrické proudy podle jejich časové závislosti jako proudy stacionární, kvazistacionární a nestacionární. *Stacionární* proudy představují ustálené, laminární proudění elektrických nábojů, které můžeme podobně jako v hydrodynamice popisovat pomocí proudových čar a uzavřených proudových trubic. Všechny makroskopické veličiny, zejména nábojová a proudová hustota, koncentrace a rychlost nábojů a ovšem i stacionární elektrické pole jsou funkcemi pouze prostorových souřadnic a *všechny parciální derivace podle času jsou přitom rovny nule.* Proudy *kvazistacionární* se sice mění v čase, ale natolik pomalu, že nedochází k vyzařování elektromagnetických vln. Příkladem mohou být střídavé proudy užívaných frekvencí 50, resp. 60 Hz. Obecně *nestacionární* proudy se mění v čase libovolně, může jít například o proudy vysokofrekvenční, o krátkodobé proudové impulsy apod.

Podle jiného hlediska můžeme rozlišovat proudy *stejnosměrné* a proudy *střídavé*, které v čase mění svůj směr. Mění-li jej podle zákona sinu, jde o proudy harmonické.

Důležité je rovněž třídění proudů podle charakteru pohybu nábojů. Pak můžeme rozlišovat

1) proudy *volné*
a) *kondukční* (vodivostní),
b) *konvekční*

2) proudy *vázané*
a) *polarizační*
b) *magnetizační*

3) proud *posuvný* (Maxwellův).

Volné proudy jsou vyvolány pohybem volných nábojů v prostoru. Jde-li o pohyb nábojů ve vodiči pod vlivem přiloženého napětí, mluvíme o proudech kondukčních, které se, alespoň v některých případech, podřizují například Ohmovu zákonu. Proudy konvekční jsou zprostředkovány mechanickým pohybem nabitých těles nebo částic v prostoru. Může jít například o pohyb nabitého pásu van de Graaffova urychlovače, rotující nabitý kotouč, svazek nabitých částic pohybujících se v urychlovači a podobně.

U vázaných proudů se náboje nemohou volně přemisťovat; tvoří například součást molekulárních či atomárních dipólů. V kapitole o elektrostatice jsme tyto dipóly považovali za tuhé, nedeformovatelné. Ve skutečnosti se však mohou dipóly pod vlivem elektrického pole deformovat a vzdálenost mezi náboji se může měnit. Na obr. 3.2 je znázorněn takový dipól a rovina S taková, že například kladný náboj při deformaci touto rovinou prochází. Bude-li se dipól v proměnném elektrrickém poli střídavě smršťovat a roztahovat, bude rovinou S protékat střídavý proud. Takový proud nazýváme polarizačním. Je-li například koncentrace dipólů v dokonale polarizovaném dielektriku N, bude hustota polarizačního proudu

$$\vec{j}_p = \rho\vec{v} = Nq\frac{d\vec{l}}{dt} = N\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}\,, \tag{3.9}$$

kde $\vec{p}$ je jednotlivý dipólový moment $\vec{P}$ vektor polarizace. Protože proudová hustota a vektor polarizace jsou diferenciální veličiny definované v každém bodě prostoru, musíme nahradit obyčejnou derivaci parciální a vyjádřit polarizační proud jako časovou změnu vektoru polarizace:

$$\vec{j}_p = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\,. \tag{3.10}$$

Polarizační proud nazýváme někdy také posuvným proudem v dielektriku a je zřejmé, že musí být principiálně časově proměnný. Výraz 3.10 využijeme v kapitole o obecném elektromagnetickém poli.

Jiným druhem vázaných proudů jsou proudy magnetizační, které jsou vyvolány mikroskopickými smyčkovými proudy v atomech a molekulách magnetických látek. Tyto proudy mohou vznikat i díky spinu nabitých částic, kdy vůbec nedochází k pohybu nábojů v prostoru. Přesto však mohou po vystředování přispívat k celkovému makroskopickému proudu.

Konečně posledním typem proudu, který může být principiálně také jen časově proměnný, je takzvaný posuvný proud ve vakuu nazývaný též proud Maxwellův. V tomto případě jej nepřenášejí elektrické náboje a je zprostředkován proměnným elektrickým polem. Takový proud umožní uzavřít střídavý elektrický obvod s kondenzátorem (obr. 3.3).

Pro volný pohyb nábojů představuje kondenzátor přerušení obvodu, takže ustálený proud zde téci nemůže. V případě časově proměnného, například harmonického proudu, budou náboje přicházející na jednu z desek kondenzátoru vyvolávat proměnné elektrické pole, a to bude indukovat pohyb nábojů na druhé desce. Obvod se tak uzavře, podobně jako se bude přenášet pulzující pohyb kapaliny trubicí, která

obr. 3.3

je přerušena pružnou membránou.

2. Vlastnosti stacionárního proudu

Předpokládejme, že se elektrické náboje pohybují v nějaké oblasti prostoru ustáleným způsobem a vytvářejí tak stacionární elektrický proud. Bude tedy pro něj platit rovnice kontinuity (3.8) ve tvaru

$$\mathrm{div}\,\vec{j} \;=\; 0\,. \tag{3.11}$$

Pohybující se náboje budou kolem sebe vyvolávat elektrické pole, které bude silově působit na další elektrické náboje, ať již nehybné nebo pohybující se. Také toto *stacionární elektrické pole* bude splňovat příslušné Maxwellovy rovnice. Protože jsme postulovali, že Gaussův zákon bude platit i pro pohybující se náboje počet siločar vycházejících z náboje se nemění, můžeme očekávat, že rovnice pro divergenci $\vec{E}$ bude mít stejný tvar jako pro pole elektrostatické.

K určení rovnice pro rotaci $\vec{E}$ je třeba usoudit, zda stacionární elektrické pole je potenciální či nikoliv. O elektrostatickém poli víme, že práce, kterou koná nad elektrickými náboji nezávisí na dráze a jde-li o dráhu uzavřenou, je práce pole rovna nule. Vyplývá to z toho, že pole statického bodového náboje je v prostoru centrální a izotropní. Pokud se bodové náboje začnou pohybovat rovnoměrně přímočaře malými rychlostmi, můžeme mít za to, že siločáry si uchovají izotropní rozložení v prostoru a budou se s nábojem prostě přemisťovat. Není to sice již pole Coulombovo, ale v každém daném okamžiku jej lze za takové považovat. Podotkněme, že náboje v běžných vodičích se skutečně pohybují velmi malými rychlostmi, jak dále uvidíme. [8]

Uvažujme uzavřenou proudovou smyčku 1 na obr. 3.4, jíž protéká stacionární elektrický proud. Pokud se náboje pohybují pomalu, bude jejich pole v každém okamžiku Coulombovo. Při relativistických rychlostech se díky invarianci náboje počet siločar nemění, ale uplatní se relativistická kontrakce délek, která povede pouze ke změně hustoty náboje. Elektrické pole vytvářené obvodem stacionárního proudu můžeme proto v každém případě považovat za potenciální a jeho rotaci za nulovou.

Uvedené zdůvodnění je ovšem pouze kvalitativní. Místo teoretických úvah bychom se však mohli opřít o experimentální fakt a uvažovat druhou vodivou smyčku 2 na obr. 3.4. Kdyby stacionární elektrické

[8]Náboje se ovšem mohou pohybovat i rychlostmi relativistickými, například v urychlovačích a vytvářet také stacionární proudy. Z relativistických transformací v příští kapitole odvodíme prostorové rozložení siločar rychle se pohybujících nábojů. Uvidíme, že tyto siločáry jsou zhuštěny ve směru kolmém k pohybu a takové pole již potenciální není. Pohybuje-li se však jeden jednotlivý náboj, nebude přesně vzato vytvářet stacionární proud, nýbrž proudový impuls. Stacionární proud vyžaduje časově neměnné rozložení hustoty nábojů v prostoru. Navíc v kruhových urychlovačích, kde se relativistické náboje pohybují po uzavřených kruhových drahách, se uplatní jejich dostředivé zrychlení a takové náboje budou vyzařovat elektromagnetické vlny v podobě tzv. synchrotronového záření.

obr. 3.4 obr. 3.5

pole vyvolávané proudem ve smyčce 1 nebylo potenciální, potom by při vhodné poloze vodivé smyčky 2 konalo práci nad volnými náboji ve smyčce 2 a mohlo by zde indukovat proud. Taková indukce proudu stacionárním polem však pozorována není. Můžeme tedy pro stacionární elektrické pole napsat soustavu Maxwellových rovnic

$$\mathrm{div}\,\vec{E} \;=\; \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \mathrm{rot}\,\vec{E} \;=\; 0\,. \tag{3.12}$$

Tato soustava je formálně shodná se soustavou rovnic pro elektrostatické pole (2.11) a vyjadřuje skutečně určité analogie mezi elektrostatickým a stacionárním polem. Jsou zde však dva zásadní rozdíly:

1. Pro stacionární pole platí jiné okrajové podmínky než pro pole elektrostatické. Uvnitř vodičů není stacionární pole nulové, na povrchu vodičů není potenciál konstantní. To právě vede ke vzniku elektrického proudu.[9]

2. V elektrostatice na sebe náboje působí pouze elektrickými silami. V případě pohybujících se nábojů vytvářejících elektrický proud již nemůžeme toto tvrzení automaticky zobecnit. Vraťme se ke dvěma smyčkám na obr. 3.4 a předpokládejme, že jimi protékají stacionární elektrické proudy. Víme, že takové proudy mohou protékat i tehdy, bude-li hustota elektrického náboje v objemu obou smyček nulová. Potom by mezi smyčkami elektrické síly nepůsobily. Experiment však ukazuje, že dvě smyčky protékané proudem na sebe silově působí a tato síla závisí na směru proudu. Nazýváme ji silou magnetickou a je na ní založena celá elektrotechnika. Teoretické zdůvodnění vzniku magnetické síly dává právě speciální teorie relativity a budeme se jí zabývat v následující kapitole.

V řadě důležitých případů se stacionární proud podřizuje *Ohmovu zákonu.* Tento zákon sice patří k obecně nejznámějším, ale ve skutečnosti nepředstavuje přírodní zákon takového významu, jako je třeba zákon Gaussův. Ohmův zákon je vlastně materiálový vztah, který udává závislost mezi proudem a napětím na koncích vodiče pro některé materiály za určitých podmínek. Uvažme úsek homogenního vodiče na obr. 3.5 na jehož koncích je udržován rozdíl potenciálů. Je-li L délka vodiče, bude uvnitř působit stacionární elektrické pole velikosti

$$E \;=\; \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{L} \;=\; \frac{U}{L}\,.$$

Působením tohoto pole dojde k pohybu nábojů a úsekem vodiče (rezistorem) bude protékat stacionární proud. Je možno očekávat, že mezi napětím U na koncích vodiče a mezi proudem I bude existovat závislost určovaná pouze geometrií a materiálem vodiče. Tuto závislost lze najít buď experimentálně nebo na základě mikroskopické teorie pohybu elektrických nábojů v příslušné látce. Takovou teorií vodivosti se budeme krátce zabývat v dalších odstavcích.

[9] Při přibližně stejných okrajových podmínkách jsou siločáry elektrostatického a stacionárního pole totožné a splývají s proudovými čarami stacionárního proudu. Toho se někdy využívá k modelování elektrostatického pole pomocí tzv. *elektrolytické vany.* Elektrody daného tvaru jsou přitom ponořeny do slabě vodivého prostředí a proudové čáry pak sledují siločáry pole.

obr. 3.6 obr. 3.7

Použijeme-li jako materiál vodiče kov (stříbro, měď, hliník), zjistíme, že proud je v širokých mezích úměrný napětí (při dané teplotě). To je právě Ohmův zákon:

$$I = \frac{U}{R} = G\,U\,. \tag{3.13}$$

Voltampérová charakteristika takového rezistoru má pak charakter přímé úměrnosti (obr. 3.6).

Konstanta úměrnosti G se nazývá *vodivost (konduktance)* a měří se v siemensech (S), její převrácená hodnota je *odpor (rezistance)*, kterou měříme v ohmech (Ω).

Experimentálně lze zjistit, že odpor je přímo úměrný délce vodiče L, nepřímo úměrný průřezu vodiče S a konstanta úměrnosti, která charakterizuje vlastnosti materiálu vodiče, se nazývá *měrným odporem (rezistivitou)* a označuje se ρ. Převrácenou hodnotu měrného odporu nazýváme *měrnou vodivostí (konduktivitou)* a označujeme σ. Je ovšem třeba dát pozor, abychom nezaměnili označení ρ, σ s objemovou a plošnou hustotou náboje. Je zřejmé, že rezistivitu měříme v jednotkách ohm metr (Ω.m), konduktivitu v jednotkách siemens na metr (S.m^{-1}). Můžeme tedy psát

$$R = \rho\,\frac{L}{S} \qquad G = \frac{1}{R} = \sigma\frac{S}{L}\,. \tag{3.14}$$

Bude-li průřez a případně i měrný odpor podél vodiče proměnný, musíme integrovat

$$R = \int_0^L \frac{\rho(l)}{S(l)}\,dl\,. \tag{3.15}$$

Ohmův zákon můžeme vyjádřit též v diferenciálním tvaru. V úseku homogenního vodiče na obr. 3.5 vyčleníme proudové vlákno o malém průřezu ΔS, a tedy malé vodivosti ΔG. Potom

$$\Delta I = U\,\Delta G = U\,\frac{\sigma}{L}\,\Delta S = \sigma E\,\Delta S = \sigma\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}\,.$$

Uvážíme-li definici proudové hustoty (3.3), dostaneme Ohmův zákon ve tvaru

$$\vec{j} = \sigma\,\vec{E}\,. \tag{3.16}$$

. Konduktivita je podobně jako permitivita jednou z tzv. *materiálových konstant*. Vektory $\vec{j}$ a $\vec{E}$ nemusí mít obecně týž směr a potom se konduktivita stává tenzorem σ_{ik}. V takovém anizotropním prostředí má pak Ohmův zákon tvar

$$j_i = \sigma_{ik}\,E_k\,. \tag{3.17}$$

obr. 3.8

Ohmův zákon v podobě přímé úměrnosti (3.13) vyjadřuje lineární vztah mezi proudem a napětím a předpokládá, že průchod proudu sám neovlivňuje vlastnosti vodiče. Lze proto uplatnit i princip superpozice a proudy vyvolávané ve vodiči více napěťovými zdroji nezávisle sčítat. Taková situace může ovšem existovat jen v určitých mezích, u tzv. lineárních prvků. S nimi bychom ovšem v elektrotechnice nevystačili. Chceme-li elektrické proudy a napětí zesilovat, generovat a různě ovlivňovat, musíme použít právě nelineárních prvků, kde Ohmův zákon neplatí.Veškeré tvoření a vznik nového jsou založeny na nelinearitách.

Na obr. 3.8 jsou naznačeny voltampérové charakteristiky některých nelineárních prvků. Na prvním z nich dochází k nasycení (saturaci) proudu. Po dosažení určité hodnoty proud dále neroste, i když napětí stoupá. Na druhém obrázku mále charakteristiku usměrňovacího prvku, který propouští proud jen jedním směrem. Konečně na třetím existuje úsek se záporným odporem, kdy při rostoucím napětí proud dokonce klesá. Takové prvky se uplatní v některých generátorech.

Ohmův zákon má tedy své meze platnosti. U kovových vodičů je dobře splněn až pro pole o intenzitách několika milionů voltů na metr; u zředěných plynů přestává platit už při několika voltech či desítek voltů na metr. Nelze jej také aplikovat pro příliš krátké proudové impulsy (kolem 10^{-10} s) a při teplotách blízkých absolutní nule, kdy se uplatní jev supravodivosti.

Zmíníme se ještě o známých pravidlech pro sčítání sériově a paralelně spojených odporů, která jsou opačná než při sčítání kapacit (obr. 3.7).

Při sériovém spojení se sčítají napětí, a tedy i odpory. Při paralelním spojení se sčítají proudy, a tedy převrácené hodnoty odporů:

$$R_{ser} = \sum_i R_i \,, \qquad R_{par} = \left(\sum_i \frac{1}{R_i} \right)^{-1} . \tag{3.18}$$

Dosud jsme uvažovali průchod proudu rezistorem, který jsme si představovali jako úsek homogenního vodiče. Nezabývali jsme se otázkou, co se stane s náboji, když dojdou na konec vodiče. K tomu, aby mohl protékat stacionární proud, musí být obvod zřejmě uzavřen, musí tvořit kompletní smyčku. Uzavřeme-li homogenní vodič tak, že spojíme oba jeho konce, vznikne další potíž. Mají-li se náboje pohybovat ustálenou rychlostí, musí výsledná střední síla na ně působící být nulová. Síla se strany stacionárního elektrického pole musí tedy být kompenzována silou tření při pohybu ve vodiči doprovázaném srážkami s dalšími částicemi. Pak by ovšem stacionární elektrické pole muselo konat práci nad náboji pohybujícími se po uzavřené dráze, dodávat jim energii. [10] To je ovšem v rozporu se skutečností, že stacionární pole je potenciální. Z takové analýzy vyplyne, že v uzavřeném obvodu musí existovat potenciálové skoky, musí zde působit nějaký zdroj energie. Situace je znázorněna na obr. 3.9.

Uzavřený obvod tvoří vnější odpor (rezistor R), a zdroj *elektromotorického napětí* (zkráceně emn) o vnitřním odporu R_i. Zdroj emn vyvolává v obvodu nepotenciální elektromotorickou (vtištěnou) sílu

[10] Vyjímku tvoří supravodivý prstenec, kde proud protéká po povrchu bez měřitelného odporu a bez vnějšího zdroje energie po velmi dlouhou dobu.

obr. 3.9

působící na náboje, a to takovou že její práce po uzavřené dráze je různá od nuly:

$$A \;=\; \oint_l \vec{F}\cdot d\vec{l} \;\neq\; 0$$

Předpokládejme, že velikost této síly je úměrná náboji. Potom můžeme zavést veličinu zvanou emn vztahem

$$\mathcal{E} \;=\; \frac{1}{q} \oint_l \vec{F}\cdot d\vec{l}\,. \tag{3.19}$$

Poměr $\vec{F}/q$ někdy nazýváme vtištěnou (elektromotorickou) intenzitou. Na koncích rezistoru (svorkách zdroje) působí takzvané *svorkové napětí*

$$U \;=\; \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}\,. \tag{3.20}$$

Je zřejmé, že emn měříme stejně jako svorkové napětí ve voltech.

Zdroj emn tedy představuje úsek obvodu, více nebo méně lokalizovaný, kde na náboje působí síly, které zvyšují jejich potenciál. Je samozřejmě třeba, aby proud protékal i úsekem zdroje, který vykazuje rovněž vlastní, tzv. vnitřní odpor. Schematicky je to naznačeno na obr. 3.9. Má-li náboj na svorce 1 potenciál φ_1, klesne tento potenciál po průchodu vnější částí obvodu na φ_2. Svorkové napětí je tedy rovno potenciálovému spádu na odporu R a podle Ohmova zákona

$$U \;=\; \varphi_1 - \varphi_2 \;=\; R\,I\,.$$

Na vstupu a výstupu zdroje (elektrodách článku či baterie) dojde k potenciálovým skokům - z φ_2 na φ_2' a z φ_1' na φ_1. Také na vnitřním odporu zdroje nastane potenciálový spád

$$\varphi_2' - \varphi_1' \;=\; R_i\,I\,.$$

Potenciálové spády musí být kompenzovány potenciálovými skoky v obvodu, takže práce při přenosu náboje uzavřeným obvodem je rovna

$$A \;=\; q(\varphi_1 - \varphi_2) + q(\varphi_2' - \varphi_1') \;=\; R\,I \;+\; R_i\,I \;=\; q[(\varphi_1 - \varphi_1') + (\varphi_2' - \varphi_2)] \;=\; q\,\mathcal{E}\,. \tag{3.21}$$

Elektromotorické napětí tak představuje součet potenciálových skoků v obvodu. Pro uzavřený obvod můžeme Ohmův zákon psát ve tvaru

$$\mathcal{E} \;=\; U \;+\; R_i\,I \;=\; (R \;+\; R_i)\,I$$

neboli

$$I \;=\; \frac{\mathcal{E}}{R + R_i}\,. \tag{3.22}$$

obr. 3.10

Známe-li svorkové napětí, můžeme používat Ohmův zákon ve tvaru (3.13). Je-li zadáno elektromotorické napětí, musíme znát též vnitřní odpor zdroje a psát Ohmův zákon ve tvaru (3.22). Je zřejmé, že elektromotorické a svorkové napětí jsou si rovny, neprotéká-li obvodem proud. Po zapojení vnějšího odporu může svorkové napětí podstatně klesnout pod napětí elektromotorické a pak hovoříme o "měkkém" zdroji.

Odpory a zdroje emn mohou být více či méně složitě propojeny a mohou vytvářet *sítě* stacionárních proudů (obr. 3.10).

Teorie elektrických sítí představuje zvláštní, rozsáhlou část elektrotechniky a matematicky souvisí s teorií grafů. Sítě jsou tvořeny větvemi o daném odporu, v nichž mohou působit zdroje emn. Body, v nichž se stýkají alespoň tři větve, nazýváme uzly, uzavřenou soustavu větví nazýváme smyčkou. Úkolem teorie sítí je určit proudy ve všech větvích, jsou-li známy buď potenciály ve všech uzlech nebo velikosti emn a vnitřní odpory zdrojů.

Při řešení sítí využíváme známá *Kirchhoffova pravidla* někdy nazývaná Kirchhoffovými zákony. Ve skutečnosti nejde o nové fyzikální zákony, ale o aplikaci rovnice kontinuity a Ohmova zákona pro uzavřené smyčky. První Kirchhoffovo pravidlo (pro uzly) požaduje, aby *součet všech proudů v každém uzlu byl roven nule*; vystupující proudy budeme přitom považovat za kladné, vstupující za záporné:

$$\sum_{\alpha} I_{\alpha} = 0 \,. \tag{3.23}$$

Jde vlastně o integrální tvar rovnice kontinuity (3.11); kdyby přísun náboje do uzlu nebyl v rovnováze v jeho odvodem, náboj by se v uzlu hromadil a proud by nemohl být stacionární.

Druhé Kirchhoffovo pravidlo (pro smyčky) říká, že *součet potenciálových spádů na všech odporech (včetně vnitřních odporů zdrojů) podél uzavřené smyčky je roven součtu elektromotorických napětí působících v této smyčce.* Opět musíme znaménka proudů a polarizace emn přizpůsobit zvolenému směru obcházení smyčky. Tedy

$$\sum_{\alpha} R_{\alpha}\, I_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \,. \tag{3.24}$$

Jde tedy o řešení soustavy rovnic vyjadřujících Kirchhoffova pravidla. Těchto rovnic může být velmi mnoho a jejich řešení může být i pro počítače zdlouhavou záležitostí. Snažíme se samozřejmě využít maximálně Kirchhoffových pravidel pro uzly, která jsou jednodušší. Má-li síť například m uzlů a n větví, poskytuje nám první Kirchhoffovo pravidlo m - 1 nezávislých rovnic pro uzly a zbývá vybrat n - (m - 1) rovnic pro smyčky. Tyto smyčky je třeba ovšem volit tak, aby získané rovnice byly nezávislé, což není

obr. 3.11

triviální. K tomu slouží například *metoda úplného stromu.* Vyčleníme v síti takovou soustavu větví, aby po nich bylo možno projít od každého uzlu k libovolnému jinému a aby těchto větví byl právě nezbytný počet. Smyčky pak vybereme tak aby každá z nich obsahovala jednu větev, která *nepatří* k úplnému stromu. Na obr. 3.11 je znázorněna síť s 6 uzly a 9 větvemi a vybrán jeden z možných úplných stromů. Vidíme, že větví, které k němu nepatří je právě n - (m - 1) = 4 a ty nám umožní vybrat 4 smyčky.

Při řešení sítí se uplatní řada matematických metod, které zde nebudeme rozebírat. U *metody smyčkových proudů* se využívá principu superpozice a každé nezávislé smyčce se přiřazuje myšlený smyčkový proud. Skutečný proud v dané větvi je pak součtem smyčkových proudů těch smyček, jejichž součástí je uvažovaná větev. U *metody uzlových napětí* využíváme prvního Kirchhoffova pravidla a místo smyčkových proudů se snažíme určit napětí ve všech uzlech vzhledem k nějakému uzlu referenčnímu. Pak je již snadné najít proud v jednotlivých větvích.

V řadě případů nepotřebujeme znát řešení celé sítě, ale jen proud tekoucí určitou větví. Pokud v této větvi není žádný zdroj, chová se celý zbytek sítě jako zdroj emn s určitým vnitřním odporem a dodává do této větve energii.

Stačí tedy určit velikost emn tohoto zdroje a jeho vnitřní odpor. K tomu slouží *Théváninova věta*, která praví:

Proud libovolnou větví sítě se nezmění, vyjmeme-li ji ze sítě a připojíme ke zdroji, jehož emn se rovná napětí, které je na uzlech sítě, mezi nimiž větev původně byla, a jehož vnitřní odpor se rovná odporu sítě měřenému na těchto dvou uzlech po nahrazení všech zdrojů jejich sériovými vnitřními odpory.

Energie, kterou zdroj emn dodává do sítě stacionárních proudů, se na odporech mění nevratně v energii tepelnou. Protože práce při přenesení náboje Q mezi body o napětí U je $A = QU$, bude tepelný výkon uvolňovaný na odporu R roven

$$P \;=\; \frac{dA}{dt} \;=\; U\,\frac{dQ}{dt} \;=\; U\;I \;=\; R\;I^2 \;=\; \frac{U^2}{R} \;=\; G\;U^2\;. \tag{3.25}$$

Za dobu Δt se tedy uvolní tepelná energie

$$W \;=\; R\;I^2\;\Delta t\;. \tag{3.26}$$

Uvedený vztah se nazývá *Jouleův zákon* (někdy též Jouleův - Lenzův zákon) a uvolněná energie je známa jako "Jouleovo teplo". [11]

V uzavřeném obvodu bude výkon na vnějším odporu R

$$P(R) \;=\; R\;I^2 \;=\; \frac{\mathcal{E}^2\;R}{(R\;+\;R_i)^2}\;.$$

Je snadné ověřit, že tento výkon jako funkce R bude mít maximum při $R = R_i$, kdy bude roven $P_{max} = \mathcal{E}^2/4R$. Říkáme, že zátěž je přizpůsobena zdroji.

Jouleův zákon lze získat i v diferenciálním tvaru. Mějme proudové vlákno průřezu ΔS v němž se vyvíjí výkon ΔP. Potom

$$\Delta P \;=\; U\;\Delta I \;=\; E\;L\;\vec{j}\cdot\Delta\vec{S} \;=\; \vec{j}\cdot\vec{E}\;\Delta V\;,$$

kde ΔV je objem vlákna.

Hustota tepelného výkonu, tj. výkon uvolňovaný v jednotce objemu vodiče je pak

$$p \;=\; \frac{dP}{dV} \;=\; \vec{j}\cdot\vec{E} \;=\; \sigma E^2 \;=\; \rho j^2\;. \tag{3.27}$$

Uvedeme nyní příklady řešení některých méně obvyklých sítí.

1. Nekonečná jednorozměná síť

Na obr. 3.12 je znázorněn nekonečný řetězec sériově a paralelně spojených odporů. Máme určit vstupní odpor mezi body A a B.

Využijeme k tomu právě vlastnost řetězce, která se zdá úlohu komplikovat, totiž jeho nekonečnou délku. Předřadíme-li bodům A, B ještě jeden článek z odporů R_1, R_2, nemůže se vstupní odpor změnit. Máme pak ekvivalentní obvod na obr. 3.13, jehož vstupní odpor snadno najdeme.

Máme

$$R_{A'B'} \;=\; R_{AB} \;=\; R_1 \;+\; \frac{R_2 R_{AB}}{R_2 + R_{AB}}\;,$$

odkud

$$R_{AB} \;=\; \frac{1}{2}\;(R_1 \;+\; \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2})\;.$$

2. Nekonečná rovinná síť

obr. 3.12

obr. 3.13

obr. 3.14

obr. 3.15

Na obr. 3.14 je znázorněna nekonečná rovinná síť tvořená pravoúhlým uspořádáním stejných odporů R. Máme určit vstupní odpor mezi dvěma sousedními uzly sítě A, B. Taková síť může modelovat některé vlastnosti sítí využívaných v počítačích nebo neuronových sítí v mozku.

Využijeme principů symetrie a superpozice. Uvažme dva stavy. Ve stavu 1 nechť proud I vtéká do bodu A a rozlévá se sítí do nekonečna. Pak z důvodu symetrie musí každou ze čtyř větví stýkajících se v bodě A protékat týž proud $I/4$. Ve stavu 2 nechť proud posbíraný v nekonečnu vytéká v bodě B. Z téhož důvodu bude větvemi stýkajícími se v bodě B protékat opět proud $I/4$. Superpozicí obou stavů zjistíme, že vtéká-li proud do bodu A a vytéká-li z bodu B, poteče odporem R mezi těmito body proud $I/2$. Zbytek sítě tedy představuje stejně velký paralelní odpor a platí $R_{AB} = R/2$.

3. <u>Prostorová síť ve tvaru krychle</u>

Uplatnění principu symetrie můžeme demonstrovat na prostorových sítích, kdy stejné odpory R jsou umístěny v hranách krychle (obr. 3.15).

Ptejme se například na odpor mezi dvěma protilehlými vrcholy jedné ze stěn krychle E, B. Proud I vtékající do bodu E se z důvodu symetrie rozdělí na dvě stejné části αI směřující k vrcholům A, F a třetí část βI směřující k vrcholu H. Ve vrcholu H se proud βI rozdělí symetricky na dva proudy γI. Stejným způsobem můžeme označit proudy stékající se do bodu B. Tak zjistíme, že hranami FG a AD žádné proudy téci nemohou. Spád napětí mezi body E a B bude jednak $2\alpha I\ R$, jednak $2(\beta+\gamma)I\ R$. Dostáváme tak soustavu tří rovnic

$$\alpha = \beta + \gamma \qquad 2\alpha + \beta = 1 \qquad \beta = 2\gamma\ ,$$

odkud

$$\alpha = \frac{3}{8}, \qquad \beta = \frac{1}{4}, \qquad \gamma = \frac{1}{8}\ .$$

Odtud zřejmě hledaný odpor $R_{EB} = 3/4\ R$.

4. <u>Kapacita a odpor soustavy elektrod</u>

Mějme dvě elektrody určitého geometrického uspořádání a prostor mezi nimi zaplněn prostředím o malé vodivosti. Tato soustava vytvoří tedy kondenzátor o určité kapacitě C a určitém svodovém odporu R.

[11] Ve starší literatuře se toto teplo měřilo v kaloriích a ve vztahu pro energii se udával číselný koeficient 0,24.

obr. 3.16 obr. 3.17

Uvažme napřed elektrody ve tvaru dvou vodivých rovinných desek plochy S ve vzdálenosti d. Protože $C = \varepsilon \frac{S}{d}$ a $R = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{S}$, dostáváme

$$R\,C \;=\; \frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

Tento vztah platí pro elektrody jakéhokoli tvaru. Předpokládejme, že náboj je rozložen na elektrodách s (proměnnou) plošnou hustotou Σ a veďme plochu S v těsné blízkosti tohoto povrchu. Potom z Ohmova a Gaussova zákona dostaneme

$$I \;=\; \frac{U}{R} \;=\; \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \;=\; \sigma \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \;=\; \sigma \int_S \frac{\Sigma}{\varepsilon}\, dS \;=\; \frac{\sigma\, Q}{\varepsilon} \;=\; \frac{\sigma}{\varepsilon} C U\,.$$

Odtud plyne opět $RC = \varepsilon/\sigma$. Známe-li tedy odpor mezi elektrodami, můžeme určit kapacitu a naopak. Všimněte si, že součin RC má rozměr času a vyjadřuje takzvanou časovou konstantu obvodu.

5. Trojúhelník a hvězda

Někdy je třeba provést takové transformace sítí, aby odpor mezi určitými body zůstal nezměněn. Typickým příkladem je přechod od uspořádání tří odporů do trojúhelníka (obr. 3.16) k uspořádání do hvězdy (obr. 3.17).

Napíšeme-li soustavu tří podmínek, aby odpory mezi body AB, AC, BC byly stejné v obou uspořádáních, dostaneme výsledek

$$R_I \;=\; \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_{II} \;=\; \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_{III} \;=\; \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}\,.$$

6. Wheatstoneův můstek

Pro přesné měření neznámých odporů se užívá různých můstkových uspořádání. Jejich přesnost je dána tím, že při vyváženém můstku přestane některou z větví protékat proud, což lze dobře indikovat. Přesná metoda měření odporu může být pak využita například k měření teploty a dalších fyzikálních veličin.

Na obr. 3.18 je znázorněn takzvaný Wheatstoneův můstek. Při řešení pomocí Kirchhoffových zákonů bychom museli sestavit rovnice pro 3 uzly a 3 smyčky a hledat proudy v 6 větvích. Nás však zajímá pouze velikost neznámého odporu R_n v situaci, kdy je můstek vyvážen, tj. jeho diagonálou R_g neprotéká proud.

Situaci lze zjednodušit, přetransformujeme-li trojúhelník ACD na hvězdu. Pak dostaneme obvod na obr. 3.19, kde

$$R_I \;=\; \frac{R_g R_2}{R_1 + R_g + R_2}\,, \qquad \ldots\,.$$

Z takto transformovaného obvodu snadno najdeme

$$R_{AB} \;=\; R_{II} \;+\; \frac{(R_{III} + R_3)(R_1 + R_n)}{R_I + R_{III} + R_3 + R_n}\,.$$

obr. 3.18

obr. 3.19

Proud v obvodu je pak

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R_{AB}}$$

Z Kirchhoffových zákonů pro smyčky ACD a CBD a uzly $A,\ B,\ C$ najdeme proud I_g v závislosti na I:

$$I_g = \frac{R_2R_3 - R_1Rn}{R_g(R_1 + R_2 + R_3 + R_n) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_n)}\ I\ .$$

Je-li můstek vyvážen, bude $I_g = 0$ a neznámý odpor určíme jako

$$R_n = \frac{R_2R_3}{R_1}\ .$$

Definujeme-li proudovou a napěťovou citlivost můstku vůči změně R_1 jako $S_i = \frac{\partial I_g}{\partial R_1}, \quad S_u = \frac{\partial U_g}{\partial R_1}$, zjistíme že obě nabývají maximální hodnoty při vyváženém můstku.

3. Základy teorie vodivosti

Měrná vodivost (konduktivita), resp. její převrácená hodnota, rezistivita, charakterizuje schopnost látky vést elektrický proud, závisí na její vnitřní struktuře a mechanismu přenosu náboje. Nelze ji tedy určit teoreticky obecně, ale vždy jen pro určitý model konkretního látkového prostředí.

Podle představ klasické fyziky můžeme vytvořit model plynu tvořeného volnými nabitými částicemi (například elektrony), které se pohybují chaoticky velkými tepelnými rychlostmi (3.1) a působením elektrického pole intenzity $\vec{E}$ získají složku uspořádané rychlosti. Uvažme například měděný vodič délky l a průřezu S, k jehož koncům je přiloženo napětí U. Z Ohmova zákona zjistíme velikost uspořádané rychlosti elektronů v tomto vodiči:

$$u = \frac{j}{ne} = \frac{I}{Sne} = \frac{U}{RSne} = \frac{U}{\rho lne}\ . \tag{3.28}$$

Dosadíme-li typické hodnoty $U = 220$ V, $l = 10$ km, koncentraci elektronů v mědi $n = 8,47.10^{28}$ m^{-3} a hodnotu rezistivity mědi $\rho = 1,7.10^{-8}$ Ω.m, vyjde nám rychlost pohybu elektronů ve vodiči $9,55.10^{-5}$ m.s^{-1}. Srovnáme-li tuto rychlost se střední tepelnou rychlostí elektronů (3.1), zjistíme, že se elektrony přemisťují ve vodiči velmi pomalu, řádově desetiny milimetru za sekundu.

Uvedeme nyní základní myšlenky tzv. *klasické teorie vodivosti*. Budeme předpokládat, že proud je zprostředkován volnými nabitými částicemi o náboji q a hmotnosti m. Má-li platit Ohmův zákon, musí být rychlost těchto částic konstantní a úměrná intenzitě pole E:

$$u = \frac{j}{nq} = \frac{\sigma}{nq}\ E\ . \tag{3.29}$$

Kdyby se však částice pohybovaly pouze pod vlivem konstantního elektrického poli, jejich rychlost by stále narůstala. Musí na ně tedy působit ještě další síla, která kompenzuje sílu elektrickou a výsledkem je pak ustálený pohyb. Tato síla je vyvolána srážkami s ionty a atomy v krystalické mřížce a jde o disipativní sílu tření, která též způsobuje přeměnu elektrické energie na energii tepelnou. Tuto disipativní sílu budeme nazývat *silou Langevinovou* $\vec{F}_L$.

Předpokládejme, že částice se mezi srážkami pohybuje pod vlivem pole rovnoměrně zrychleným pohybem, při srážce odevzdává všechnu svou kinetickou energii, ztrácí rychlost a začíná se znovu urychlovat. Vzdálenost, kterou uběhne mezi srážkami nazýváme *střední volnou dráhou* λ, dobu potřebnou k uběhnutí této dráhy *střední dobou života* τ a počet srážek za jednotku času *střední srážkovou frekvencí* ν. Je-li v střední tepelná rychlost, platí

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{\lambda}\ . \tag{3.30}$$

obr. 3.20

Modelový průběh rychlosti částice v čase je na obr. 3.20.

Vidíme, že střední uspořádaná rychlost u je rovna polovině dosahované rychlosti maximální. Podle Newtonova pohybového zákona bude tedy Langevinova síla rovna

$$\vec{F}_L \;=\; -\;\frac{m\vec{u}_{max}}{\tau} \;=\; -\;2m\nu\vec{u}\,. \tag{3.31}$$

Na druhé straně tato síla musí kompenzovat elektrickou sílu

$$\vec{F}_E \;=\; q\;\vec{E} \;=\; \frac{q^2 n}{\sigma}\vec{u}\,. \tag{3.32}$$

Odtud dostáváme výraz pro konduktivitu daného prostředí

$$\sigma \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{q^2 n}{m\nu} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{q^2 n\lambda}{mv}\,. \tag{3.33}$$

To je výsledek, který dává klasická teorie vodivosti založená na představě o srážkách nabitých částic. Pojem srážky je ovšem velmi obecný a charakter srážek může být různý. Srážky mezi nabitými a nenabitými částicemi jsou *blízké* a *binární*, tj. nejčastěji se srážejí vždy dvě částice, a to tehdy, dostanou-li se bezprostřední blízkosti. Střední volná dráha λ je přitom víceméně konstantní, pokud se částice při srážce příliš nedeformují. Naproti tomu srážky mezi nabitými částicemi navzájem (například elektrony s ionty plazmatu nebo krystalové mřížky) jsou *kolektivní* a *daleké*, tj. na částici působí současně více nabitých částic, a to již dříve, než se částice přiblíží (Rutherfordův rozptyl). V tom případě se střední volná dráha mění s teplotou úměrně T^2. Protože střední tepelná rychlost v závisí na teplotě jako $T^{1/2}$, můžeme z klasické teorie (3.33) určit závislost konduktivity na teplotě. [12] Pro srážky s neutrálními částicemi máme

$$\sigma \;\sim\; T^{-\frac{1}{2}}\,, \tag{3.34}$$

pro srážky s nabitými částicemi

$$\sigma \;\sim\; T^{\frac{3}{2}}\,. \tag{3.35}$$

Použitelnost klasické teorie závisí na tom, zda můžeme operovat s představou srážky částic a vhodně definovat střední srážkovou frekvenci. Koeficient 1/2 v (3.33) není samozřejmě přesný, pomocí kinetické teorie částic můžeme získat přesnější hodnoty, ale závislost na ostatních veličinách zůstává přitom zachována. Někdy není dost dobře možné srážky počítat a používat pojem srážkové frekvence. Je tomu tak například u plynů a elektrolytů, kdy se nabité částice prodírají mezi atomy nebo molekulami o vysoké koncentraci. [13]. Pak zavádíme nový důležitý pojem *pohyblivost* μ iontů nebo elektronů v daném prostředí. Konduktivitu pak zapisujeme pro jeden druh nabitých částic jako

$$\sigma \;=\; q\;n\;\mu\,, \tag{3.36}$$

[12] Přitom zanedbáme závislost koncentrace na teplotě.

[13] Názorně si lze představit situaci se srážkami jako běh lesem, kde můžeme počítat nárazy na stromy, prodírání v hustém prostředí jako pohyb v davu demonstrantů, kde nelze jednotlivé interakce oddělovat

takže srovnáním s (3.33) vidíme, že $\mu = q/(2m\nu) = u/E$. Pohyblivost tedy udává poměr uspořádané rychlosti nábojů k intenzitě pole a měří se v jednotkách $\mathrm{m^2.s^{-1}.V^{-1}}$, které budeme dále zjednodušeně označovat SI. Určovat pohyblivosti nabitých částic výpočtem je ovšem obtížné, proto se měří experimentálně a lze je najít v tabulkách.

Z klasické teorie dostaneme také zákon Jouleův v diferenciálním tvaru. Předávají-li nabité částice při každé srážce všechnu svou energii a je-li počet srážek za jednotku času v jednotce objemu $n\nu$, bude hustota tepelného výkonu

$$p \ \frac{mu_{max}^2}{2}\, n\nu \ = \ \sigma E^2 \ ,$$

což souhlasí s (3.27).

Můžeme též odhadnout *meze platnosti Ohmova zákona*, tj. podmínky, kdy konduktivita σ přestane být konstantní. Nastane to zřejmě tehdy, když střední volná dráha začne záviset na intenzitě pole a vztah mezi proudovou hustotou a polem přestane být lineární. Energie získaná částicí od pole na vzdálenosti rovné délce volné dráhy se přitom přiblíží střední tepelné energii. Ohmův zákon tedy platí, dokud je splněna podmínka

$$qE\lambda \ll kT \ .$$

Vezmeme-li pro kovový vodič délku volné dráhy rovnu řádově vzdálenosti mezi ionty krystalové mřížku $\lambda \approx 10^{-8}$ m, dostaneme při pokojové teplotě kritickou intenzitu pole, při níž Ohmův zákon přestává platit řádově $E_k = 2.10^6\ \mathrm{V.m^{-1}}$. S prodlužováním volné dráhy však hodnota kritického pole rychle klesá. U plynů je délka volné dráhy nepřímo úměrná koncentraci, a tedy tlaku plynu. Při tlaku 100 Pa bude volná dráha řádově 0,1 mm a kritické pole kolem 100 volt na metr, pro 1 Pa kolem 1 cm a Ohmův zákon přestane platit pro pole 1 volt na metr. U velmi zředěných plynů odpovídá pak volná dráha rozměrům nádoby. Z klasické teorie je též zřejmé, že Ohmův zákon nemůžeme použít na proudové impulsy kratší, než je střední doba mezi srážkami částic; uspořádaná rychlost se totiž nestačí ustálit.

Probereme nyní stručně vlastnosti jednotlivých látkových prostředí s hlediska jejich elektrické vodivosti. Obecně přitom platí, že představy a výsledky klasické teorie můžeme použít tehdy, není-li koncentrace nosičů náboje příliš vysoká a není-li absolutní teplota příliš nízká.

A) Plazma

Plazma je částečně nebo úplně ionizovaný plyn tvořený volnými elektrony, ionty a případně i neutrálními atomy. Pokud plazma není příliš husté (aby se uplatnily kvantové jevy) ani příliš horké (aby se uplatnily relativistické jevy), lze na ně dobře aplikovat klasickou teorii coulombovských srážek. Jsou-li atomy plazmatu Z-násobně ionizovány, platí mezi koncentrací elektronů a koncentrací iontů vztah $n_e = Zn_i$. Vodivost plazmatu je zprostředkována jak elektrony, tak ionty, přičemž hmotnost iontů je mnohem větší než hmotnost elektronů $M \gg m$. Jsou-li srážkové frekvence pro elektrony a ionty přibližně stejné, dostáváme z klasické teorie

$$\sigma \ = \ \frac{1}{2}\, e^2 n_e \left(\frac{1}{m\nu_e} \ + \ \frac{Z}{M\nu_i} \right) \approx \frac{1}{2}\, \frac{e^2 n_e}{m\nu_e} \ . \qquad (3.37)$$

Vidíme, že vodivost plazmatu je zprostředkována především pohyblivějšími elektrony a klasická teorie dává dobrý souhlas s experimentem.

Také teplotní závislost vodivosti plazmatu dobře souhlasí s klasickou teorií. Vodivost plazmatu s teplotou roste, což omezuje možnost ohřát plazma v termojaderných zařízeních ohmickým teplem na více než asi 5 milionů kelvinů.

B) Elektrolyty

Klasická teorie vodivosti byla vytvořena začátkem našeho století právě k vysvětlení vodivosti elektrolytů. Elektrolyty představují vodní roztoky látek, jejichž molekuly se zde disociují na kladné (anionty) a záporné (kationty) ionty. Tyto ionty mohou ovšem též zpětně rekombinovat na neutrální molekuly, takže vzniká dynamická disociační rovnováha a ustaluje se určitá iontová koncentrace. Protéká-li elektrolytem proud, tj. jsou-li ionty z roztoku odváděny, tato rovnováha se neustále obnovuje.

obr. 3.21

Podle klasické teorie je vodivost elektrolytu dána vztahem

$$\sigma \;=\; q_+ n_+ \mu_+ \;+\; q_- n_- \mu_- \; . \tag{3.38}$$

Pohyblivost iontů ve vodě najdeme v tabulkách (například pro Na^+ je $\mu = 4,5.10^{-8}$ SI, pro Cl^- je $\mu = 6,8.10^{-8}$ SI), a je tedy třeba znát koncentraci iontů. Poměr disociovaných molekul k celkovému počtu molekul rozpuštěné látky nazýváme *stupněm disociace* α a určujeme jej právě na základě měřené vodivosti elektrolytu.

Tato vodivost silně závisí na koncentraci rozpuštěné látky c. Je-li koncentrace roztoku nízká, bude vodivost malá, neboť je k dispozici málo iontů. Je-li naopak koncentrace příliš vysoká, bude vodivost rovněž malá, neboť stupeň disociace klesne a rovněž pohyblivost iontů se sníží. Tuto závislost ukazuje obr. 3.21.

V rovnovážném stavu se vyrovnává přírůstek iontů disociací (úměrný počtu nedisociovaných molekul $k_1(1-\alpha)c$) a úbytek rekombinací (úměrný součinu počtu kladných a záporných iontů $k_2\alpha^2c^2$). Odtud dostáváme takzvanou *disociační konstantu*

$$K \;=\; c\,\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\;,$$

která vyjadřuje podíl pravděpodobnosti disociace a rekombinace v daném roztoku.

Je-li n_0 koncentrace molekul rozpuštěné látky a α stupeň disociace, bude příspěvek jednoho druhu iontů nesoucích náboj Ze k vodivosti

$$\sigma \;=\; Z\;e\;\alpha\;n_0\;\mu. \tag{3.39}$$

Známe-li koncentraci roztoku a změříme-li vodivost, můžeme odtud určit stupeň disociace a disociační konstantu.

Při měření však obvykle postupujeme tak, že zavádíme tzv. *molární vodivost* (ekvivalentovou vodivost) Λ vztahem

$$\Lambda \;=\; \frac{\sigma}{\eta},$$

kde η je molární koncentrace, tj. počet molů rozpuštěné látky v jednotce objemu s uvážením valence iontů:

$$\eta \;=\; \frac{Z\;n_0}{N_A}\;, \tag{3.40}$$

kde N_A je Avogadrova konstanta. Úpravou (3.39) dostaneme

$$\sigma \;=\; \alpha\;\mu\;N_A\;e\,\frac{Z\;n_0}{N_A}\;=\;\alpha\;\mu\;F\;\eta\;, \tag{3.41}$$

kde $F = N_A e$ je Faradayův náboj.

Molární vodivost je tedy rovna $\Lambda = \alpha\mu F$. Extrapolujeme-li ji do oblasti velmi malých koncentrací, kdy můžeme očekávat úplnou disociaci ($\alpha = 1$), dostáváme tzv. *molární vodivost při nekonečném zředění* $\Lambda_\infty = \mu F$. Stupeň disociace tedy zjistíme experimentálně jako podíl

$$\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty} \tag{3.42}$$

(*Arrheniův vztah*) a disociační konstantu jako

$$K = c\,\frac{\Lambda^2}{\Lambda_\infty(\Lambda_\infty - \Lambda)} \tag{3.43}$$

(*Ostwaldův zřeďovací zákon*).

Uvedená teorie disociace elektrolytů náleží S. Arrheniovi (1887) a platí dobře pro slabé elektrolyty o nepříliš velké vodivosti. U silných elektrolytů je třeba vzít v úvahu i vzájemnou interakci mezi ionty (P. Debye, E. Hückel).

Připomeneme ještě známé dva *Faradayovy zákony elektrolýzy.* Projde-li elektrolytem náboj Q přenesený například N ionty o hmotnosti m_i, molární hmotnosti M_i a náboji Ze, potom *hmotnost přenesené látky M je úměrné prošlému náboji* (1. zákon):

$$M = m_i\,N = \frac{M_i}{N_A}\,\frac{Q}{Ze} = A\,Q. \tag{3.44}$$

Konstanta úměrnosti $A = M_i/(ZF)$ se nazývá *elektrochemický ekvivalent* a udává se v kilogramech na coulomb. Jeho význam je patrný z 2. zákona: *Projde-li dvěma roztoky různých elektrolytů týž náboj Q, bude poměr hmotností vyloučených látek roven poměru jejich chemických ekvivalentů.* Plyne odtud, že k vyloučení jednoho molu chemických ekvivalentů libovolné látky (tj. jednoho molu jednovalentních iontů se $Z = 0$) je zapotřebí právě Faradayova náboje.

Jako příklad stanovíme konduktivitu čisté destilované vody. Předpokládejme zjednodušeně, že ji zprostředkuj kationty vodíku H^+ a anionty hydroxylu OH^-, jejichž pohyblivosti ve vodě při pokojové teplotě jsou $\mu_+ = 3,2.10^{-7}$ SI, $\mu_- = 1,8.10^{-7}$ SI. Tyto ionty jsou v čisté vodě stále přítomny, a to v rovnovážné molární koncentraci $N_{mi} = 10^{-4}$ mol.m^{-3} (10^{-7}mol.l^{-1}). Stanovíme nejdříve stupeň disociace. Protože 1 mol představuje 18 g vody, je v jednom kubickém metru $10^6/18 = 5,5.10^4$ mol nedisociovaných molekul. Stupeň disociace je tedy nepatrný, $\alpha = 1,8.10^{-9}$. Dosadíme-li do výrazu pro vodivost elektrolytů (3.38) koncentraci iontů $n_i = N_{mi}.N_A = 6,02.10^{19}$, dostaneme $\sigma = 4,8.10^{-6}$ $(\Omega.\mathrm{m})^{-1}$.

Vodivost vody se ovšem drasticky zvýší, rozpustíme-li v ní nepatrné množství soli. Roztok chloridu sodného v koncentraci pouhé desetitisíciny procenta (1 gram v kubickém metru vody) dá koncentraci iontů 10^{22} m^{-3} a vodivost $1,8.10^{-4}$ $(\Omega.\mathrm{m})^{-1}$, tedy o dva řády vyšší než u čisté vody. Při tak malé koncentraci jsme předpokládali stupeň disociace rovný jedné. Můžete nyní sami odhadnout vodivost mořské vody a uvědomit si, že Země je na svém povrchu velmi dobře vodivá koule.

C) Plyny

K tomu, aby čistý plyn mohl vést elektrický proud je zapotřebí přítomnosti alespoň malé koncentrace iontů. [14] Tyto ionty vznikají buď uměle působením různých ionizačních činitel (uf, rtg, gamma záření) nebo přirozeně vlivem všudypřítomného záření kosmického a záření radioaktivních nuklidů obsažených v zemské kůře. Tak se ve vzduchu v 1 kubickém metru každou sekundu stále tvoří v průměru $\Delta n = 5.10^6$ iontů; nad mořskou hladinou o něco méně, nad souší o něco více. Tyto ionty opět zanikají rekombinací a setkáváme se opět s rovnovážným stavem mezi ionizací a rekombinací jako v případě elektrolytů. Je-li koncentrace molekul neionizovaného plynu n a α stupeň ionizace, dostáváme rovnici ionizační rovnováhy

$$\Delta n = k_1\,(1-\alpha)\,n = k_2(\alpha n)^2, \qquad K = n\,\frac{\alpha_2}{1-\alpha)}\,.$$

[14] Pokud ionty ve velmi malém objemu nejsou přítomny vůbec, je podle kvantové fyziky možná ionizace v extrémně silném elektrickém poli, vytvářeném například laserovým paprskem. Pak dochází k jiskrovému výboji.

obr. 3.22

Při malých napětích tak bude ve vzduchu protékat elektrický proud podle Ohmova zákona - mluvíme o *nesamostatné vodivosti plynů*. S rostoucím napětím se ovšem dostaví jev saturace. Až všechny vznikající náboje začnou putovat k elektrodám, nemůže se již proud dále zvětšovat. Mezi hodnotou nasyceného proudu a tvorbou iontů existuje jednoduchý vztah. Je-li l vzdálenost elektrod a S jejich plocha, platí

$$\Delta n \;=\; \frac{j_s}{ql} \;=\; \frac{I_s}{qlS} \;=\; \frac{I_s}{qV}\;.$$

Rychlost tvorby iontů můžeme tedy určit ze změřeného nasyceného proudu. Rovnovážná iontová koncentrace pak souvisí s Δn vztahem

$$n_i \;=\; \alpha n \;=\; \sqrt{\frac{\Delta n}{k_2}}\;,$$

kde k_2 je koeficient rekombinace, který můžeme pro čistý vzduch odhadnout na $k_2 = 1,67.10^{-12}$ m^{3}s^{-1}. [15] Pak již můžeme určit vodivost plynu podle (3.38).

Jako příklad odhadneme konduktivitu čistého vzduchu. Jestliže ji zprostředkují kladné a záporné ionty dusíku, najdeme v tabulkách jejich pohyblivosti ve vzduchu za normálních podmínek: $\mu_+ = 1,2.10^{-4}$ SI, $\mu_- = 1,8.10^{-4}$ SI. Potom máme

$$\sigma \;=\; e\, n_i(\mu_+ + \mu_-) \;=\; 3,7.10^{-17}\sqrt{\Delta n} \;=\; 8,3.10^{-14}\ (\Omega.\mathrm{m})^{-1}\;.$$

Tento výsledek je ovšem pouze orientační a závisí na mnoha faktorech. Nicméně je skutečností, že zemská atmosféra je vodivá, tato vodivost se mění s výškou a atmosférou neustále protékají proudy mezi dvěma obrovskými kulovými elektrodami - ionosférou a zemským povrchem.

Voltampérová charakteristika elektrického výboje v plynu je na obr. 3.22. Pro malá napětí platí Ohmův zákon, pak nastupuje oblast nasyceného proudu. Při dalším růstu napětí sice proud neroste, ale nabité částice (ionty, elektrony) zvětšují svou energii. Dosáhnou-li energie potřebné k ionizaci neutrálních atomů, začne se počet nosičů lavinovitě rozrůstat a výboj přejde do oblasti samostatného výboje (prudký vzrůst proudu na obr. 3.22).

Samostatné stacionární výboje v plynech mohou mít různý charakter. Při sníženém tlaku plynu $(1 - 10^3)$ Pa vzniká po dosažení zápalného napětí takzvaný *doutnavý výboj* doprovázený světelným zářením charakteristického zbarvení a spektra. Typické proudy u doutnavého výboje jsou $(10^{-1} \;-\; 10)$ A.m^{-2}. Rozložení napětí podél výbojové dráhy je velmi nerovnoměrné, největší spád je soustředěn v blízkosti katody.

Jiným typem samostatného výboje je *obloukový výboj*, který vzniká při atmosférickém tlaku mezi dvojicí uhlíkových elektrod. Elektrody se musí nejdříve dotknout a zahřát se Jouleovým teplem. Po oddálení pak

[15] Jsou-li ve vzduchu částice prachu, mohou ionty zanikat na nich, a to podstatně rychleji. Potom $\Delta n = kn_i, \quad k \sim 10^{-2}$ s^{-1}.

již výboj hoří samostatně při relativně malých napětích (20 - 50 V) a velkých proudech (10^5 A.m^{-2} a více). Elektrody se přitom silně zahřívají a poskytují výkonný světelný zdroj.

Při vysokém napětí může existovat celá řada samostatných nestacionárních výbojů (*jiskrový výboj*), jejichž studium má velký praktický význam.

D) Vakuum

Mějme dvě rovinné deskové elektrody ve vzdálenosti l, v prostoru mezi nimi vakuum a na nich přiloženo napětí U. S takovou situací se setkáváme v elektronkách. Aby mezi elektrodami mohl protékat proud, musí se jedna z nich, katoda, stát zdrojem elektronů. Elektrony se obecně mohou uvolňovat z povrchu pevných látek v procesu, který nazýváme *emisí*. K výstupu elektronu z kovu či polovodiče je třeba mu dodat energii odpovídající takzvané *výstupní práci*. Podle charakteru této energie mluvíme o *termoemisi, fotoemisi, autoemisi* v silném elektrickém poli, *sekundární emisi* vyvolané dopadem rychlých částic atd.

Emituje-li katoda elektrony, můžeme zřejmě opět rozlišovat oblast nenasyceného proudu při nízkých napětích a nasyceného proudu při vyšších napětích. Hodnota nasyceného proudu bude záviset na materiálu katody a její teplotě. [16]

V oblasti nenasyceného proudu nebude proud dán vlastnostmi katody a také se nebude řídit Ohmovým zákonem, protože zde neexistují srážky s částicemi prostředí. Je proto nanejvýš zajímavé zjistit, jak bude proud mezi elektrodami v tomto případě záviset na napětí. Požadujeme, aby se mezi elektrodami ustavil stacionární proud a všechny veličiny byly pouze funkcí vzdálenosti od katody x. Předpokládáme přitom, že elektrony vyletují z katody nulovou rychlostí a dále že potenciál a intenzita pole u katody jsou nulové:

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = E(0) = 0 .$$

Funkce φ představuje potenciál stacionárního elektrického pole a musí proto vyhovovat Laplaceově-Poissonově rovnici:

$$\frac{d^2 \varphi}{d x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} . \tag{3.45}$$

Dále musí platit rovnice kontinuity pro stacionární proud a zákon zachování energie:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{d j}{d x} = 0, \qquad j = -\rho v = \text{konst}, \qquad \frac{m v^2}{2} = e \varphi .$$

(Vzali jsme v úvahu, že záporný elektronový náboj se pohybuje v kladném směru osy x.) Dosadíme-li do (3.45) za ρ pomocí j a φ, dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{d^2 \varphi}{d x^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}\, j \frac{1}{\sqrt{\varphi}} = C \frac{1}{\sqrt{\varphi}} .$$

Vynásobením této rovnice $d\varphi/dx$ a zintegrováním dostaneme

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d \varphi}{d x} \right)^2 = 2C \sqrt{\varphi} .$$

Odtud vypočítáme $d\varphi/dx$ a ještě jednou zintegrujeme. Dostaneme

$$\varphi = \left(\frac{9}{4} \frac{1}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}\, j \right)^{2/3} x^{4/3} .$$

Vidíme, že v prostoru mezi elektrodami je proudová hustota j všude konstantní, potenciál se mění podle zákona $\sim x^{4/3}$, rychlost jako $\sim x^{2/3}$ a hustota náboje jako $\sim x^{-2/3}$.

---

[16] Z kvantové fyziky vyplývá pro hodnotu nasyceného proudu *vztah Richardsonův-Dushmanův*:

$$j_s = A\, T^2 \exp\left(-\frac{e \varphi}{k\, T} \right) ,$$

kde $e\varphi$ je výstupní práce, k Boltzmannova konstanta a A konstanta téměř stejná pro všechny látky a rovná přibližně $A = 1,2.10^6$ A.m^{-2}.K^{-2}.

Dosadíme-li za $x = l$ a vynásobíme proudovou hustotu plochou elektrod, dostaneme takzvaný *Langmuirův třípolovinový zákon*:

$$I = K\,U^{\frac{3}{2}}, \qquad K = \frac{4\varepsilon_0 S}{9l^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}\,, \tag{3.46}$$

který zde nahrazuje zákon Ohmův.

E) Pevné látky

Pokusme se aplikovat klasickou teorii vodivosti na typický kovový, například stříbrný vodič. Předně musíme vědět, které nabité částice jsou zde nositelem proudu. Experimentálně to lze ověřit vtipnou metodou, kterou použili *R.G.Tolman a T.D.Stewart* v roce 1917. Vyšli z předpokladu, že jsou-li ve vodiči volně pohyblivé částice, musí se podřizovat zákonu setrvačnosti a uvedeme-li vodič do pohybu a prudce zbrzdíme, musí být vrženy ve směru pohybu vodiče stejně jako pasažéři v dopravním prostředku. Tuto metodu používáme, když třepeme krabičkou zápalek, abychom zjistili, zda je plná.

Pohybuje-li se vodič délky l rychlostí v a je-li zbrzděn za dobu Δt, působí na volné nabité částice setrvačná síla, která je ekvivalentní síle elektrického pole E:

$$m\,a = m\,\frac{v}{\Delta t} = q\,E\,.$$

Napětí $U = El$ vyvolá proudový impuls $I = U/R$ a na koncích bude možno balistickým galvanometrem změřit objevivší se náboj

$$Q = I\,\Delta t = \frac{m\,v\,l}{q\,R}\,.$$

V tomto vztahu známe všechny veličiny kromě měrného náboje částic q/m, který můžeme právě tímto pokusem určit. Přesnost měření bude zřejmě tím větší, čím bude vodič delší, čím rychleji se bude pohybovat a čím prudčeji jej zbrzdíme. Tolman a Stewart použili zařízení na obr. 3.23.

Cívku s navinutým dlouhým drátem uvedli do rychlé rotace, pak ji prudce zbrzdili a změřili náboj na koncích drátu. Délka drátu byla asi 500 m, obvodová rychlost 300 ms^{-1} a doba brzdění 0,1 s. Pro měď, stříbro a hliník tato měření potvrdila, že elektrický proud je přenášen volnými elektrony. U všech kovů tomu tak ale není, může se uplatnit například i děrová vodivost nebo dokonce i iontová (pevné elektrolyty). S Tolmanovým - Stewartovým jevem se setkáváme i jindy. Například u dělostřeleckého granátu, který je náhle zastaven v pancíři, se na předním konci objeví záporný náboj.

obr. 3.23

Použijeme nyní výraz pro vodivost (3.33). Vezmeme-li experimentální hodnotu konduktivity stříbra $\sigma = 6,2.10^7$ S.m^{-1}, elektronovou koncentraci $5,8.10^{28}$ m^{-3}, střední tepelnou rychlost $1,1.10^5$m.s^{-1}, dostaneme střední délku volné dráhy $\lambda = 8,3.10^{-9} \approx 10^{-8}$m. Snadno však zjistíme, že vzdálenost mezi ionty krystalové mřížky (mřížková konstanta) je o dva řády menší, $\sim 10^{-10}$ m! To by znamenalo, že elektron mine při pohybu krystalem stříbra stovky iontů, aniž by došlo k jediné srážce. Také teplotní závislost konduktivity nesouhlasí s klasickou teorií. Při srážkách s ionty by měla elektrická vodivost s rostoucí teplotou růst, zatímco u kovů klesá.

Takový nesouhlas nasvědčuje tomu, že vodivost kovů nemůžeme popsat pomocí zákonů klasické fyziky. Souvisí to s vysokou hustotou částic, řádově 10^{28} m^{-3} a více, kdy se již uplatní kvantové jevy. Elektrony přitom projevují vlnové vlastnosti, místo srážek v klasickém smyslu probíhá rozptyl vln a také ionty

obr. 3.24

krystalové mřížky jsou v oscilačním pohybu. Podle zákonů kvantové fyziky energie těchto vln a kmitů je kvantována, tj. může nabývat jen určitých dovolených hodnot. Je známo, že v atomech a molekulách exstuje vždy celá soustava dovolených kvantových hladin. Řešíme-li úlohu o pohybu elektronu v periodické struktuře krystalu, dostali bychom v modelu nekonečně rozlehlého krystalu dovolené a zakázané energetické *pásy* (zóny). Prostože krystal má konečné rozměry, jsou dovolené pásy tvořeny velkým množstvím těsně přiléhajících energetických hladin. Obsazování těchto hladin se děje v souladu s Pauliho principem, takže v každém pásu může být jen určitý konečný počet elektronů. Pás s nižší energií, kde jsou elektrony pevněji vázány, nazýváme valenčním, periferní pás s vyšší energií vodivostním. Oba pásy jsou odděleny zakázaným pásem, který elektrony nemohou překonat, pokud jim není dodána energie odpovídající šířce tohoto pásu.

U kovů je valenční pás zcela zaplněn a ve vodivostním pásu je určitý počet elektronů až po tzv. Fermiho hladinu, která je u různých kovů různá. Elektrony ve vodivostním pásu mohou získávat dodatečnou kinetickou energii, přecházet na vyšší hladiny a vést tak proud. Naproti tomu u polovodičů a dielektrik nejsou ve vodivostním pásu k dispozici volné elektrony a mohou se sem dostat jen z valenčního pásu po získání potřebné energie. Tak u polovodičů je možno vyvolat vodivost osvětlením, zahřátím, elektrickým polem apod. Vodivost polovodičů závisí také silně na jejich čistotě. Právě dodáním příměsí (donorů nebo akceptorů elektronů) vytváříme dodatečné úzké příměsové pásy uvnitř zakázaného pásu, které usnadňují vznik vodivosti. Vodivost polovodičů může přitom být jednak elektronová (typu n), jednak děrová (typu p), kdy se přemisťují díry po chybějících elektronech. Situace je zjednodušeně znázorněna na obr. 3.24.

Důležité je též zkoumat, jak závisí konduktivita pevných látek na teplotě. Je zajímavé, že zatímco teplotní závislost konduktivity není v souhlase s klasickou teorií, je při vyšších teplotách dobře splněn *Wiedemannův - Franzův zákon*, nazývaný též *zákon Lorentzův - Lorenzův*. Ten udává poměr mezi tepelnou a elektrickou vodivostí kovů jako úměrný absolutní teplotě a lze jej odvodit z klasických představ:

$$\frac{\Lambda}{\sigma} = \frac{\pi^2 k^2}{3e^2}\, T = L\, T. \tag{3.47}$$

Zde Λ je součinitel tepelné vodivosti, k Boltzmannova konstanta a tzv. Lorenzův součinitel L je stejný pro všechny kovy a roven $L = (2,3\ -2,5).10^{-8}\ \mathrm{V^2.K^{-2}}$. Wiedemannův - Franzův zákon ukazuje, že elektricky dobře vodivé kovy jsou také dobrými vodiči tepla.

Pro teploty vyšší než tzv. Debyeova teplota [17] roste měrný odpor kovů lineárně s Celsiovou teplotou podle známého zákona [18]

$$\rho = \rho_0\,(1+\alpha t) = \rho_0(1-273,15\alpha+\alpha T) \approx \alpha\,\rho_0\,T\,. \tag{3.48}$$

Teplotní součinitel odporu α má hodnotu $\alpha \approx 0,004 \simeq 1/273,15\mathrm{K}^{-1}$, takže dostáváme téměř přímou úměrnost v absolutní teplotě (obr. 3.25).

[17] Debyeova teplota souvisí se spektrem kmitů krystalové mřížky a odpovídá pro měď asi 330 K.
[18] Přesněji se uvažuje ještě kvadratický člen βt^2

Při teplotách podstatně nižších než Debyeova lze teplotní závislost měrného odporu aproximovat závislostí $\sim\ T^5$; obecně dává kvantová fyzika poměrně komplikovanou závislost vyjádřenou tzv. *Grüneisenovou funkcí.* Při dosažení tzv.*kritické teploty* T_c dochází u mnoha látek k náhlému poklesu odporu a projevuje se jev supravodivosti, o němž pojednáme dále.

obr. 3.25

Na rozdíl od kovů měrný odpor polovodičů s rostoucí teplotou klesá, a to podle funkce

$$\rho\ =\ \rho_0 \exp\left(\frac{E_g}{2kT}\right)\ , \tag{3.49}$$

kde E_g je šířka zakázaného pásu. V praxi se ovšem využívá příměsové vodivosti polovodičů. Zvláštní význam pak mají přechody mezi polovodiči o různém typu vodivosti (n, p), které umožňují vytvářet polovodičové diody, triody, tranzistory a další prvky, jimiž se zabývá elektronika.

Uvedeme některé orientační hodnoty rezistivity ρ při pokojové teplotě a teplotního koeficientu odporu α různých pevných látek:

látka	$\rho[\Omega.\text{m}]$	$10^3\ \alpha[\text{K}^{-1}]$
stříbro	$1,6.10^{-8}$	$3,8$
měď	$1,7.10^{-8}$	$3,9$
hliník	$2,8.10^{-8}$	$4,9$
wolfram	$5,5.10^{-8}$	$4,5$
železo	$9,8.10^{-8}$	$5,0$
platina	$1,1.10^{-7}$	$3,9$
olovo	$2,1.10^{-7}$	$4,2$
rtuť	$9,6.10^{-7}$	$1,0$
bismut	$1,2.10^{-6}$	$4,5$
manganin	$4,2.10^{-7}$	$0,02$
konstantan	$5,0.10^{-7}$	$0,05$
uhlík	$5,0.10^{-5}$	$-\ 0,8$
sklo	$10^9\ -\ 10^{12}$	$-$
polystyrol	$10^{10}\ -\ 10^{15}$	$-$

F) Supravodiče

Při poklesu teploty k absolutní nule dochází u mnoha látek k náhlému vymizení elektrického odporu. Tento jev se nazývá *supravodivostí* a byl poprvé pozorován v roce 1911 H. Kammerlinghem Onnesem v holandském Leidenu. Zkapalněním helia se podařilo dosáhnout teploty 4,12 K, při níž odpor rtuti klesl na nulovou hodnotu (řádově 10^{-25} Ω.m). Není třeba zdůrazňovat, že jev supravodivosti, kdyby se jej podařilo technicky běžně zvládnout, by znamenal revoluci v elektrotechnice, umožnil by odstranit ztráty energie Jouleovým teplem, usnadnil by přenos elektrické energie na velké vzdálenosti, vytváření silných magnetických polí, zvýšení jakosti rezonančních obvodů atd.

Od chvíle objevu byl jev intenzivně studován, teoreticky i experimentálně. Vedle rtuti byla pozorována supravodivost u řady dalších prvků, slitin a sloučenin. Úsilí se soustředilo především na zvýšení kritické teploty, při níž supravodivost nastává, aby nebylo nutné provádět náročné chlazení vodičů kapalným heliem. Byla též zjištěna důležitá závislost supravodivých vlastností na vnějším magnetickém poli, které může za určitých podmínek supravodivost zrušit. U tzv. supravodičů prvního typu se kritické teploty pohybují pod 10 K (Al 1,17 K, Sn 3,70 K, Pb 7,20 K, Nb 9,25 K) a kritické magnetické pole je řádově

$10^{-1} - 10^{-2}$ T. Uplatňuje se zde též *Meissnerův - Ochsenfeldův jev*, podle něhož je uvnitř supravodiče magnetické pole vždy nulové. Takový supravodič tedy vytěsňuje magnetické pole ze svého objemu a chová se vůči magnetickému poli podobně jako vodič vůči poli elektrostatickému.

U supravodičů druhého typu může supravodivost trvat i při vyšších magnetických polích (několik desítek tesla), přičemž v supravodivém stavu je jen část průřezu supravodiče. Proudová hustota zde může dosahovat obrovských hodnot až 10^9 A.m^{-2}, což má nesmírný technický význam. K takovým supravodičům patří řada speciálních slitin (Nb-Zr, Nb-Ti, Nb_3Sn) a další. Rekordně vysoké kritické teploty se podařilo dosáhnout u Nb_3Ge, a to 23,2 K. Tato teplota již přesahuje bod varu vodíku (20,4 K).

Velké překvapení vyvolal objev tzv. "vysokoteplotní supravodivosti" některých keramik (jinak typických izolantů), chemického složení BaLaCuO, BaYCuO, připravených poměrně nenáročným technologickým postupem J.G.Bednorzem a K.A.Müllerem v Zürichu v roce 1986. Kritické teploty těchto materiálů přesahují bod varu dusíku (77,3K) a probíhá intenzivní úsilí připravit z nich technicky využitelné materiály, případně udržet jejich supravodivé vlastnosti při pokojových teplotách.

Pokusy o teoretické vysvětlení supravodivosti probíhají již několik desetiletí. Jejich úspěšným vyvrcholením byla kvantová mikroskopická teorie BCS (J.Bardeen, L.N.Cooper, J.R.Schriffer) z roku 1957. Je založena na představě o vzájemném působení elektronů s kmity krystalické mřížky při nízkých teplotách, která vede k vytváření elektronových *Cooperových párů*. Tyto elektronové páry s vykompenzovanými spiny se chovají jeko bosony, nepodřizují se Pauliho principu a jejich vzájemná korelace zůstává zachována na značné vzdálenosti.[19]

Supravodivost úzce souvisí s tzv. *Josephsonovými jevy*, které jsou založeny na korelaci elektronů ve dvou částech supravodiče oddělených tenkou vrstvou nevodiče. Na základě těchto jevů se podařilo sestrojit zařízení umožňující měřit nepatrná napětí a magnetická pole.

4. Zdroje elektromotorického napětí

Uvedli jsme, že stacionární proud může protékat obvodem jen působí-li zde zdroj elektromotorického napětí, existují-li zde potenciálové skoky a je-li nábojům dodávána energie. Taková situace vzniká v nehomogenních obvodech, kde se stýkají vodiče různých druhů nebo vystavené různým podmínkám. Obvykle přitom rozlišujeme *vodiče prvního druhu*, které se při průchodu proudu chemicky nemění a *vodiče druhého druhu*, jako například elektrolyty, v nichž při průchodu proudu dochází k chemickým reakcím. Všimneme si krátce jen dvou typů zdrojů emn, a to *článků galvanických* a *termočlánků.*

Články galvanické

Historicky prvním zdrojem elektromotorického napětí byl Voltův galvanický článek, k němuž byl Volta inspirován Galvaniho pokusy s živočišnou elektřinou. Voltův článek pochází z roku 1800 a představoval soustavu tvořenou měděnou a olověnou elektrodou oddělených kartonem nasyceným slanou vodou. Baterie takových článků spojených v sérii (Voltův sloup) dávaly napětí stovek a tisíců voltů a umožňovaly demonstrovat efektní experimenty. Vedle toho bylo s jejich pomocí provádět elektrolýzu, což mělo velký význam pro elektrochemii a umožnilo objev několika nových prvků. Volta sám nedovedl objasnit, kde se bere energie k udržování stacionárního proudu; dnes víme, že jde o energii chemických reakcí probíhajících na elektrodách.

Ponoříme-li do elektrolytu dvě elektrody z různých kovů, vzniknou na nich potenciálové skoky nazývané *elektrodovými potenciály.* Kov má tendenci se rozpouštet, jeho kladné ionty přecházejí do roztoku a elektroda (katoda) se nabíjí záporně. Na druhé elektrodě (anodě) se kladné ionty opět zabudovávají do krystalické mřížky elektrody a vzniká zde nedostatek elektronů. Postupně se vytvoří stacionární stav a proud se uzavírá elektrony v kovu a ionty v elektrolytu.

[19] K bosonům patří například fotony, které vytvářejí elektromagnetickou vlnu a pohybují se zde bez vzájemného "tření". Podobně i pohyb částic vytvářejících atomové jádro odpovídá supravodivému stavu.

obr. 3.26 obr. 3.27

Elektrodové potenciály se obvykle udávají jako tzv. *standartní* nebo *normální* potenciály vztažené k vodíkové elektrodě. Vodíková elektroda je platinová elektroda nasycená vodíkem a ponořená do roztoku s normální koncentrací vodíkových iontů. Uvedeme normální potenciály pro některé elektrody (ve voltech):

Zn +0,76 Fe +0,43 Cd 0,40 Ni +0,22 Pb +0,12 Cu -0,34 Ag -0,80 Hg -0,86.

Odtud snadno určíme, že například článek s jednou zinkovou a jednou měděnou elektrodou bude dávat napětí 1,1 V.

Důležitým jevem, který se uplatňuje u galvanických článků je tzv. *polarizace elektrod.* V důsledku chemických procesů se mění povrch elektrod, ty se pokrývají povlakem kovu, probíhají chemické změny v elektrolytu poblíž elektrod. Tím se mění elektrodové potenciály a obecně dochází k poklesu napětí článku. Výsledek se jeví tak, jako by v obvodu působilo dodatečné tzv. *polarizační napětí* $\mathcal{E}_p$ a voltampérová charakteristika je znázorněna na obr. 3.26. Ohmův a Jouleův zákon můžeme psát ve tvaru

$$I = \frac{U - \mathcal{E}_p}{R}, \qquad A = (R\, I^2 + \mathcal{E}_p\, I)\, \Delta t. \tag{3.50}$$

Rozlišujeme dva typy galvanických článků - *primární, nevratné* a *sekundární, vratné*, nazývané též *akumulátory.* U primárních článků je polarizace elektrod nežádoucí, neboť vede k poměrně rychlému poklesu emn. Snažíme se proto různým způsobem této polarizaci bránit. Tak u *Daniellova článku* (obr. 3.27) je zinková elektroda ponořena do roztoku síranu zinečnatého, měděná elektroda do roztoku síranu měďnatého a oba roztoky jsou odděleny pórovitou membránou. Důmyslná konstrukce *Westonova článku*, kde katodu představuje amalgam kadmia, anoda je rtuťová a elektrolytem je roztok síranu kademnatého, téměř vylučuje změny na elektrodách a slouží dokonce jako etalon emn (1,01865 V při 20 stupních C). *Grenetův článek* má zinkovou a uhlíkovou elektrodu a za elektrolyt roztok dvojchromanu draselného s kyselinou sírovou (emn 2,0 V). V praxi se nejčastěji používá *Leclanchéův suchý článek.* Je tvořen zinkovou nádobkou, která obsahuje vodný roztok pastovité konzistence salmiaku a chloridu zinečnatého; jako anoda slouží uhlíková tyčinka obklopená vrstvou burelu. Při odběru proudu se zinková elektroda rozpouští. V okolí uhlíkové elektrody se burel redukuje vyloučeným vodíkem na Mn_2O_3 a vzniklý amoniak spolu s ionty zinku vytváří komplexní kationty $[Zn(NH_3)_3]^{2+}$. Elektromotorické napětí je 1,5 V.

Ze sekundárních článků je nejčastěji používán *olověný akumulátor.* Obě elektrody jsou olověné, elektrolytem je 25 - 30 % kyselina sírová, která vytvoří na elektrodách vrstvu síranu olovnatého. Při nabíjení se na katodě síran olovnatý redukuje na olovo a na anodě se oxiduje na oxid olovičitý. Při odběru proudu se opět vytváří síran olovnatý. Emn je asi 2,1 V a s vybíjením postupně klesá. Užívá se též akumulátorů Ni - Fe a Ni - Cd, které jsou trvanlivější, jsou však dražší a mají větší vnitřní odpor.

Vedle galvanických článků s elektrolytem se od 60. let úspěšně využívá takzvaných *palivových článků*, které pracují vlastně na principu opačném k elektrolýze. V nich probíhají bouřlivé chemické reakce v plynném prostředí (například mezi kyslíkem a vodíkem), a to ve dvou prostorově oddělených oblastech při

obr. 3.28

elektrodách. Palivové články se uplatňují v pohonu ponorek, kosmických aparatur apod. Vyřešení úkolu konstrukce vhodných chemických zdrojů k elektrickému pohonu dopravních prostředků by mělo obrovský ekonomický a ekologický význam.

Termočlánky

V roce 1821 pozoroval T.J.Seebeck poprvé takzvaný *termoelektrický jev*. Mějme v nehomogenním obvodu dva různé vodiče prvního druhu. Na jejich styku vzniká tzv. *kontaktní napětí*. Zjistil to už Volta a sestavil řadu kovů, z nichž každý se při dotyku s libovolným následujícím nabíjí kladně (v závorce uvedena orientační hodnota výstupní práce elektronů v elektronvoltech; elektrony snáze přecházejí z kovu o nižší výstupní práce do kovu o vyšší výstupní práci):

Al(4,2), Zn(4,3), Sn(4,4), Pb(4,4), Hg(4,5), Fe(4,7), Cu(4,8), Ag(4,8), Au(4,9), Pt(5,3).

Vidíme, že velikosti kontaktního napětí dané rozdílem výstupních prací dosahují desetin voltu až voltů. Je-li přitom spojeno více různých kovů v sérii, záleží podle *Voltova zákona* jen na prvním a posledním kovu v řadě. Vznik kontaktního napětí je možno přičíst jednak rozdílné výstupní práci elektronů z různých kovů, jednak různé elektronové koncentraci. Představme si situaci na přechodu mezi kovovými vodiči 1 a 2 průřezu ΔS, kdy elektronové koncentrace v těchto kovech jsou n_1, n_2 (obr. 3.28).

Použijme klasickou představu o elektronovém plynu a vyjádřeme jeho tlak pomocí stavové rovnice pro ideální plyn jako

$$p = k\,n\,T\,,$$

kde k je Boltzmannova konstanta. Na přechodu mezi oběma kovy, kde se elektronové koncentrace vyrovnávají, zvolme tenkou vrstvu tloušťky dx a vyjádřeme rozdíl tlakových sil, které na tuto vrstvu působí:

$$dF = \Delta S\,dp = k\,T\,\Delta S\,dn\,.$$

V rovnováze musí být tato síla kompenzována silou elektrickou

$$dF = q\,E = -e\,n\Delta S\,dx\,\frac{d\varphi}{dx}\,.$$

Porovnáním těchto sil dostaneme

$$d\varphi = -\frac{kT}{e}\,\frac{dn}{n}$$

a po integraci

$$\varphi = \frac{kT}{e}\,\ln\frac{n_2}{n_1}. \tag{3.51}$$

obr. 3.29

Uzavřeme-li nyní obvod, budou v něm dva kontaktní přechody a napětí na nich právě opačná. Výstupní práci ani elektronovou koncentraci ovlivnit nemůžeme. Můžeme však využít toho, že kontaktní napětí (3.51) závisí na teplotě. Budeme-li jeden spoj ohřívat a druhý ochlazovat, vznikne v obvodu elektromotorické napětí

$$\mathcal{E}_T = \frac{k}{e} \ln \frac{n_2}{n_1} (T_2 - T_1) = \sigma_1 \Delta T. \tag{3.52}$$

Koeficient σ_1 se nazývá Seebeckův koeficient a činí například pro termočlánek měď - konstantan 4.10^{-5} volt na stupeň. [20]

Vznik emn v nehomogenním obvodu tvořeném dvěma různými kovy při udržování jejich spojů při různých teplotách se nazývá *Seebeckův termoelektrický jev.* Vzniklé emn je sice malé (milivolty na sto stupňů), ale stálé. Takto konstruované termočlánky lze spojovat do termobaterií. Je to jeden ze způsobů jak měnit tepelnou energii na elektrickou. Termobaterie mohou přitom využívat nejrůznějších tepelných zdrojů - mohou být zahřívány slunečním teplem, teplem uvolňovaným při radioaktivních přeměnách, teplem z jaderného reaktoru, a sloužit tak jako autonomní zdroj elektrické energie na odlehlých místech, v kosmu apod. Na druhé straně můžeme termočlánky použít k přesnému měření zvláště vysokých teplot.

V roce 1834 byl objeven tzv. *Peltierův jev*, opačný k jevu Seebeckovu. Necháme-li nehomogenním obvodem procházet proud, bude se jeden ze spojů ohřívat a druhý ochlazovat a tak můžeme vytvořit například chladničku. Seebeckův a Peltierův jevy jsou znázorněny na obr. 3.29.

V roce 1851 objevil W. Thomson ještě třetí, tzv. *Thomsonův jev*, který spočívá v tom, že i v homogenním vodiči může vznikat elektromotorické napětí udržujeme-li jeho části pod různými teplotami. Je to pochopitelné, uvážíme-li, že vlastně vytváříme pro elektrony teplotní spád. Thomson také podal teoretické vysvětlení termoelektrických jevů.

Vedle galvanických článků a termočlánků existuje celá řada dalších fyzikálních jevů, které umožňují vytvářet zdroje emn. Tak například *fotočlánky* jsou založeny na jevu fotoelektrickém a využívají se v moderní elektronice často ve spojení s lasery, v *termoemisních měničích* se využívá energie elektronů vyletujících z povrchu zahřátých kovů, v *magnetohydrodynamických generátorech* (MHD) se kladné a záporné ionty prudce letících ionizovaných plynů v magnetickém poli separují a jejich kinetická energie se tak stává zdrojem stejnosměrného emn, využívá se piezoelektrického a dalších jevů.

Příklady

3.1 Na třech stejně dlouhých úsecích se změní průřez vodiče v poměru 1:2:3. Jak se na těchto úsecích změní napětí?

[20] Přesněji se tato závislost aproximuje až po kvadratický člen $\mathcal{E}_T = \sigma_1 \Delta T + \sigma_2 \Delta T^2$.

obr. 3.30

[6:3:2]

3.2 Jak se změní odpor měděného drátu, napneme-li jej tak, že se prodlouží o 0,1 %?

[vzroste o 0,2 %]

3.3 Krychle o hraně a je umístěna tak, že jeden roh leží v počátku souřadné soustavy a celá krychle v oktantu určeném kladnými směry os. Rezistivita materiálu se mění ve směru osy x lineárně jako $\rho = \rho_0(1 + x/x_0)$. Určete odpor mezi stěnami krychle rovnoběžnými s osami y, z a osami x, z.

$$\left[R = \frac{\rho_0}{a^2}\left(a + \frac{a^2}{2x_0}\right), \quad R = \frac{\rho_0}{x_0 \ln\left(1+\frac{a}{x_0}\right)}\right]$$

3.4 V obvodu na obr. 3.30 je dán odpor R_0. Určete odpor R_1 tak, aby vstupní odpor mezi body A, B byl opět R_0.

$$\left[\frac{R_0}{\sqrt{3}}\right]$$

3.5 Určete odpor mezi body A, B sítě na obr. 3.31. Všechny odpory mají touž velikost R.

$$\left[\frac{5}{11}R\right]$$

3.6 V každé hraně krychle je odpor R. Určete výsledný odpor mezi dvěma protilehlými vrcholy krychle.

$$\left[\frac{5}{6}R\right]$$

3.7 Jaký proud poteče mezi body A, B na obr. 3.32?

[20 mA]

3.8 Stíněný koaxiální kabel délky $l = 10$ m má poloměr vodiče $R_1 = 1$ mm a stínění $R_2 = 10$ mm. Izolace je z polystyrolu o rezistivitě $\rho = 10^{17}$ Ω.cm a dielektrické pevnosti 250 kV.cm^{-1}. Určete maximální napětí mezi vodičem a stíněním, svodový odpor a proud při tomto napětí.

$[5,75.10^4\ \text{V},\quad 3,66.10^{13}\ \Omega,\quad 1,57.10^{-9}\ \text{A}]$

3.9 Určete svodový odpor kulového kondenzátoru ($R_1 = 10$ cm, $R_2 = 20$ cm), je-li prostor mezi elektrodami zaplněn olejem o měrném odporu $\rho = 1,0.10^{16}$ Ω.cm.

obr. 3.31

obr. 3.32

obr. 3.33

obr. 3.34

[4,0.10^{13} Ω]

3.10 Homogenní telegrafní vedení je poškozeno tím, že je uzemněno odporem R. Dokažte, že proud na straně přijímacího přístroje bude nejmenší, bude-li porucha uprostřed vedení (odpor přístroje zanedbejte).

3.11 Na jaké napětí se nabije kondenzátor C na obr. 3.34, je-li svorkové napětí mezi A, B rovno U?

$$\left[U_C = \left|\frac{R_1R_4 - R_2R_3}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}\right| U\right]$$

3.12 Vnitřní odpor galvanického článku R_i je pětkrát menší než vnější odpor R, kterým je obvod uzavřen. Kolikrát bude svorkové napětí U menší, než emn článku?

$\left[\frac{5}{6}\text{krát}\right]$

3.13 Proud I_0 se rozvětví mezi dva paralelní odpory $R_1,\ R_2$ a pak se opět spojí (obr. 3.33). Určete proudy $I_1,\ I_2$ tekoucí po těchto odporech a ukažte, že rozdělení proudů odpovídá minimu rozptýleného tepelného výkonu.

obr. 3.35

3.14 U sítě na obr. 3.35 jsou všechny odpory dimenzovány na 0,5 W. Určete odpor a maximální přípustné napětí mezi body A, B.

$[400\ \Omega, 20\ \mathrm{V}]$

3.15 Zdroj emn E=110 V má dodávat výkon 5 kW do vzdálenosti 5 km. Jaký musí být průměr měděného drátu, aby ztráty energie v síti nepřevyšovaly 10 % přenášeného výkonu?

$[> 3,3\mathrm{cm!}]$

3.16 Přístroj má stupnici o 100 dílcích a vnitřní odpor 100 Ω. Při průchodu proudu 10 μA ukáže výchylku jednoho dílku. Jaké uspořádání musíme zvolit, chceme-li přístroj použít jako voltmetr s rozsahem do 100 V a jako ampérmetr pro proudy do 1 A?

[sériově $R = 10^5\ \Omega$, paralelně $R = 0,1\ \Omega$]

3.17 Dva olověné akumulátory mají $\mathcal{E}_1 = 12$ V, $R_{i1} = 0,04\ \Omega$, $\mathcal{E}_2 = 6$ V, $R_{i2} = 0,02\ \Omega$. Nějaký blbec je zapojil omylem vedle sebe. Jaký poteče akumulátory proud a jaké napětí bude na jejich svorkách?

[100 A, 8 V nebo 300 A, 0 V, podle způsobu zapojení]

3.18 Máme baterii o neznámém emn a vnitřním odporu. Připojíme-li na ni odpor $R_1 = 30\ \Omega$, poteče proud $I_1 = 125$ mA, připojíme-li odpor $R_2 = 40\ \Omega$, poteče proud $I_2 = 100$ mA. Určete E a R_i baterie.

[5 V, 10 Ω]

3.19 Vodičem o průřezu 10 mm^2 teče proud I=1 A. Koncentrace elektronů je $2,5.10^{28}$ m^{-3}. Určete proudovou hustotu a střední uspořádanou rychlost elektronů.

[10^5 A.m^{-2}, $2,5.10^{-5}$ m.s^{-1}]

3.20 V elektronovém synchrotronu elektrony obíhají po kruhové dráze délky 240 m. Na dráze se nachází celkem 10^{11} elektronů, jejichž rychlost se prakticky rovná rychlosti světla. Jaký proud protéká urychlovací dráhou?

[20 mA]

3.21 Ve van de Graaffově urychlovači se pohybuje pás široký 20 cm rychlostí 15 m/s. Povrchový náboj pásu vyvolává po obou stranách pole o inmtenzitě $E = 12$ kV.cm^{-1}. Jaký je proud přenášený pásem?

[63,7 μA]

3.22 Roztok KCl ve vodě o 10 % koncentraci má rezistivitu $\rho = 0,074\Omega$.m. Pohyblivosti iontů draslíku a chloru ve vodě jsou $6,6.10^{-8}$ SI a $6,8.10^{-8}$ SI. Určete stupeň disociace.

[$\alpha = 0,77$]

3.23 Žárovka s wolframovým vláknem má při 20^o C odpor 9,7 Ω. Když svítí, zvětší se její odpor na 121 Ω. Určete teplotu vlákna je-li teplotní koeficient odporu pro wolfram $\alpha = 4,5.10^{-3}$ K^{-1}.

[2 799^o C]

3.24 Teplotu peci měříme termočlánkem o termoelektrické konstantě $\alpha = 5,5.10^{-5}$ V.K^{-1}. Proud měříme galvanometrem o vnitřním odporu 2 kΩ a citlivosti 1μA na dílek. Teplota spoje mimo pec je $t_1 = 20^o$ C. Galvanometr ukazuje výchylku 25 dílků. Jaká je teplota peci t_2?

[929^o C]

4. STACIONÁRNÍ MAGNETICKÉ POLE

1. Síly působící mezi pohybujícími se náboji

Nejdříve určíme intenzitu elektrického pole pohybujícího se bodového náboje. V elektrostatice je velikost náboje určována z Coulombovy síly, kterou tento náboj působí na zkušební jednotkový náboj v dané vzdálenosti r. Pro pohybující se náboj však Coulombův zákon neplatí a síla mezi dvěma náboji může nyní záviset na jejich vzájemné poloze vzhledem ke směru pohybu, případně na rychlosti nábojů. Ocitáme se tak v situaci, že vlastně nevíme, jak určit velikost pohybujícího se náboje.

Budeme proto postulovat platnost Gaussova zákona, který je obecnější než Coulombův, a budeme předpokládat, že platí i pro náboj v libovolném pohybu. Obklopíme bodový náboj v daném okamžiku myšlenou kulovou plochou poloměru r a definujeme velikost náboje pomocí toku intenzity elektrického pole touto plochou: [21]

$$q \;=\; \varepsilon_0 \oint_K \vec{E}\cdot d\vec{S}\,. \tag{4.1}$$

Pokusíme se nyní zjistit, jak budou rozloženy siločáry kolem bodového pohybujícího se náboje. V prvním přiblížení, pro malé rychlosti, očekáváme, že tyto siločáry budou radiální a izotropní jako u pole Coulombova a budou se přemisťovat spolu s nábojem. Upřesníme toto očekávání. Za tím účelem provedeme myšlený pokus s pohybujícím se nabitým deskovým kondenzátorem. Nechť kondenzátor je klidu nabit s plošnou hustotou σ_0, jeho desky orientovány kolmo k ose z a intenzita pole mezi deskami má velikost $E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$ (obr. 4.1).

Utíkejme nyní s kondenzátorem rovnoměrně rychlostí $\vec{v}$ ve směru osy x. Podle relativistické kontrakce délek (1.12) se při pohybu zkrátí podélný rozměr desek, a tedy se zmenší i jejich plocha koeficientem $1/\gamma \;=\; \sqrt{1-v^2/c^2}$. Protože náboj je relativisticky invariantní a jeho velikost se za pohybu nemění, změní se plošná hustota náboje a velikost intenzity pole na

$$\sigma \;=\; \frac{Q}{S} \;=\; \frac{Q\gamma}{S_0} \;=\; \gamma\,\sigma_0\,, \qquad E \;=\; \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \;=\; \gamma\,\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \;=\; \gamma\,E_0\,.$$

Bude-li se takto orientovaný kondenzátor pohybovat ve směru y, změní se pole stejným způsobem. Při pohybu ve směru osy z se velikost desek nezmění, ale desky se sblíží. To neovlivní hustotu náboje ani intenzitu pole, změní se ovšem napětí na kondenzátoru.

Mějme nyní klidovou soustavu S a pohybující se soustavu S' jako na obr. 1.6 a budiž S' vlastní soustava kondenzátoru (soustava pohybující se spolu s kondenzátorem ve směru osy x). Orientujeme-li nyní kondenzátor tak, aychom mohli sledovat změny jednotlivých složek pole dostaneme následující transformační vzorce pro složky intenzity elektrického pole:

$$E_x \;=\; E'_x\,, \qquad E_y \;=\; \gamma\,E'_y\,, \qquad E_z \;=\; \gamma\,E'_z\,. \tag{4.2}$$

Připomeňme, že jde o transformaci vzhledem k soustavě S', v níž jsou elektrické náboje v klidu.

Mějme nyní bodový náboj q pohybující se rovnoměrně přímočaře podél osy x a spojme s ním počátek O'. U rovnoměrného přímočarého pohybu je lhostejno, v kterém okamžiku budeme pole zkoumat, a je proto výhodné zvolit okamžik $t = t' = 0$ v němž souřadné osy obou soustav splývají (obr. 4.2).

[21] Velikost náboje tak definujeme podle normální složky síly působící na zkušební náboj rovnoměrně rozprostřený na kulové ploše vystředované po této ploše.

obr. 4.1

obr. 4.2

Potom se Lorentzovy transformace zjednodušují na $x' = \gamma\ x, \quad z' = z$. Protože v čárkované soustavě je pole Coulombovo, dostaneme pro transformaci složek:

$$E'_x \ = \ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{\cos\theta'}{r'^2} \ = \ k\ \frac{x'}{r'^3} \ = \ k\ \gamma\ \frac{x}{r'^3} \ = \ E_x\ ,$$

$$E'_z \ = \ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{\sin\theta'}{r'^2} \ = \ k\frac{z'}{r'^3} \ = \ k\ \frac{z}{r'^3} \ = \ \frac{1}{\gamma}\ E_z\ ,$$

neboli

$$\vec{E} \ = \ \gamma\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{\vec{r}}{r'^3}\ . \tag{4.3}$$

Z provedených transformací je vidět, že platí

$$\frac{E'_x}{E'_z} \ = \ \frac{x'}{z'}, \qquad \frac{E_x}{E_z} \ = \ \frac{x}{z}\ .$$

To znamená, že při rovnoměrném přímočarém pohybu náboje zůstává elektrické pole radiální, centrální. Siločáry zůstávají v přímkách vycházejících z náboje a mohou se pouze natáčet jako pevné tyčky.

Určíme hustotu rozložení siločar v různých směrech, tj. velikost intenzity elektrického pole:

$$E^2 \ = \ k^2\ \gamma^2\ \frac{x^2+z^2}{r'^6} \ = \ k^2\ \gamma^2\ \frac{x^2+z^2}{[(\gamma x)^2+z^2]^3} \ = \ \frac{k^2}{\gamma^4}\ \frac{x^2+z^2}{(x^2+z^2-\beta^2 z^2)^3} \ =$$

$$= \ k^2\ \frac{(1-\beta^2)^2}{(x^2+z^2)^2\left(1-\frac{\beta^2 z^2}{x^2+z^2}\right)^3} \ = \ k^2\ \frac{(1-\beta^2)^2}{r^4(1-\beta^2\sin^2\theta)^3}\ .$$

Označíme-li funkci úhlu θ

$$\Gamma \ = \ \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \tag{4.4}$$

nazývanou někdy "Heavisideův faktor", můžeme vyjádřit výsledné pole bodového rovnoměrně přímočaře se pohybujícího náboje v okamžiku nula jako

$$\vec{E} \ = \ \Gamma\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{\vec{r}}{r^3}\ . \tag{4.5}$$

obr. 4.3

Průběh siločar tohoto pole je na obr. 4.3.

Toto pole se přemisťuje spolu s nábojem rychlostí v. V každém okamžiku se liší od Coulombova pole pouze faktorem Γ, který je relativistickou funkcí druhého řádu vzhledem k v/c. Zdálo by se tedy, že při malých rychlostech nábojů ve vodičích nehrají relativistické efekty žádnou úlohu a že jejich vliv se uplatní teprve u nabitých částic pohybujících se v urychlovačích rychlostmi blízkými rychlosti světla ve vakuu. Skutečně elektrické pole takzvaných ultrarelativistických elektronů ($v \approx c$) je soustředěno prakticky ve směru příčném ke směru pohybu. Jak ale uvidíme, i při pomalých pohybech nábojů mohou relativistické jevy sehrát rozhodující úlohu, což je jistě překvapující.

V souvislosti s elektrickým polem pohybujícího se náboje učiníme ještě tři poznámky.

1. Lze se přesvědčit, že celkový tok intenzity elektrického pole (4.5) zůstává roven q/ε_0. Integrací ve sférických souřadnicích po ploše koule poloměru r obklopující náboj dostáváme

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E\, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \frac{q}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \Gamma \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2\theta)^{3/2}} \sin\theta \, d\theta = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

(substituce $\cos\theta = x$).

2. Pole pozorované v bodě A ve vzdálenosti r od náboje ve skutečnosti neodpovídá stavu náboje v okamžiku nula. Podle STR se jakákoli změna může projevit ve vzdálenosti r nejdříve za dobu $t = r/c$. Pole v bodě A tedy odpovídá stavu náboje v okamžiku $t = -R/c$, kde R je vzdálenost, kterou se informace o tomto poli dostala rychlostí c od náboje do bodu A. Náboj se přitom nacházel na ose x ve vzdálenosti $vt = vR/c$ před počátkem (viz obr. 4.4). Je poměrně jednoduchou geometrickou úlohou vyjádřit pole $\vec{E}$ nikoli jako funkci $\vec{r}$, ale jako funkci $\vec{R}$ (takzvané *retardované pole*):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(1-\beta^2)\,(\vec{R} - R\vec{\beta})}{(R - \vec{R}\cdot\vec{\beta})^3} \,. \tag{4.6}$$

Uvedeného výrazu je třeba v případě, že se velikost nebo rychlost náboje za pohybu mění.

3. V případě, že se náboj pohybuje nerovnoměrně nebo po zakřivené dráze, je situace složitější a řeší se v teorii elektromagnetického pole. Zde jen poukážeme na to, že celkový počet siločar sice zůstává stejný, ale siločáry jsou zakřiveny ("vlasy náboje vlají") a dochází k vyzařování elektromagnetických vln. Jde-li o například o náhlé zbrzdění rovnoměrně se pohybujícího náboje do klidu, přejde Heavisideovo pole (4.5) na pole Coulombovo, a to během doby brzdění Δt. Protože siločáry musí zůstat spojité, vznikne oblast v podobě kulové vrstvy, kde siločáry mají tangenciální složku. Tloušťka této vrstvy je $c\,\Delta t$ a rozpíná se prostorem rychlostí c. Mluvíme o takzvaném brzdném záření. Podobně při křivočarém pohybu náboje v magnetckém poli dochází k vyzařování synchrotronového záření, které způsobuje nežádoucí energetické ztráty v urychlovačích. Na obr. 4.5 je naznačen průběh siločar urychlovaného náboje, na obr. 4.6 vznik

obr. 4.4

obr. 4.5

obr. 4.6

tangenciální složky elektrického pole. Matematickým řešením těchto úloh se zde nemůžeme zabývat.

Mějme nyní dva bodové náboje a uvažujme o síle, kterou náboj q_0 bude působit na náboj q. Rozlišme čtyři případy:

I. Oba náboje jsou v klidu. Síla bude Coulombova,

$$\vec{F} \; = \; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{q_0 \, q}{r^3} \, \vec{r} \, .$$

II. Náboj q_0 se pohybuje rychlostí $\vec{v}$, náboj q je v klidu. Podle (4.5) bude síla rovna

$$\vec{F} \; = \; \Gamma \, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{q_0 q}{r^3} \, \vec{r} \, .$$

III. Náboj q_0 je v klidu, náboj q se pohybuje rychlostí $\vec{v}$. Spojíme čárkovanou soustavu S' s nábojem q. V této soustavě platí $\vec{F}' = q \, \vec{E}'$ a podle (4.2) $E_x = E'_x, \;\; E_{y,z} = (1/\gamma) \, E'_{y,z}$. Musíme si totiž uvědomit, že tentokrát je to soustava S, v níž je náboj q_0 vytvářející pole v klidu.

Jak se bude transformovat síla mezi oběma soustavami? Relativistické transformace složek síly vyjadřují vztahy (1.31). Položíme-li v nich $\vec{u} = (v, 0, 0)$, dostaneme

$$F_x \; = \; F'_x, \qquad F_{y,z} \; = \; \frac{1}{\gamma} \, F'_{y,z} \, .$$

V laboratorní soustavě S bude tedy nehybný náboj q_0 působit na pohybující se náboj q silou o složkách

$$F_x = F'_x = q\,E'_x = q\,E_x\,,$$

$$F_{y,z} = \frac{1}{\gamma}\,F'_{y,z} = \frac{1}{\gamma}\,q\,E'_{y,z} = \frac{1}{\gamma}\,q\,\gamma\,E_{y,z} = q\,E_{y,z}\,.$$

Vidíme, že elektrické pole působí stejnou silou na nehybný i pohybující se náboj. Srovnáním případů II. a III. zjistíme, že nehybný náboj působí na pohybující se náboj jinou silou než pohybující se náboj na nehybný. Mezi pohybujícími se náboji tedy *neplatí Newtonův zákon akce a reakce.* Je to způsobeno tím, že v relativistické fyzice se silové působení šíří konečnou rychlostí a na akci nemůže následovat okamžitá reakce.

IV. Přejdeme nyní k obecnému případu, kdy oba náboje se pohybují, a to různými rychlostmi. Tentokrát spojíme souřadnou soustavu S' s nábojem q_0, který se pohybuje v laboratorní soustavě rychlostí $\vec{v}$ a směrujeme osu x podél této rychlosti. Je tedy $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Náboj q má potom v soustavě S rychlost $\vec{u}$ a v soustavě S' rychlost $\vec{u}'$. Všimneme si opět situace v okamžiku nula, kdy $t = t' = 0$. Náboj q_0 vytvoří v soustavě S' Coulombovo pole se středem v počátku a bude působit na náboj q silou

$$\vec{F}' = q\,\vec{E}' = q\,\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}'}{r'^3} = k\,\frac{\vec{r}'}{r'^3}\,.$$

V kapitole o STR jsme odvodili transformaci takové síly do laboratorní soustavy S vztahem (1.33). Proto bude

$$\vec{F} = \frac{k\,\gamma}{r'^3}\left[\vec{r} + \frac{1}{c^2}\,\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{r})\right]\,. \tag{4.7}$$

Podle (4.3) a (4.5) pohybující se náboj q_0 vytváří elektrické pole

$$\vec{E} = \gamma\,\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r'^3} = \Gamma\,\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\,.$$

Sílu, kterou působí náboj q_0 pohybující se obecně rychlostí $\vec{v}$ na náboj q pohybující se obecně rychlostí $\vec{u}$ můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$\vec{F} = q\,\Gamma\,\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\,\left[\vec{r} + \frac{1}{c^2}\,\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{r})\right] = q\,\left[\vec{E} + \frac{1}{c^2}\,\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{E})\right]\,. \tag{4.8}$$

Vidíme, že mezi pohybujícími se náboji působí kromě elektrické síly qE ještě další síla úměrná náboji a kolmá k rychlosti náboje $\vec{u}$. Tato síla nevymizí ani při nerelativistických rychlostech, kdy položíme faktor $\Gamma = 1$. Této síle říkáme síla magnetická.

Ve výrazu (4.8) stále vystupuje rychlost $\vec{v}$ náboje, který vyvolává silové působení. Abychom se této rychlosti zbavili, zavedeme vedle elektrického další pole, magnetické a definujeme tzv. *vektor magnetické indukce* $\vec{B}$ [22] vztahem

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\,\vec{v}\times\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi c^2\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\,(\vec{v}\times\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q_0}{r^3}\,(\vec{v}\times\vec{r})\,. \tag{4.9}$$

Přitom jsme zavedli novou konstantu μ_0 nazývanou *permeabilita vakua* nebo též magnetická konstanta. Mezi konstantami ε_0 a μ_0 platí vztah

$$\varepsilon_0\,\mu_0 = \frac{1}{c^2}\,. \tag{4.10}$$

Zatímco každá z těchto konstant zvlášť žádný fyzikální smysl nemá a vyplývá pouze z volby soustavy jednotek, jejich součin fyzikální význam má a vyjadřuje vztah elektromagnetických jevů k rychlosti světla. Jak uvidíme dále, číselná hodnota μ_0 byla stanovena přesně na $\mu_0 = 4\pi\,.10^{-7}$ H.m^{-1} (henry na metr).

Nyní můžeme napsat sílu, která působí na pohybující se elektrický náboj ve tvaru

$$\vec{F} = q\,[\,\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\,] \tag{4.11}$$

[22] Název je historický a nevýstižný.

obr. 4.7 obr. 4.8

To je známá *Lorentzova síla* a výraz (4.11) můžeme také považovat za definici elektrického a magnetického pole. Kdybychom si chtěli ušetřit celé předchozí relativistické odvozování, mohli bychom brát existenci magnetického pole jako nový, samostatný experimentální fakt a formulovat situaci takto:

Pohybující se elektrické náboje budí v prostoru jednak elektrické, jednak magnetické pole. Na pohybující se náboj působí elektrické a magnetické pole Lorentzovou silou (4.11).

2. Vlastnosti magnetického pole

Magnetické pole je popsáno vektorem magnetické indukce $\vec{B}$, jehož rozložení v prostoru můžeme znázornit *indukčními čarami.* Jednotkou magnetické indukce v soustavě SI je tesla (T) a má fyzikální rozměr $\mathrm{MT^{-2}I^{-1}}$. Můžeme zavést magnetický indukční tok a cirkulaci magnetické indukce podél uzavřené křivky vztahy

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \,, \qquad \Gamma = \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} \,.$$

Magnetický indukční tok má pro svůj mimořádný význam jednotku se zvláštním názvem, weber. Také pro magnetické pole platí princip superpozice, magnetické pole vytvářené jednotlivými pohybujícími se náboji a proudy se nezávisle sčítají.

Jeden bodový pohybující se náboj nemůže vytvořit stacionární magnetické pole. Musíme mít uzavřený stacionární proud, rozdělit ho na malé proudové elementy a určit výslednou magnetickou indukci podle principu superpozice. Na obr. 4.7 je zakreslena proudová smyčka l a vektor průvodiče $\vec{R}$ od malého dráhového elementu $d\vec{l}$ do bodu A, v němž magnetickou indukci určujeme.

Proudový element $d\vec{I}$ můžeme vyjádřit pomocí hustoty a střední rychlosti náboje v objemu smyčky (obr. 4.8):

$$d\vec{I} = I d\vec{l} = j \,\Delta S \, d\vec{l} = \vec{j} \, dV = \rho \, dV \, \vec{v} \,. \qquad (4.12)$$

Podle (4.9) bude proudový element $d\vec{I}$ vytvářet v bodě A magnetické pole o indukci

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\rho \, dV}{R^3} (\vec{v} \times \vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \,. \qquad (4.13)$$

obr. 4.9 obr. 4.10

Všimněme si, že v tomto výrazu již nevystupuje hustota náboje, nýbrž pouze proud. Jak víme, proud a tedy i magnetické pole mohou existovat i v případě, že objemová hustota elektrického náboje je nulová. Na rozdíl od bodového náboje, který můžeme realizovat malým nabitým tělesem nemůže "proudový element" samostatně existovat, vždy musí být součástí nějakého uzavřeného obvodu. Proto má fyzikální smysl pouze magnetická indukce vyvolaná proudovou smyčkou l. Určíme ji z principu superpozice integrací příspěvků jednotlivých proudových elementů:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} . \tag{4.14}$$

Vztah (4.14) se nazývá *Biotův - Savartův (- Laplaceův) zákon* a umožňuje najít magnetické pole různých stacionárních proudových obvodů.

Uvažujme *přímý vodič* jímž protéká proud I ve směru osy x (obr. 4.9) a hledejme magnetickou indukci v bodě A na ose z ve vzdálenosti r od vodiče. Z vektorového součinu v Biotově - Savartově zákonu je zřejmé, že vektor magnetické indukce bude kolmý k rovině tvořené proudovou přímkou a bodem A a bude tečný ke kružnici v rovině kolmé k proudu se středem na proudové přímce. Bude mít směr pravotočivého šroubu vzhledem ke směru proudu (obr. 4.10).

Probíhá-li element dl podél vodiče, mění se veličiny l, R, θ, které jsou vázány vztahy

$$l = -\frac{r}{\mathrm{tg}\,\theta} , \quad dl = \frac{r\, d\theta}{\sin^2\theta} , \quad R = \frac{r}{\sin\theta} .$$

Podle (4.14) pak máme

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{|d\vec{l} \times \vec{R}|}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) . \tag{4.15}$$

Výraz (4.15) lze použít k výpočtu příspěvku přímého úseku vodiče k magnetické indukci; úhly θ_1 a θ_2 svírají průvodiče konců vodiče s bodem A.

Je-li vodič nekonečný, bude $\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi$ a magnetická indukce bude

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} . \tag{4.16}$$

Určíme magnetické pole plošného proudu protékajícího po nekonečné rovině (obr. 4.11). S bodu A, v němž pole určujeme, spustíme kolmici na proudovou rovinu ve vzdálenosti r. Vyčleníme dva přímkové proudy $dI = \alpha\, dl$ (α je plošná hustota proudu) ve stejných vzdálenostech l od paty této kolmice a sečteme vektorově jejich příspěvky k magnetické indukci v bodě A. Vidíme, že výsledný vektor magnetické indukce vyvolané touto dvojicí přímkových proudů $d\vec{B}$ je rovnoběžný s proudovou rovinou. Nyní zbývá integrovat přes všechny takové dvojice přímých proudů v rovině. Vezmeme-li v úvahu, že

$$l = r\,\mathrm{tg}\,\theta, \quad dl = \frac{r\, d\theta}{\cos^2\theta}, \quad R = \frac{r}{\cos\theta}$$

obr. 4.11

a

$$dB = 2 \frac{\mu_0 \, dI}{2\pi \, R} \cos\theta = \frac{\mu_0 \, \alpha \, \cos\theta \, dl}{\pi \, R}$$

a po integraci

$$B = \frac{\mu_0 \, \alpha}{\pi} \int \frac{\cos\theta \, dl}{R} = \frac{\mu_0 \, \alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\mu_0 \, \alpha}{2} \, . \tag{4.17}$$

Magnetická indukce vpravo od proudové roviny bude mít tedy velikost $B = (\mu_0 \, \alpha)/2$ a bude mířit kolmo k proudu a rovnoběžně s rovinou, vlevo od roviny bude mít směr opačný. Na proudové rovině má tedy tečná složka magnetické indukce nespojitost $\mu_0 \, \alpha$. Je užitečné srovnat tyto závěry s chováním intenzity elektrického pole na nabité rovině (2.24).

Máme-li dvě rovnoběžné proudové roviny, bude se magnetická indukce superponovat. Budou-li plošné proudy souhlasně rovnoběžné, vyruší se pole mezi rovinami, budou-li proudy nesouhlasně rovnoběžné, bude magnetické pole o indukci $B = \mu_0 \, \alpha$ soustředěno v prostoru mezi rovinami. Necháme-li téci proud po plášti válce kolmo k ose, bude osové magnetické pole soustředěno uvnitř válce. Poteče-li proud po plášti rovnoběžně s osou, bude magnetické pole uvnitř válce nulové.

Na obr. 4.12 je znázorněn směr a rozložení magnetické indukce vytvářené dvojicemi proudových rovin ve srovnání intenzitou elektrického pole nabitých rovin.

Získané výsledky nám umožňují najít obecné *transformační vztahy*, podle nichž se mění elektrické a magnetické pole při přechodu od jedné inerciální vztažné soustavy k druhé. Můžeme totiž použít opět naši metodu utíkání s deskovým kondenzátorem.

Na obr. 4.13 je znázorněn nabitý kondenzátor, jehož desky leží v rovině x, z. Pohybuje-li se tento kondenzátor rovnoměrně ve směru osy x, protéká v tomto směru vlastně konvekční plošný proud. Je-li v laboratorní soustavě rychlost kondenzátoru rovna u a plošná hustota náboje σ, bude lineární hustota proudu $\alpha = \sigma \, u$ a v prostoru mezi deskami kondenzátoru bude existovat y-ová složka intenzity elektrického pole a z-ová složka magnetické indukce:

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad B_z = \mu_0 \, \alpha = \mu_0 \, \sigma \, u \, .$$

obr. 4.12

obr. 4.13

Přejdeme-li k čárkované soustavě, která se pohybuje vůči laboratorní také ve směru x rychlostí v, a v níž se kondenzátor pohybuje rychlostí u', musíme přetransformovat rychlost u a plošnou hustotu náboje σ. Podle vzorců pro skládání rychlostí (1.14) dostaneme

$$\beta'_u \;=\; \frac{\beta_u \;-\; \beta}{1 \;-\; \beta_u\, \beta}, \quad \text{kde} \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \beta_u = \frac{u}{c}, \quad \beta'_u = \frac{u'}{c} \;.$$

Pokud jde o plošnou hustotu náboje, bude ve vlastní soustavě kondenzátoru rovna σ_u a v soustavách S a S' $\sigma = \gamma_u\, \sigma_u, \quad \sigma'_u = \gamma'_u\, \sigma_u$. Vztah mezi γ a β je dán (1.1). V čárkované soustavě tedy máme

$$\sigma' \;=\; \gamma'_u \sigma_u \;=\; \frac{\gamma'_u}{\gamma_u}\sigma \;=\; \frac{\sigma}{\gamma_u}\frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2_u}} \;=\; \frac{\sigma}{\gamma_u}\frac{1-\beta_u\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta_u^2)}} \;=\; \sigma\gamma(1-\beta_u\beta)\;.$$

Tak dostaneme složky elektrického a magnetického pole:

$$E'_y \;=\; \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \;=\; \gamma\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\beta_u\beta\sigma}{\varepsilon_0}\right) \;=\; \gamma\left(E_y - \beta c\frac{\mu_0\sigma u}{c^2\varepsilon_0\mu_0}\right) \;=\; \gamma(E_y - \beta c B_z)\;,$$

$$B'_z \;=\; \mu_0\sigma' u' \;=\; \mu_0\sigma\gamma c(\beta_u - \beta) \;=\; \gamma(\mu_0\sigma u - \mu_0\sigma v) \;=\; \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) \;=\; \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}\,E_y\right).$$

Podobně bychom postupovali i u ostatních složek. Můžeme tedy napsat obecné transformační vzorce pro elektrické a magnetické pole při přechodu mezi dvěma inerciálními vztažnými soustavami:

$$E'_x \;=\; E_x\;,\quad E'_y \;=\; \gamma(E_y - \beta c B_z)\;,\quad E'_z \;=\; \gamma(E_z + \beta c B_y)$$

$$B'_x \;=\; B_x\;,\quad B'_y \;=\; \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_z\right)\;,\quad B'_z \;=\; \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}E_y\right)\;. \tag{4.18}$$

Jsou-li v soustavě S' náboje v klidu, potom $\vec{B}' = 0$ a platí vztahy (4.2). Pohybuje-li se soustava S' pomalu, můžeme položit $\gamma = 1$ a transformační vztahy se zjednoduší na

$$\vec{E}' \;=\; \vec{E} \;+\; \vec{v}\times\vec{B}\;,\quad \vec{B}' \;=\; \vec{B} \;-\; \frac{1}{c^2}\,\vec{v}\times\vec{E}\;. \tag{4.19}$$

Při každé transformaci je důležitou otázka takzvaných invariantů, tj. veličin, které se při transformaci nemění. Také v případě elektrického a magnetického pole můžeme ověřit, že transformace (4.18) ponechávají beze změny dvě kombinace vektorů $\vec{E}$, $\vec{B}$:

$$\vec{E}\cdot\vec{B} \;=\; \vec{E}'\cdot\vec{B}'\;,\quad B^2 \;-\; \frac{1}{c^2}E^2 \;=\; B^{,2} - \frac{1}{c^2}E^{,2}\;. \tag{4.20}$$

Znamená to mimo jiné. že jsou-li vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$ v jedné vztažné soustavě vzájemně kolmé (jejich skalární součin je roven nule), budou kolmé ve všech vztažných soustavách.

Určíme sílu, která působí na proudový element se strany magnetického pole. Vyjdeme-li ze vzorce pro Lorentzovu sílu, můžeme napsat

$$d\vec{F} \;=\; \rho\, dV(\vec{E} \;+\; \vec{u}\times\vec{B}) \;=\; \rho\, dV\;\vec{E} \;+\; \vec{j}\;dV\times\vec{B} \;=\; \rho\, dV\;\vec{E} \;+\; I\;d\vec{l}\times\vec{B}\;.$$

Je-li objem, v němž protéká proud elektricky neutrální ($\rho = 0$), bude magnetické působení na proudový element dáno pouze posledním členem. Protože magnetický element sám vytváří magnetické pole o indukci (4.13), můžeme zapsat silový zákon pro vzájemné působení dvou proudových elementů:

$$d\vec{F} \;=\; I_1 d\vec{l_1}\times\vec{B}_2 \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I_1 I_2}{R_{12}^3}\,[d\vec{l_1}\times(d\vec{l_2}\times\vec{R}_{12})]\;. \tag{4.21}$$

obr. 4.14

Tento silový zákon se někdy nazývá *Ampérovým vzorcem.* Ampér měl snahu vybudovat nauku o vzájemném silovém působení vodičů s proudem podle vzoru Newtonovy dynamiky. Jak jsme se však zmiňovali, proudové elementy nemohou samostatně existovat, a tak má fyzikální význam pouze výsledné silové působení mezi uzavřenými proudovými smyčkami.

Uvažme například dva rovnoběžné nekonečně dlouhé přímé proudové vodiče (obr. 4.14). Na obrázku je též vyznačen směr síly, kterou působí druhý vodič na první. Protékají-li oběma vodiči souhlasné proudy, vodiče se přitahují, jsou-li proudy nesouhlasné, vodiče se odpuzují. Protože druhý vodič vytváří magnetické pole o indukci kolmé k proudovému elementu druhého vodiče, můžeme pro velikost síly, kterou druhý vodič působí na element prvního vodiče napsat

$$dF_{12} \;=\; I_1\, B_{12}\, dl_1, \quad B_{12} \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I_2}{r}\,.$$

Síla mezi dvěma nekonečnými proudy je ovšem nekonečná. Zajímáme se proto, jakou silou působí druhý vodič na jednotku délky prvního vodiče. Dostáváme

$$F_l \;=\; \frac{dF_{12}}{dl_1} \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I_1 I_2}{r}\,. \tag{4.22}$$

Tento vzorec byl vzat za základ pro definici jedné ze základních jednotek soustavy SI, ampéru. Podle usnesení 9. Generální konference pro míry a váhy v Paříži v roce 1948

Ampér (A) je proud, který při stálém průtoku dvěma rovnoběžnými přímými nekonečně dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti jednoho metru, vyvolá mezi vodiči sílu 2.10^{-7} *newtonu na jeden metr délky.*

Touto definicí je vlastně zvolena hodnota konstanty μ_0, jak jsme výše uvedli. Protože konstanty μ_0 a ε_0 jsou vzájemně vázány byly definováním ampéru vlastně stanoveny jednotky všech elektrických i magnetických veličin.

Stacionární magnetické pole je vždy vytvářeno stacionárními proudy. Přitom nazáleží na tom, o jaký druh proudu jde, zda jde o kondukční proud protékající vodičem nebo o konvekční proud nábojů mechanicky přemisťovaných v prostoru. Tento poznatek musel být ovšem experimentálně ověřen. Zasloužili se o to v minulém století americký fyzik H.A.Rowland, dále W.K.Roentgen a ruský fyzik A.A.Eichenwald. Rowland za svého působení v Berlíně 1876 provedl citlivý pokus s pozlaceným ebonitovým kotoučem, který rychle rotoval mezi dvěma uzemněnými skleněnými deskami. Tím vznikly vlastně dva kondenzátory s jednou společnou rotující elektrodou. Při rotaci nabité elektrody vznikl smyčkový proud a změny jím vytvářeného slabého magnetického pole (asi 10^{-5} velikosti pole geomagnetického) při změně směru rotace byly registrovány magnetkou zavěšenou v mosazné trubce na torzním vlákně. Podobný pokus provedl později (1888) Roentgen, když nechal rotovat dielektrický skleněný kotouč mezi deskami nehybného kondenzátoru. Na povrchu kotouče se indukovaly polarizační vázané náboje, které při rotaci vytvářely konvekční proud. Magnetické pole vytvářejí samozřejmě i vázané proudy v látkovém prostředí a také proud posuvný, který je ovšem nestacionární. To prokázal experimentálně Whitehead, když registroval magnetické

obr. 4.15

impulsy vznikající při průchodu střídavého elektrického proudu kondenzátorem zaplněným dielektrikem.

Také stacionární magnetické pole můžeme popsat soustavou Maxwellových rovnic vyjadřujících jeho obecné vlastnosti. Jednou z těchto vlastností je experimentální fakt, že neexistují magnetické náboje, z nichž by indukční čáry vycházely a že magnetické pole (i nestacionární) je solenoidální. Indukční čáry se musí uzavírat samy do sebe nebo vycházet a končit v nekonečnu. [23]

Tok magnetických indukčních čar uzavřenou plochou je tedy vždy roven nule:

$$\Phi \;=\; \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \;=\; 0\,, \tag{4.23}$$

neboli v diferenciálním tvaru

$$\mathrm{div}\,\vec{B} \;=\; 0\,. \tag{4.24}$$

Určíme, čemu se rovná cirkulace magnetické indukce podél uzavřené křivky. Vezměme zprvu nekonečný přímý vodič s proudem I, o němž víme že vytváří indukční čáry magnetického pole v podobě kružnic se středem na vodiči a o velikosti dané (4.16). Cirkulace podél takové kružnice bude

$$\Gamma \;=\; \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} \;=\; \oint_l \frac{\mu_0\, I}{2\pi\, r}\, dl \;=\; \mu_0\, I\,. \tag{4.25}$$

Tento výsledek můžeme zobecnit na libovolnou uzavřenou křivku a libovolné rozložení proudů. Předně je zřejmo, že neobepíná-li křivka žádný proud, bude cirkulace podél ní nulová. Na obr. 4.15 vidíme uzavřenou křivku v poli přímkového proudu sestavenou ze dvou radiálních úseků a dvou koncentrických oblouků kružnic.

Radiální úseky k cirkulaci nepřispívají, příspěvky na obloucích kružnic se vzájemně vyruší (pole klesá nepřímo úměrně poloměru, délka oblouku roste úměrně s poloměrem). Na obr. 4.16 vidíme obecnou křivku neobepínající proud v poli přímého vodiče. Můžeme ji rozdělit na malé úseky $d\vec{l}_1$, $d\vec{l}_2$, vyťaté dvěma blízkými radiálními paprsky. Délky těchto úseků budou v poměru

$$\frac{r_1}{\cos\alpha_1} \;:\; \frac{r_2}{\cos\alpha_2}\,,$$

zatímco projekce vektoru $\vec{B}$ do tangenciálního směru budou v poměru obráceném.

[23] Jak ukázal P.A.M.Dirac, kvantová teorie pole připouští existenci magnetického monopólu, tedy částice nesoucí magnetický náboj, jehož velikost je jednoznačně vázána s velikostí elementárního elektrického náboje. Tato částice však nebyla dosud objevena a úsilí v tomto směru pokračuje, v duchu přesvědčení fyziků, že to co může existovat, existuje.

Jinak se pojem magnetického náboje (magnetického množství) ve fyzice užívá jako formální představa definovaná pomocí Coulombova zákona pro magnetické síly. Máme-li totiž dva dlouhé tyčové magnety a zkoumáme sílu, která působí mezi jejich konci, můžeme tyto konce přibližně považovat za bodové zdroje indukčních čar, za "magnetické náboje".

obr. 4.16

obr. 4.17

obr. 4.18 obr. 4.19

Cirkulace bude tedy nenulová jen tehdy, obepíná-li křivka proud. Pro obecnou křivku l_1 na obr. 4.17 můžeme provést následující úvahu. Zvolíme pomocnou kružnici l_2 se středem na vodiči a vytvoříme spojení obou křivek $l_1 + l_2$ tak, aby příspěvek spojovacího úseku k cirkulaci bylo možno zanedbat. Nová spojená křivka již proud neobepíná a cirkulace podél ní je tedy nulová. Vzhledem k tomu, že směry procházení obou částí spojené křivky jsou protichůdné, máme

$$\oint_{l_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} - \oint_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \, .$$

Také pro obecnou křivku l_1 bude tedy cirkulace dána (4.25).

Při našem zobecňování jsme pracovali s křivkami v rovině kolmé ke směru proudu; bylo by ovšem možné uvažovat i křivky prostorové. Bude-li magnetické pole vytvářeno více proudy můžeme použít princip superpozice. Indukční čáry pro tři paralelní vodiče jsou přibližně zakresleny na obr. 4.18.

Tím dospíváme k obecnému *Ampérovu zákonu:*

Cirkulace magnetické indukce podél libovolné uzavřené křivky je rovna celkovému proudu, který tato křivka obepíná, násobenému μ_0.

Podle toho, protéká-li proud jednotlivými vodiči nebo je-li v prostoru rozložen s hustotou $\vec{j}$ dostaneme matematické vyjádření Ampérova zákona:

$$\oint_{l} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{\alpha} I_{\alpha} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad . \tag{4.26}$$

Ampérův zákon má podobný význam pro pole magnetické jako Gaussův zákon pro pole elektrické. S použitím Stokesovy věty jej můžeme vyjádřit též v diferenciálním tvaru. Máme

$$\oint_{l} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\, \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

a porovnáme-li s pravou stranou (4.26), můžeme vzhledem k libovůli ve volbě křivky a plochy přirovnat integrované funkce. V diferenciálním tvaru zní Ampérův zákon

$$\mathrm{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \, \vec{j} \, . \tag{4.27}$$

Shrneme-li nyní všechny dosud získané rovnice pro stacionární elektrické a magnetické pole, dostaneme soustavu Maxwellových rovnic pro stacionární pole jako

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\, \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad & \mathrm{rot}\, \vec{B} &= \mu_0 \, \vec{j} \\ \mathrm{rot}\, \vec{E} &= 0 \qquad & \mathrm{div}\, \vec{B} &= 0 \; . \end{aligned} \tag{4.28}$$

Rovnice v prvním řádku (I. série) spojují intenzitu elektrického pole a magnetickou indukci s náboji a proudy; z nich je tedy možno vypočítat pole, známe-li rozložení nábojů a proudů a naopak. Rovnice ve druhém řádku (II. série) náboje a proudy neobsahují a vyjadřují pouze obecné vlastnosti stacionárních polí.

Říkají, že stacionární elektrické pole je potenciální a stacionární magnetické pole je solenoidální. Přitom se tato soustava rozpadá na dvě nezávislé podsoustavy rovnic pro elektrické a pro magnetické pole. Přesto že obě pole jsou vytvářena týmiž pohybujícími se náboji, nejsou vzájemně provázána.

Najdeme nyní obecné řešení rovnic stacionárního magnetického pole. Vzhledem k tomu, že divergence tohoto pole je nulová, můžeme zavést jiné vektorové pole $\vec{A}\,(x,y,z)$ nazývané *vektorový potenciál* takové, že

$$\vec{B} \;=\; \mathrm{rot}\,\vec{A}\,. \tag{4.29}$$

Uvidíme, jestli si tím pomůžeme. Dosadíme-li do rovnice pro rotaci $\vec{B}$, dostaneme

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} \;=\; \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} \;=\; \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} \;-\; \Delta\,\vec{A} \;=\; \mu_0\,\vec{j}\,.$$

Rovnice vypadá složitě, ale můžeme využít určité volnosti ve volbě vektorového potenciálu. Můžeme ho totiž zvolit tak, aby jeho divergence měla libovolnou zadanou hodnotu, byla například nulová. [24] Tato podmínka se nazývá *cejchovací* nebo *kalibrační*.

Bude-li $\mathrm{div}\,\vec{A} \;=\; 0$, zjednoduší se rovnice pro vektorový potenciál na

$$\Delta\vec{A} \;=\; -\,\mu_0\,\vec{j}\,. \tag{4.30}$$

To je vektorová Laplaceova - Poissonova rovnice zcela analogická rovnici (2.13). Analogie mezi skalárním potenciálem φ a vektorovým potenciálem $\vec{A}$ tak vyniká.

Řešení rovnice (4.30) můžeme napsat okamžitě podle analogie s řešením pro elektrostatický potenciál (2.20). Máme

$$\vec{A} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(x',y',z')\;dV}{R} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\int_l \frac{d\vec{l}}{R}\,. \tag{4.31}$$

Známe-li vektorový potenciál, určíme magnetickou indukci jako

$$\vec{B} \;=\; \mathrm{rot}\,\vec{A} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathrm{rot}\left(\frac{\vec{j}}{R}\right)\,dV \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{j}\;dV \;=$$

$$=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\times\vec{R}}{R^3}\,dV \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\int_l \frac{d\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}\,.$$

(Při úpravě jsme prováděli operaci rotace podle nečárkovaných souřadnic x, y, z, a proto jsme považovali $\vec{j}$ za konstantní vektor. Použili jsme poslední ze vzorců (M.23). Při výpočtu gradientu $1/R$ jsme postupovali jako u složené funkce; $R = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$.)

Výsledek, který jsme získali představuje již známý Biotův - Savartův zákon (4.14).

Protéká-li proud o lineární hustotě $\vec{\alpha}$ po ploše, budeme mít analogicky (4.31) a (4.14)

$$\vec{A} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{\alpha}}{R}\,dS \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\int_l \frac{d\vec{l}}{R}$$

$$\vec{B} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\alpha\times\vec{R}}{R^3}dS \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\int_S \frac{d\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}\,. \tag{4.32}$$

Obecně lze dokázat:

[24] Zdůvodnění je následující. Nechť $\mathrm{div}\vec{A} = f$. Pokusíme se přejít k novému vektorovému potenciálu $\vec{A}'$ takovému, aby platilo $\mathrm{div}\vec{A}' = 0$ a zároveň $\mathrm{rot}\vec{A}' = \vec{B}$. K tomu stačí přičíst k potenciálu $\vec{A}$ potenciál $\vec{A}''$, který vyhovuje rovnicím $\mathrm{rot}\vec{A}'' = 0$, $\mathrm{div}\vec{A}'' = -f$. Potom $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{A}''$ splňuje požadované vlastnosti. Je pouze otázka, zda vektorovou funkci $\vec{A}''$ lze najít, tj. zda rovnice pro ni mají řešení. Tyto rovnice jsou však formálně shodné s rovnicemi pro vektor stacionárního elektrického pole, kde položíme $f = -\rho/\varepsilon_0$. O existenci elektrického pole pak fyzik nepochybuje.

1. Je-li vektorová funkce $\vec{j}$ konečná a dostatečně hladká ve vnitřních bodech proudového objemu V, bude magnetická indukce *všude* konečná a spojitá. Vektorový potenciál $\vec{A}$ bude mít navíc i parciální derivace alespoň prvního řádu.

2. Na proudových plochách není magnetická indukce definována a vektorový potenciál zde nemá derivaci. Při průchodu touto plochou zůstávají normálové složky magnetické indukce spojité, zatímco tečné se mění skokem o $\mu_0\alpha$.

Uvedené hraniční podmínky na proudové ploše snadno získáme z věty o neexistenci magnetického náboje a Ampérova zákona. Obklopíme-li proudovou plochu těsně přiléhajícím válcem s osou kolmou k ploše, bude indukční tok válcovou plochou nulový a pro normálové složky na obou stranách plochy máme

$$\text{Div } \vec{B} = B_{1n} - B_{2n} = 0 \quad . \tag{4.33}$$

Necháme-li podél roviny probíhat obdélníkovou smyčku tak, že delší strany l obdélníka vedou těsně po obou stranách roviny a kratší strany jsou zanedbatelné, bude smyčkou obepínaný proud $\mu_0\alpha l$, a tak

$$\text{Rot } \vec{B} = \mu_0\vec{\alpha}, \qquad |\text{Rot } \vec{B}| = B_{1t} - B_{2t} = \mu_0\alpha \, . \tag{4.34}$$

Shrneme způsoby výpočtu magnetické indukce různých proudových konfigurací. Můžeme k tomu použít princip superpozice příspěvků jednotlivých proudových elementů. Přitom můžeme integrovat buď vektorové potenciály (což je jednodušší) a pak najít magnetickou indukci ze vztahu (4.29), nebo můžeme přímo integrovat magnetickou indukci pomocí Biotova - Savartova zákona. Pokud je rozložení proudů symetrické, může být výhodnější použít Ampérův zákon. V případě nepravidelného uspořádání proudů v nějakém malém objemu můžeme podobně jako u elektrického pole rozložit magnetickou indukci na velkých vzdálenostech do řady magnetických multipólů a omezit se na člen nejnižšího řádu, magnetický dipól (magnetický náboj, monopól neexistuje). O této metodě pojednáme v následujícím odstavci.

Představme si nyní, že vložíme proudovou rovinu do vnějšího magnetického pole $\vec{B}_0$ rovnoběžného s rovinou a kolmého ke směru plošného proudu (obr. 4.19). Pole plošného proudu se pak bude superponovat s vnějším polem a po stranách roviny budeme mít

$$B_1 = B_0 + \frac{\mu_0\alpha}{2}\,, \quad B_2 = B_0 - \frac{\mu_0\alpha}{2}\,,$$

odkud

$$B_1 - B_2 = \mu_0\alpha\,, \quad B_1 + B_2 = 2\,B_0\,.$$

Vyčleníme-li v rovině proudový pás šířky h, a v něm element délky $d\vec{l}$, bude na něj vnější pole působit silou kolmou k rovině (tlakovou silou) o velikosti

$$dF = |I\,d\vec{l} \times \vec{B}_0| = \alpha\,h\,dl\,B_0 = \alpha\,B_0\,dS\,,$$

takže na rovinu bude působit výsledný *magnetický tlak*

$$p_m = \frac{dF}{dS} = \alpha B_0 = \frac{1}{2\mu_0}\,(B_1 - B_2)\,(B_1 + B_2) = \frac{B_1^2}{2\mu_0} - \frac{B_2^2}{2\mu_0}\,.$$

Tento výsledek můžeme zřejmě považovat za výsledný tlak působící s obou stran roviny.

Magnetické pole tedy vyvíjí tlak na plošné proudy, a to

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0}\,. \tag{4.35}$$

S magnetickým tlakem se musí počítat v magnetické hydrodynamice při proudění vodivých kapalin (rtuti, roztavených alkalických kovů při chlazení aktivní zony rychlých reaktorů, plazmatu apod.) V těchto případech se magnetický tlak superponuje s tlakem hydrodynamickým.

Situace je zde podobná, jako u mechanického napětí, které vyvíjí elektrostatické pole na nabité plochy. Vykoná-li magnetická tlaková síla práci, stane se tak na úkor energie nahromaděné v magnetickém poli. Naopak mechanickou silou působící na proudové plochy můžeme zvětšovat energii magnetického pole a tím vlastně magnetické pole vytvářet (tzv. magnetické dynamo). [25]

Podobně jako u elektrického pole je i magnetický tlak roven objemové hustotě energie magnetického pole:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} . \tag{4.36}$$

Vezmeme-li v úvahu (2.19), můžeme pro celkovou hustotu energie elektromagnetického pole napsat:

$$w = w_e + w_m = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} . \tag{4.37}$$

Relativistický výklad síly působící mezi dvěma proudy

Odvodili jsme sílu (4.27), která působí mezi dvěma přímými rovnoběžnými vodiči protékanými proudem a ukázali, že jsou-li proudy rovnoběžné souhlasně, vodiče se přitahují. Původ této síly můžeme také vyložit na základě poznatků speciální teorie relativity.

Uvažme napřed dva rovnoběžné nábojové paprsky, tj. náboje téhož znamení rozložené s lineární hustotou τ na dvou rovnoběžných přímkách ve vzdálenosti r, a pohybující se v témž směru touž rychlostí v. Intenzita pole vytvářeného lineárním nábojem se určuje podle Gaussova zákona a bude mít proto stejný tvar bez ohledu na to, zda se náboje pohybují či nikoli. Změní se ovšem lineární hustota nábojů vzhledem k efektu kontrakce délek; bude-li v soustavě S' pohybující se spolu s náboji lineární hustota τ' a v laboratorní soustavě hustota τ, bude mezi nimi platit vztah $\tau' = \tau/\gamma$. Určíme nyní sílu, kterou působí jeden paprsek na jednotku délky druhého. Ukazuje se, že příčná složka síly $F_\perp$ na jednotku délky je stejná v nehybné i pohybující se soustavě. Transformuje se totiž

$$l' = \gamma\, l, \quad t' = \frac{t}{\gamma}, \quad F'_\perp = \frac{dp'_\perp}{dt'} = \gamma\, \frac{dp_\perp}{dt} = \gamma F_\perp .$$

Síla na jednotku délky je tedy

$$F'_l = \frac{F'_\perp}{l'} = \frac{\gamma\, F_\perp}{\gamma\, l} = F_l .$$

V pohybující se vztažné soustavě jsou náboje nehybné a působí na ně jen elektrická síla na jednotku délky:

$$F'_l = \frac{\tau'^2}{2\pi\, \varepsilon_0\, r} .$$

Přejdeme-li do laboratorní soustavy, dostaneme

$$F_l = F'_l = \frac{1}{\gamma^2}\, \frac{\tau^2}{2\pi\, \varepsilon_0\, r} = \frac{\tau^2}{2\pi\, \varepsilon_0\, r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) .$$

První člen na pravé straně je elektrická odpudivá síla, která působí mezi nehybnými lineárními náboji. Pohybují-li se náboje (čímž vzniknou dva lineární proudy), bude mezi nimi působit ještě další, *přitažlivá* síla vyjádřená druhým členem. Tato síla je ovšem druhého řádu vzhledem k v/c a pokud se náboje nepohybují relativistickými rychlostmi, lze ji zanedbat.

Jiná situace nastane, poteče-li proud dvěma rovnoběžnými, nenabitými vodiči. Pomineme-li chaotický tepelný pohyb částic, můžeme v laboratorní soustavě považovat kladné i záporné náboje ve vodiči (ionty

[25] Tímto způsobem se vysvětluje vznik magnetických polí v kosmickém prostoru. Magnetické indukční čáry jsou ve vodivé látce (plazmatu) jakoby vmraženy, pohybují se spolu s ní a při gravitačním stlačování látky roste také hustota indukčních čar a tím i magnetické pole.

obr. 4.20

a elektrony) za nehybné a vyrovnané (s lineárními hustotami $\tau > 0$ a $-\tau$ o téže absolutní velikosti). Není proto důvodu, aby mezi dvěma měděnými dráty, kterými neteče proud, působila nějaká síla. Předpokládejme nyní, že vodiči začnou protékat proudy souhlasným směrem, a to proto, že se elektrony dají do pohybu uspořádanou rychlostí v (viz obr. 4.20). V důsledku efektu kontrakce délek se nyní změní lineární hustoty pohybujících se elektronů. Drát, jímž teče proud se stane nabitým. Vzhledem k nepatrným rychlostem elektronů ve vodičích bude tento náboj ovšem velmi malý. Oba vodiče se nabijí náboji se stejným znaménkem a měly by se (nepatrně) *odpuzovat*. Experiment nám ovšem říká, že se *přitahují*, a to takovou silou, že je na ní možno založit konstrukci elektrických strojů. Kde se bere tato přitažlivá síla?

Lineární hustota náboje prvního vodiče, jímž protéká proud, bude $\tau - \gamma\,\tau$. Ten bude působit na nehybné ionty druhého vodiče silou na jednotku délky

$$F_{l+} \;=\; \frac{(\tau - \gamma\tau)\;\tau}{2\pi\;\varepsilon_0\;r} \;=\; \frac{\tau^2\;(1-\gamma)}{2\pi\;\varepsilon_0\;r}$$

Abychom určili sílu působící na *pohybující* se elektrony druhého vodiče, musíme přejít do soustavy, v níž jsou tyto elektrony v klidu a pak přetranformovat výsledek do laboratorní soustavy:

$$F_{l-} \;=\; F'_{l-} \;=\; \frac{(\gamma\;\tau - \tau)\;(-\tau)}{2\pi\;\varepsilon_0\;r} \;=\; \frac{\tau^2\;(1-\gamma)}{2\pi\;\varepsilon_0\;r}\;.$$

Síla působící v laboratorní soustavě na ionty i elektrony druhého vodiče je tedy stejná. Výsledná síla je pak rovna

$$F_l \;=\; 2\;\frac{\tau^2\;(1-\gamma)}{2\pi\;\varepsilon_0\;r} \;=\; \frac{\tau^2}{2\pi\;\varepsilon_0\;r}\;[\;2\;(1-\gamma)\;-\;(1-\gamma)^2\;+\;(1-\gamma)^2\;]\;=$$

$$=\;\frac{\tau^2}{2\pi\;\varepsilon_0\;r}\;[\;(1-\gamma^2)\;+\;(1-\gamma)^2\;]\;=\;-\;\frac{\gamma^2\;\tau^2\;v^2}{2\pi\;\varepsilon_0\;c^2\;r}\;+\;\frac{(1-\gamma)^2\tau^2}{2\pi\;\varepsilon_0\;r}\;.$$

Protože $\gamma\tau v \;=\; I$, představuje první člen na pravé straně přitažlivou sílu o velikosti

$$F_{lm} \;=\; \frac{\mu_0\;I^2}{2\pi\;r}\;.$$

Tuto sílu nazýváme magnetickou a odpovídá přesně Ampérově síle (4.27). STR tak vysvětluje experimentální fakt, že se dva vodiče protékané souhlasnými proudy přitahují a naopak tento fakt je významným potvrzením teorie relativity. Může přitom překvapovat, že vlastně celá elektrotechnika je založena na relativistických efektech druhého řádu v/c, přestože se částice vůbec nepohybují relativistickými rychlostmi. Ve výrazu pro sílu jsme našli ještě druhý člen, který představuje slabou odpudivou elektrickou sílu

$$F_{le} \;=\; \frac{(1-\gamma)^2\;\tau^2}{2\pi\;\varepsilon_0\;r} \;\approx\; \frac{v^2}{c^2}\frac{\mu_0\;I^2}{8\pi\;r}\;.$$

Je tedy čtvrtého řádu v/c vzhledem k elektrickým silám, které by působily, kdyby náboje ve vodičích nebyly vykompenzovány a druhého řádu vzhledem k silám magnetickým. Můžeme ji samozřejmě zanedbat.

obr. 4.21 obr. 4.22

Dále uvedeme výpočet magnetické indukce a magnetických sil působících na některé symetrické proudové konfigurace.

1. Magnetické pole přímého a rovinného vodiče

Mějme nekonečný přímý vodič protékaný proudem I. Víme, že ve svém okolí vytváří magnetické pole, jehož vektor leží v rovině kolmé k vodiči, je tečný ke kružnicím se středem na vodiči a je orientován podle pravidla pravotočivého šroubu. Velikost magnetické indukce můžeme najít integrováním podle Biotova - Savartova zákona. Pro úsek vodiče konečné délky máme výsledek (4.15), který pro nekonečný vodič přechází v (4.16). Mohli bychom též integrovat vektorový potenciál a podle analogie se skalárním potenciálem přímkového náboje bychom dostali

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r \;\; \vec{x}_0 \, .$$

Vektorový potenciál míří ve směru vodiče a není určen jednoznačně. Pomocí operace rotace bychom z něho opět dostali výraz pro magnetickou indukci.

Pro nekonečný vodič můžeme však také použít Ampérův zákon aplikovaný na kružnici obepínající vodič. Pak dostaneme

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\,\pi\, r\, B = \mu_0\, I \; ,$$

odkud okamžitě plyne (4.16).

Je-li nekonečný vodič konečné tloušťky R, potom použitím Ampérova zákona dostaneme cirkulaci magnetické indukce podél kružnice o poloměru $r < R$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\, \pi r^2\, j \; ,$$

odkud

$$B = \frac{\mu_0\, j\, r}{2} = \frac{\mu_0\, I\, r}{2\pi\, R^2} .$$

Magnetická indukce uvnitř vodiče s konstantní proudovou hustotou $\vec{j}$ tedy závisí přímo úměrně na poloměru, jak je vidět na obr. 4.21.

Také k určení magnetické indukce plošného proudu protékajího po rovinné desce s lineární hustotou α lze použít Ampérova zákona. Vyjdeme z předpokladu, že vektor magnetické indukce je rovnoběžný s deskou a kolmý ke směru proudu a zvolíme uzavřenou křivku jako na obr. 4.22.

K cirkulaci zřejmě přispívají jen úseky rovnoběžné s deskou, takže

$$2\, B\, l = \mu_0\, \alpha\, l, \quad \text{odkud} \quad B = \frac{\mu_0\, \alpha}{2} \, .$$

obr. 4.23 obr. 4.24

2. Magnetické pole kruhové smyčky

Určíme magnetické pole na ose kruhové smyčky protékané proudem I (v jiných bodech prostoru je to obtížné). Přitom zanedbáme pole proudu v přívodech ke smyčce. Použijeme Biotova - Savartova zákona a budeme sčítat příspěvky od dvojic protilehlých proudových elementů $I\ d\vec{l}_1,\ \ I\ d\vec{l}_2$ na obr. 4.23. Příspěvky takových dvojic budou zřejmě vždy mířit ve směru osy z v pravotočivém směru. Jejich velikost je

$$dB \ = \ 2\ \frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{I\ dl}{R^2}\ \cos\theta, \qquad \cos\theta \ = \ \frac{r}{R}$$

kde r je poloměr smyčky a R délka průvodiče. Integrací podél polokružnice dostaneme

$$B \ = \ \frac{\mu_0}{2\pi}\ \frac{I\ r}{R^3}\ \int_0^{\pi r}\ dl \ = \ \frac{\mu_0\ I}{2}\ \frac{r^2}{(r^2\ +\ z^2)^{3/2}}\ .$$

Maximální hodnota magnetické indukce je ve středu smyčky ve výšce $z = 0$, a to

$$B(0) \ = \ \frac{\mu_0\ I}{2\ r}\ .$$

Je zajímavé srovnat průběh magnetické indukce na ose na obr. 4.24 s průběhem intenzity elektrického pole nabité kružnice na obr. 2.15.

3. Magnetické pole solenoidu a toroidu

Pod solenoidem rozumíme cívku s hustě navinutým drátem, jímž protéká proud. Nechť poloměr solenoidu je r a délka L, celkový počet závitů N a počet závitů na jednotku délky n. Potom můžeme rozdělit solenoid na krátké úseky délky dl a považovat je za kruhové proudy $n\ I\ dl$ (obr. 4.25).

Abychom určili magnetickou indukce kdekoli na ose solenoidu, stačí sečíst příspěvky takových kruhových proudů. Je-li l vzdálenost bodu na ose od kruhového proudu a α úhel pod nímž je vidět okraj kružnice z bodu na ose a R délka průvodiče, platí $l = r\ \mathrm{cotg}\ \alpha,\ \ dl = -r\ d\alpha/\sin^2\ \alpha, R = r/\sin\ \alpha$, a tedy

$$dB \ = \ \frac{\mu_0\ I\ n\ dl}{2}\ \frac{r^2}{R^3} \ = \ -\ \frac{\mu_0\ I\ n}{2}\ \sin\alpha\ d\alpha, \qquad \text{a}$$

obr. 4.25

obr. 4.26

$$B \;=\; -\;\frac{\mu_0\; I\; n}{2}\;\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\; \sin\alpha\; d\alpha \;=\; \frac{\mu_0\; I\; n}{2}\;(\cos\;\;\alpha_1\;-\;\cos\alpha_2)\;.$$

Průběh indukce na ose konečného solenoidu vidíme na obr. 4.26; v centrální oblasti je konstantní, na koncích se projevují okrajové efekty a indukční čáry se zakřivují. Pokud závity nebudou hustě navinuty, bude průběh pole zvlněn. Solenoid můžeme považovat též za válcovou plochu, po jejímž plášti protéká plošný proud.

Je-li solenoid nekonečný, dosadíme $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi$ a dostaneme

$$B \;=\; \mu_0\; I\; n$$

Tentýž výsledek bychom dostali z Ampérova zákona, kdybychom zvolili obdélníkovou integrační křivku jako na obr. 4.27. Z důvodu symetrie musí být pole rovnoběžné s osou, takže příčné úseky 2 a 4 k cirkulaci nepřispívají. Je-li úsek 1 na ose fixován, potom pole vně solenoidu musí být konstantní. Měníme-li totiž křivku tak, že posouváme vnější stranu 3 dále od solenoidu, obepíná křivka stále týž proud ILn. Vnější pole by ovšem muselo klesat se vzdáleností od osy válce a tak nezbývá, než aby bylo všude nulové. Odtud však plyne, že úsek 1 může být umístěn nejen na ose, ale v libovolné vzdálenosti od ní a vždy dostaneme indukci $B = \mu_0 In$. *Pole uvnitř nekonečného solenoidu je homogenní!.*

Toroid můžeme považovat za solenoid stočený do prstence. Má výhodu, že se u něho neprojevují okrajové efekty a nevýhodu, že pole už není homogenní. Jsou-li vnitřní a vnější poloměr toroidu $R_1,\; R_2$, bude podle Ampérova zákona pole v toroidu na kružnici o poloměru r dáno z $2\pi r B = \mu_0 I N$ jako

$$B \;=\; \frac{\mu_0\; I\; N}{2\pi\; r}\;.$$

obr. 4.27 obr. 4.28

Je-li toroid tenký a rozdíl mezi jeho vnitřním a vnějším poloměrem malý, bude v něm pole přibližně homogenní a rovné poli solenoidu. Odvozené výsledky pro solenoid a toroid nezávisejí na tvaru jejich průřezu.

3. Síla a moment síly působící na proudovou smyčku v magnetickém poli

Na rovinnou proudovou smyčku l plochy ΔS protékanou proudem I působí v magnetickém poli síla $\vec{F}$ a moment síly $\vec{M}$

$$\vec{F} = I \oint_l d\vec{l} \times \vec{B}, \qquad \vec{M} = \oint_l \vec{r} \times d\vec{F} = I \oint_l \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) .$$

Vynásobíme-li integrál pro sílu skalárně konstantním vektorem $\vec{c}$, dostaneme

$$\vec{c} \cdot \oint_l d\vec{l} \times \vec{B} = - \oint_l (\vec{c} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \int_{\Delta S} \mathrm{rot} (\vec{c} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S} (\vec{c} \nabla) \vec{B} \cdot d\vec{S} ,$$

Budou-li se parciální derivace $\vec{B}$ v ploše smyčky málo měnit (například bude-li smyčka malá) a zavedeme-li Ampérův magnetický moment smyčky $\vec{m} = I\Delta\vec{S}$, dostaneme

$$\vec{c} \cdot \vec{F} = \vec{m} \cdot (\vec{c} \nabla) \vec{B} .$$

Protože rotace $\vec{B}$ v ploše smyčky je nulová, platí

$$\vec{m} \cdot (\vec{c} \nabla) \vec{B} = \vec{c} \cdot (\vec{m} \nabla) \vec{B} .$$

Na smyčku proto působí síla

$$\vec{F} = (\vec{m} \nabla) \vec{B} = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B}) ,$$

analogická síle působící na elektrický dipól v nehomogenním elektrickém poli (2.39).

Bude-li magnetické pole homogenní, budou derivace $\vec{B}$ nulové a výsledná síla bude nulová. Budou však působit síly, které se budou snažit smyčku deformovat.

Pokud jde o moment síly, bude působit i v homogenním poli. Máme

$$\vec{M} = I \oint_l \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) = I \oint_l (\vec{B} \cdot \vec{r}) \, d\vec{l} - I \oint_l \vec{B} (\vec{r} \cdot d\vec{l}) .$$

Druhý integrál je roven nule (vytkneme konstantní $\vec{B}$ a použijeme Stokesovu větu). První integrál opět vynásobíme skalárně konstantním vektorem $\vec{c}$:

$$\vec{c} \cdot \oint_l (\vec{B} \cdot \vec{r}) \, d\vec{l} = \int_{\Delta S} \mathrm{rot} \, [(\vec{B} \cdot \vec{r}) \, \vec{c} \,] \cdot d\vec{S} = - \int_{\Delta S} [\, \vec{c} \times \mathrm{grad} (\vec{B} \cdot \vec{r}) \,] \cdot d\vec{S} =$$

$$= - \int_{\Delta S} (\vec{c} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = -\vec{c} \cdot \int_{\Delta S} \vec{B} \times d\vec{S} ,$$

a tedy

$$\vec{M} \;=\; -\,I\,\int_{\Delta S} \vec{B}\times d\vec{S} \;=\; -\,I\,\vec{B}\times\int_{\Delta S} d\vec{S} \;=\; I\,\Delta\vec{S}\times\vec{B} \;=\; \vec{m}\times\vec{B}\,,$$

Moment síly je opět analogický momentu (2.37) působícímu na elektrický dipól v elektrickém poli a snaží se natočit proudovou smyčku tak, aby její vlastní magnetické pole bylo souhlasně rovnoběžné s vnějším polem $\vec{B}$.

3. Magnetický dipól a vektor magnetizace

Podobně jako jsme zkoumali elektrické pole náboje obecně rozloženého v objemu V můžeme zkoumat i magnetické pole malého proudového objemu nebo malé smyčky na velkých vzdálenostech. Mějme objem V, v němž se uzavírají proudy s rozložené s hustotou $\vec{j}$. V teorii elektromagnetického pole se ukazuje, že vektorový potenciál na vzdálenostech mnohem větších než jsou rozměry tohoto objemu můžeme opět jednoznačně rozložit do řady magnetických multipólů jako

$$\vec{A} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\;dV}{R} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_V \vec{j}\;dV \;+\; \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\vec{m}\times\vec{r} \;+\;\cdots\,, \tag{4.38}$$

kde

$$\vec{m} \;=\; \frac{1}{2}\int_V (\;\vec{r}'\times\vec{j}\;)\;dV\,. \tag{4.39}$$

Zde opět $\vec{R}$ představuje vektor průvodiče, $\vec{r}$ je polohový vektor bodu, v němž potenciál určujeme a $\vec{r}'$ probíhá objem V. První člen v rozvoji (4.38) je roven nule, vzhledem k tomu, že proudy jsou v objemu uzavřeny a tento fakt vyjadřuje neexistenci magnetického monopólu. Druhý člen je příspěvek magnetického dipólu, přičemž *magnetický dipólový moment* je definován vztahem (4.39). Vyšší magnetické multipóly jsou méně významné.

Obyčejně pod magnetickým dipólem rozumíme malou (a proto rovinnou) proudovou smyčku plochy ΔS protékanou proudem I. Zvolíme-li počátek souřadnic uvnitř plochy této smyčky, přejde definice dipólového momentu na

$$\vec{m} \;=\; \frac{1}{2}\int_V (\vec{r}'\times\vec{j}\;)\;dV \;=\; \frac{1}{2}\,I\int_l \vec{r}'\times d\vec{l} \;=\; I\,\Delta\,\vec{S}\,. \tag{4.40}$$

Vektorový potenciál magnetického dipólu můžeme dostat také přímo integrací podél smyčky s použitím věty (M.47):

$$\vec{A} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\oint_l \frac{d\vec{l}}{R} \;=\; -\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,I\int_{\Delta S}\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times d\vec{S} \;=$$

$$=\;\frac{\mu_0}{4\pi}\,I\int_{\Delta S}\frac{d\vec{S}\times\vec{R}}{R^3} \;\approx\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{\Delta S\times\vec{r}}{r^3} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\,.$$

Magnetickou indukci dipólu najdeme jako

$$\vec{B} \;=\; \mathrm{rot}\,\vec{A} \;=\; -\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,(\;\vec{m}\,\nabla\;)\,\frac{\vec{r}}{r^3} \;=\; -\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,\nabla\,\frac{\vec{m}\;\cdot\;\vec{r}}{r^3}\,. \tag{4.41}$$

Tento výraz má matematicky stejný tvar jako výraz pro gradient potenciálu elektrického dipólu (2.31), a proto můžeme magnetickou indukci psát podle (2.33) jako

$$\vec{B} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\;(\vec{m}\;\cdot\;\vec{r}\;)\;\vec{r}}{r^5} \;-\; \frac{\vec{m}}{r^3}\right]. \tag{4.42}$$

obr. 4.29

Průběh siločar elektrického a magnetického dipólu na velkých vzdálenostech je skutečně shodný, jak je vidět z obr. 4.29. [26]

Magnetický dipól, jehož pole je dáno přesně vztahem (4.41) nazýváme podobně jako u elektrického dipólu bodovým, tj. zanedbáváme rozměry smyčky Vzhledem k formální shodnosti s polem elektrického dipólu můžeme převzít i vztahy pro sílu, moment silové dvojice a energii magnetického dipólu ve vnějším magnetickém poli:

$$\vec{F} \;=\; (\vec{m}\nabla)\; \vec{B}, \quad \vec{D} \;=\; \vec{m} \times \vec{B}, \quad W \;=\; -\; \vec{m}\; \cdot\; \vec{B}\;. \tag{4.43}$$

Silový moment se snaží natáčet magnetický dipól do směru pole a nehomogenní magnetické pole pak vtahuje takto orientovaný dipól do oblast silnějšího pole, kde je větší hustota indukčních čar. Existuje však jeden podstatný rozdíl od chování elektrických dipólů, který má vztah k elektromagnetické indukci. Je-li magetický dipól *indukován* vnějším polem, je orientován *proti směru pole* (!), jak uvidíme později. Takový dipól je pak z oblasti silnějšího pole *vytlačován*.

Obíhá-li nabitá částice hmotnosti m a náboje q rovnoměrně po kružnici, vytváří smyčkový proud $I = qv/2\pi r$ a její magnetický dipólový moment (budeme ho pro tuto chvíli označovat μ) má velikost

$$\mu \;=\; I\; \Delta S \;=\; \frac{q\; v}{2\pi\; r}\; \pi\; r^2 \;=\; \frac{1}{2}\; q\; r\; v \;=\; \frac{1}{2}\; \frac{q}{m}\; m\; v \;=\; \gamma l\;. \tag{4.44}$$

Zde l představuje velikost momentu hybnosti částice a γ nazýváme *gyromagnetický poměr*:

$$\gamma \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{q}{m} \;=\; \frac{\mu}{l}\;. \tag{4.45}$$

Magnetický moment a moment hybnosti jsou tedy spolu vázány. Z kvantové mechaniky je známo, že moment hybnosti orbitálního pohybu elektronu v atomu je kvantován a jeho projekce v daném směru může nabývat jen násobků nejmenší hodnoty Planckovy konstanty $\hbar = 1,054.10^{-34}$J.s. Proto i magnetický orbitální moment elektronu je kvantován a může nabývat pouze celých násobků hodnoty

$$\mu_B \;=\; \frac{1}{2}\; \frac{e}{m_e}\; \hbar \;=\; 9,273.10^{-24}\ \mathrm{A.m}^2\;. \tag{4.46}$$

Tato hodnota se nazývá *Bohrův magneton* a ukazuje na řádovou velikost magnetických dipólových momentů atomů. V roce 1915 provedli A. Einstein a W.J.de Haas známý *Einsteinův - de Haasův* experiment k určení gyromagnetického poměru částic magnetika. Zavěsíme-li ferromagnetický válec ve vnějším

[26] Magnetický dipólový moment definovaný vztahem (4.40) se nazývá *Ampérův* nebo proudový. Vedle toho lze formálně definovat takzvaný *Coulombův magnetický moment* s použitím představy o magnetickém náboji a Coulombova zákona pro magnetické síly mezi dvěma póly dlouhých tyčových magnetů:

$$F \;=\; \frac{1}{4\pi\;\mu_0}\;\frac{q_{m1}\;q_{m2}}{r^2}\;.$$

Jsou-li severní a jižní magnetický pól pak odděleny vektorem $\vec{l}$, bude Coulombův magnetický moment $\vec{m}_C = q_m\; \vec{l}$. Ukáže se, že jeho vztah k Ampérovu magnetickému momentu je prostě $\vec{m}_C = \mu_0\; \vec{m}$.

magnetickém poli a změníme náhle polaritu tohoto pole, musí se válec pootočit, protože se změní jeho moment hybnosti.

Tímto způsobem byl změřen gyromagnetický poměr elektronů, který se však ukázal být roven $\gamma = e/m_e$ a nikoli (4.45) ! Později se vyjasnilo, že ferromagnetismus není vyvolán orbitálním pohybem elektronů, ale jejich spiny, vlastními momenty hybnosti, které nesouvisejí s pohybem elektronů v prostoru. Jejich nejmenší hodnota je pak $\hbar/2$, takže vlastní magnetický dipólový moment elektronu je opět roven Bohrově magnetonu. Přesnější výpočet na základě kvantové elektrodynamiky dává v překvapivém souhlase s experimentem hodnotu $\mu_e = 1,00116\ \mu_B$.

Jaderné částice, protony a neutrony, mají také své magnetické dipólové momenty, které se vyjadřují v *jaderných magnetonech*

$$\mu_N \ = \ \frac{m_e}{m_p}\ \mu_B \ = \ 5,051.10^{-27}\ \mathrm{A.m^2}\ . \tag{4.47}$$

Magnetický moment protonu a neutronu není roven celému násobku jaderného magnetonu, ale $\mu_p = 2,792\ \mu_N, \quad \mu_n = -1,913\ \mu_N$.

Mějme nabité těleso náboje Q, hmotnosti M, momentu hybnosti $\vec{L}$ a momentu setrvačnosti I rotující s úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$. Jeho magnetický dipólový moment je

$$\mu \ = \ \gamma\ L \ = \ \gamma\ I\ \Omega \ = \ \frac{1}{2}\ \frac{Q}{M}\ I\ \Omega\ . \tag{4.48}$$

Známe-li tedy momenty setrvačnosti těles, můžeme přímo určit jejich magnetické momenty. Například rotující prostorově nabitá koule o momentu setrvačnosti $I = \frac{2}{5}MR^2$ bude mít magnetický dipólový moment

$$\mu \ = \ \frac{1}{5}\ Q\ \Omega\ R^2\ . \tag{4.49}$$

Pro povrchově nabitou kouli bude v (4.49) koeficient 1/3, pro objemově nabitý válec 1/4 atd.

Pro studium magnetických vlastností látek je důležité znát velikosti a chování magnetických momentů atomů a molekul. Vedle vlastních magnetických momentů atomů, které jsou řádově rovny Bohrovu magnetonu, vznikají po vložení látky do vnějšího magnetického pole momenty indukované. Magnetické pole bude na vlastní momenty působit silovým momentem, který vyvolá změnu momentu hybnosti:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}\ .$$

Pomocí gyromagnetického poměru můžeme tuto rovnici přepsat na

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} \ = \ \gamma\ (\vec{\mu} \times \vec{B})\ . \tag{4.50}$$

Tato rovnice popisuje precesní pohyb vektoru magnetického dipólového momentu kolem směru vnějšího magnetického pole s úhlovou frekvencí

$$\vec{\omega}_L \ = \ -\ \gamma\ \vec{B} \tag{4.51}$$

(takzvaná *Larmorova frekvence*). Precese zmenší střední hodnotu momentu hybnosti a tím i magnetického momentu částice. Koná-li například elektron kruhový pohyb v rovině svírající se směrem magnetického pole určitý úhel a je-li $< \rho^2 >$ střední kvadratický poloměr průmětu dráhy do roviny kolmé ke směru pole, zmenší se díky Larmorově precesi moment hybnosti o $\Delta l_L = m_e < \rho^2 > \omega_L$. To je ekvivalentní vzniku indukovaného magnetického momentu

$$\vec{\mu}_{ind} \ = \ \gamma\Delta\vec{l}_L \ = \ -\ \frac{e^2}{4m_e} < \rho^2 > \vec{B} \ = \ -\beta\vec{B}. \tag{4.52}$$

Tento výraz můžeme srovnat s indukovaným elektrickým dipólovým momentem (2.40). V atomu se Z elektrony musíme ovšem jednotlivé momenty sčítat. Pro kulově symetrický atom obyčejně uvádíme střední kvadratickou hodnotu poloměru dráhy elektronů $< r_0^2 >$ a pak dostáváme indukovaný moment atomu jako

$$\vec{\mu}_{indA} \ = \ -\ \frac{e^2\ Z < r_0^2 >}{6m_e}\ \vec{B}\ . \tag{4.53}$$

obr. 4.30

Hodnota $< \rho_0^2 >$, kterou je třeba ovšem určovat metodami kvantové fyziky, je řádově rovna rozměru atomu, 10^{-10} m.

Podobně jako u elektrických dipólů můžeme uvažovat spojité prostorové či plošné rozložení magnetických dipólů. Jsou-li v nějakém objemu magnetické dipólové momenty o koncentraci N všechny souhlasně orientovány, můžeme zavést vektor $\vec{M} = N\,\vec{m}$, který nazýváme *vektorem magnetizace*. Ten obecně (tj. i když momenty nejsou všechny stejně orientovány) představuje magnetický dipólový moment jednotky objemu. [27]. Objem s nenulovým vektorem magnetizace nazýváme *magnetizovaným*. Magnetizace se zřejmě měří v jednotkách ampér na metr.

Určíme vektorový potenciál magnetického pole buzeného v bodě o polohovém vektoru $\vec{r}$ magnetizovaným objemem s vektorem magnetizace $\vec{M}(\vec{r}')$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}')\times\vec{R}}{R^3}\,dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\int_V \mathrm{rot}'\left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R}\right)dV + \int_V \frac{\mathrm{rot}'\,\vec{M}(\vec{r}')}{R}\,dV\right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}')\times d\vec{S}}{R} + \int_V \frac{\mathrm{rot}'\,\vec{M}(\vec{r}')}{R}\,dV\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint_S \frac{\vec{\alpha}_m(\vec{r}')\,dS}{R} + \int_V \frac{\vec{j}_m(\vec{r}')\,dV}{R}\right],$$

kde pod rot' se rozumí rotace derivovaná podle proměnné $\vec{r}'$. Výsledný potenciál je tedy ekvivalentní potenciálu pole buzeného plošným proudem hustoty $\vec{\alpha}_m$ vázaným na povrch tělesa a objemovým proudem hustoty $\vec{j}_m$ vázaným uvnitř tělesa (tzv. magnetizační proudy), kde

$$\vec{\alpha}_m = \vec{M}\times\vec{n}, \qquad \vec{j}_m = \mathrm{rot}\,\vec{M} \tag{4.54}$$

($\vec{n}$ je jednotkový vektor normály k povrchu tělesa).

Magnetizovaný objem se tedy chová jako určité ekvivalentní rozdělení plošných a objemových proudů. Je-li v daném objemu vektor magnetizace konstantní, bude takový objem vytvářet pole totožné s polem plošného proudu na povrchu. Mějme například objem ve tvaru kolmého válce s vektorem magnetizace rovnoběžným s osou. Pro dostatečně dlouhý válec bude pole vně nulové a pole uvnitř bude polem solenoidu (obr. 4.30)

$$B = \mu_0\,\alpha = \mu_0\,M\,. \tag{4.55}$$

Názorně je to vidět na obr. 4.31. Smyčkové proudy dipólů se uvnitř válce vyruší a zůstane pouze obvodový proud.

Zvolme nyní válec podstavy S a malé výšky Δh (obr.4.32). Jeho celkový magnetický moment bude roven

$$\vec{m}_0 = \vec{M}\,S\,\Delta h = \vec{m}_s\,S\,, \tag{4.56}$$

kde $\vec{m}_s$ představuje plošnou hustotu magnetických dipólů. Taková nekonečně tenká válcová vrstva představuje vlastně rovinnou *magnetickou dvojvrstvu* a je ekvivalentní smyčkovému proudu I, který vytváří magnetický

[27]Nahradíme-li Ampérův magnetický moment momentem Coulombovým, nazýváme vektor $\vec{P}_m = N\vec{m}_C$ *vektorem magnetické polarizace*

obr. 4.31 obr. 4.32

moment $m_0 = I\ S$. Velikost plošné hustoty Ampérových magnetických momentů je tedy rovna $m_s = I$, Coulombových momentů $m_{Cs} = \mu_0 I$.

4. Magnetika v magnetickém poli

Magnetika budeme považovat za tělesa tvořená elementárními magnetickými dipóly; tyto dipóly mohou být jak vlastní, tak indukované. Vedle volných proudů o hustotě $\vec{j}$ musíme v magnetiku tedy uvažovat i vázané, nagnetizační proudy s hustotou (4.54). Můžeme tedy psát Maxwellovu rovnici

$$\text{rot}\ \vec{B} = \mu_0\ (\ \vec{j} + \vec{j}_m\ ) = \mu_0\ (\ \vec{j} + \text{rot}\ M\ )\ .$$

Dělíme-li tuto rovnici μ_0, převedeme rot M na levou stranu a zavedeme vektor

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\ , \tag{4.57}$$

můžeme zapsat soustavu Maxwellových rovnic pro stacionární magnetické pole v magnetiku jako

$$\text{div}\ \vec{B} = 0\ , \qquad \text{rot}\ \vec{H} = \vec{j}\ . \tag{4.58}$$

Účelnost zavedení vektoru $\vec{H}$, který nazýváme *vektorem intenzity magnetického pole*, je v tom, že se pak můžeme omezit pouze na zadání proudové hustoty *volných* proudů (které se dají měřit ampérmetrem); vlastnosti vázaných magnetizačních proudů jsou již ve vektoru $\vec{H}$ obsaženy.

Tak Ampérův zákon pro cirkulaci intenzity magnetického pole bude znít

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I\ , \tag{4.59}$$

kde I je volný proud. Podle analogie s elektrickým polem nazýváme tuto cirkulaci *magnetomotorickým napětím* $\mathcal{E}_m = I$.

Je zřejmé, že na hranici dvou magnetik, tj. na ploše, kde jsou pouze vázané proudy, budou tečné složky vektoru intenzity magnetického pole spojité na rozdíl od složek magnetické indukce, které zde mají skok $\mu_0\alpha$. Naproti tomu vektor intenzity magnetického pole nemá tak obecný význam jako vektor magnetické indukce, který udává silové působení mezi proudy. Nemůžeme také například udat obecný vztah pro divergenci $\vec{H}$.

Soustava rovnic (4.58) nemá plně určené řešení a bylo by ji třeba ještě doplnit o vztah mezi vektory $\vec{H}$ a $\vec{B}$. Z definice je patrno, že tyto vektory nemusí mít obecně ani stejný směr. Vektor $\vec{M}$ může být

obr. 4.33

konstantní, nezávislý na vnějším magnetickém poli. Taková magnetika nazýváme *ideálně tvrdými* a jsou vhodné k vytváření permanentních magnetů.

Většina magnetik se však magnetizuje teprve pod vlivem vnějšího magetického pole. Pokud atomy magnetika mají vlastní magnetické dipólové momenty (takovým říkáme *paramagnetika*), budou se tyto dipóly ve vnějším magnetickém poli natáčet ve směru pole. Mluvíme o tzv. orientační magnetizaci. Pokud atomy vlastní momenty nemají, budou se v magnetickém poli indukovat. Takové látky nazýváme *diamagnetika.* Jak jsme se již zmiňovali, indukované momenty budou orientovány proti směru vnějšího magnetického pole a budou ho oslabovat. Diamagnetismus je univerzální vlastností všech látek, ovšem u paramagnetik je překryt magnetickým polem vlastních dipólů, které jsou orientovány ve směru vnějšího pole a zesilují ho. V obou případech můžeme očekávat, že pro nepříliš silná pole bude vektor magnetizace úměrný intenzitě magnetického pole (*ideálně měkká* magnetika). Potom

$$\vec{M} = \kappa \vec{H} . \tag{4.60}$$

Konstantu úměrnosti κ nazýváme *magnetickou susceptibilitou.*

Pro dostatečně silná pole pozorujeme u některých magnetik (nazývaných *feromagnetika* jev hystereze. Je obdobný jevu hystereze u feroelektrik a mohli bychom nakreslit hysterezní křivku analogickou křivce na obr. 2.32 pro závislost M na H. Na obr. 4.33 vidíme hysterezní smyčku feromagnetika pro dvě různé hodnoty maximální magnetizace M_m.

Z počátku vychází opět "panenská křivka" prvotního magnetování, která se postupně blíží nasycené hodnotě M_s. Při zpětném magnetování zůstává i při nulovém vnějším poli *remanentní magnetizace* M_r, ke zrušení magnetizace je třeba *koercitivního pole* H_c. Hodnota nasycené (též *spontánní*) magnetizace je důležitou charakteristikou feromagnetika a například pro čisté železo při pokojové teplotě se udává $\mu_0 M_s = 2,15$ Wb.m^{-2}. Feromagnetika s vysokou hodnotou koercitivního pole ($> 10^3$ A.m^{-1}) a velkou remanentní magnetizací (širokou hysterezní křivkou) se nazývají *magneticky tvrdá* a hodí se pro konstrukci permanentních magnetů. Naopak materiály s úzkou hysterezní křivkou ($H_c < 100$ A.m^{-1}) jsou *magneticky měkká* a používají se v zařízeních s proměnným magnetickým polem. K nim patří například používaná ocel Aramco.

Vraťme se k předpokladu, že mezi magnetizací a intenzitou pole platí vztah přímé úměrnosti. Potom můžeme psát

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \kappa \vec{H}) = \mu_0 (1 + \kappa) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} . \tag{4.61}$$

Vektor magnetické indukce je tedy úměrný vektoru intenzity magnetického pole s koeficientem úměrnosti μ, který nazýváme *absolutní permeabilitou* magnetika. V soustavě jednotek SI, kde byla formálně zavedena rozměrná konstanta μ_0, nazývaná permeabilitou vakua, je absolutní permeabilita součinem této konstanty a bezrozměrné tzv. *relativní permeability* magnetika μ_r. Pokud vektory magnetické indukce a intenzity pole nemají týž směr (například v krystalech nebo jiných magneticky anizotropních materiálech), bude mít permeabilita charakter tenzoru a dostaneme

$$B_i \;=\; \mu_{ik}\; H_k \;. \tag{4.62}$$

Veličina intenzita magnetického pole má v soustavě SI rozměr [H]= $\mathrm{L^{-1}I}$ a měří se v ampérech na metr. Její cirkulace (magnetomotorické napětí) se měří v ampérech, případně ampérzávitech, je-li cirkulace brána vícenásobně.

Podle (4.61) platí mezi relativní permeabilitou a magnetickou susceptibilitou vztah

$$\mu_r \;=\; 1 \;+\; \kappa \;. \tag{4.63}$$

Protože magnetická susceptibilita může být kladná i záporná, je relativní permeabilita větší nebo menší než 1.

Relativní permeabilita magnetika je důležitou makroskopickou charakteristikou jeho magnetických vlastností. Vložíme-li magnetikum do homogenního magnetického pole v solenoidu, přičte se jeho pole $\vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}$ k magnetickému poli $\vec{B}_0$ buzenému volnými proudy v cívce. Pro výsledné pole a magnetizaci můžeme psát

$$\vec{B} \;=\; \vec{B}_0 \;+\; \mu_0\; \vec{M} \;, \qquad \vec{M} \;=\; (\; \mu_r \;-1\;)\vec{H} \;. \tag{4.64}$$

Vyjádříme-li odtud výsledné pole a magnetizaci v závislosti na původním poli ve vakuu, dostaneme

$$\vec{B} \;=\; \mu_r\; \vec{B}_0 \;, \qquad \vec{M} \;=\; \frac{\mu_r - 1}{\mu_0}\; \vec{B}_0 \;. \tag{4.65}$$

Odtud je zřejmo, že magnetické pole v magnetiku je zesilováno (případně zeslabováno, je-li relativní permeabilita menší než 1) μ_r-krát. V případě nehomogenního pole můžeme vzít vždy dostatečně malý objem, v němž lze pole považovat za homogenní a vzít lokální hodnotu relativní permeability. Tak můžeme použít dosud odvozené vztahy pro magnetické silové působení ve vakuu a formálně v něm vynásobit permeabilitu vakua μ_r. Energie magnetického pole v ideálně měkkém magnetiku bude pak

$$w_m \;=\; \frac{B^2}{2\mu_r\mu_0} \;=\; \frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2} \;. \tag{4.66}$$

Z vlastností vektorů $\vec{H}$, $\vec{B}$ plynou též podmínky pro změnu jejich složek na rozhraní dvou magnetik o permeabilitách μ_1, μ_2. Na tomto rozhraní jsou plošně rozloženy pouze vázané proudy, takže tečné složky $\vec{H}$ jsou spojité. Spojitými zůstávají i normálové složky $\vec{B}$ (obr. 4.34), takže máme

$$H_{1t} \;=\; H_{2t} \;, \qquad \mu_1\; H_{1n} \;=\; \mu_2\; H_{2n} \;. \tag{4.67}$$

Dělením těchto vztahů dostáváme

$$\frac{\mathrm{tg}\;\theta_1}{\mathrm{tg}\;\theta 2} \;=\; \frac{\mu_1}{\mu_2} \;. \tag{4.68}$$

Podobně jako jsme u kondenzátoru zaváděli kapacitu jako funkci jeho geometrie a permitivity prostředí, můžeme u solenoidu definovat *indukčnost* L jako poměr indukčního toku průřezem solenoidu a protékajícího volného proudu. Má-li solenoid N závitů, musíme tok brát N-násobný:

$$L \;=\; \frac{\Phi}{I} \;, \quad \text{resp.} \qquad L \;=\; \frac{N\;\Phi}{I} \;=\; \frac{N\;B\;S}{I} \;. \tag{4.69}$$

obr. 4.34

To je takzvaná statická definice indukčnosti. Tato indukčnost je zřejmě úměrná velikosti magnetické indukce v solenoidu. Vložíme-li do solenoidu magnetikum, zvětší se pole a tedy i indukčnost μ_r-krát:

$$L = \mu_r L_0 . \tag{4.70}$$

Vkládáním různých magnetik do solenoidu a měřením změn jeho indukčnosti můžeme měřit relativní permeabilitu. Zjistíme, že existuje několik skupin magnetik a navíc permeabilita jeví teplotní závislost. Tak u diamagnetických látek je relativní permeabilita malá, záporná a teplotně nezávislá:

látka	$(\mu_r - 1) \, . \, 10^6$
bismut	-176
stříbro	-26
NaCl	-12,6
sklo	-12,6
měď	-10,3
voda	-8,8
etanol	-7,9
vodík	-0,063

Látky paramagnetické mají relativní permitivity v širokém rozsahu a je pro ně typická teplotní závislost

$$\mu_r = 1 + \frac{C}{T} , \tag{4.71}$$

kde C je Curieova teplota. Výjimku tvoří alkalické kovy, jejichž permeabilita na teplotě nezávisí. Pro některá paramagnetika máme

látka	$(\mu_r - 1) \, . \, 10^6$
dusík	0,013
vzduch	0,38
kyslík	1,9
hliník	23
wolfram	176
platina	350
tekutý kyslík	3 400

obr. 4.35

Složitější situace nastává u silně magnetických látek, jako jsou feromagnetika. Jejich relativní permeabilita je proměnná v závislosti na vnějším magnetickém poli a silně teplotně závislá. Při dosažení Curieovy teploty jejich permeabilita poklesne z vysokých hodnot řádově $10^3 - 10^4$ na hodnoty běžné u paramagnetik. Typickými feromagnetiky jsou železo, kobalt, nikl, gadolinium a různé slitiny i nekovového charakteru. Curieova teplota je pro Fe 1043 K, Co 1393 K, Ni 631 K, Gd 289 K. Pro feromagnetika již neplatí přímá úměrnost mezi vektory $\vec{B}$ a $\vec{H}$ a jejich závislost pro konkretní nateriál udává *magnetizační křivka*. Pro určitý druh měkkého železa je uvedena na obr. 4.35.

Feromagnetismus vysvětlujeme tak, že magnetické dipóly atomů jsou již spontánně orientovány v tzv. Weissových doménách a ty se pak v magnetickém poli natáčejí jako celky. Sama teorie feromagnetismu je však poměrně obtížná a je založena na zákonitostech kvantové fyziky.

Vedle feromagnetik se setkáváme s *antiferomagnetiky* (NiO, FeF_2, MnS aj.), u nichž magnetické momenty sousedních atomů jsou orientovány antiparalelně. U *ferimagnetických látek* (feritů) jsou sousední momenty rovněž antiparalelní, ale různé velikosti, takže látka je spontánně zmagnetoivána. K feritům patří třeba magnetovec Fe_3O_4. Nad tzv. Neélovou teplotou přecházejí tyto látky v obyčejná paramagnetika. Těleso vytvořené z magnetika s fixně orientovanými magnetickými dipóly se nazývá permanentní magnet. Podobně jako u dielektrik i síly mezi magnetickými dipóly vyvolávají mechanické účinky (*magnetostrikce*).

Relativní permeabilita je makroskopická látková konstanta, kterou je možno teoreticky vypočítat z mikroskopického modelu magnetik. Tak pro látky diamagnetické můžeme vyjít z Langevinovy teorie indukovaných magnetických momentů atomů, které jsme odvodili v předchozím odstavci (4.53). Protože vektor magnetizace představuje magnetický dipólový moment jednotky objemu látky, dostaneme odtud

$$\mu_r \;=\; 1 \;+\; \kappa \;=\; 1 \;-\; \mu_0 \; n \; \frac{e^2 \; Z \; < r_0^2 >}{6 \; m_e} \;, \tag{4.72}$$

kde n je počet atomů v jednotce objemu. To je Langevinův vztah pro permeabilitu diamagnetik; počet atomů v jednotce objemu určíme pomocí Avogadrova zákona. Přesnější, kvantovou teorii diamagnetismu podal ve 20. letech J.H. van Vleck.

Pokud jde o orientační polarizaci paramagnetik, můžeme opět použít Debyovu - Langevinovu teorii a pouze modifikovat vzorec (2.82):

$$\mu_r \;=\; 1 \;+\; \frac{\mu_0 \; n \; m^2}{3 \; k \; T} \;. \tag{4.73}$$

Zde m je velikost vlastního magnetického momentu atomu a k Boltzmannova konstanta. Tento vzorec vysvětluje teplotní závislost permeability paramagnetik. Obecnou kvantovou teorii paramagnetismu podal

obr. 4.36 obr. 4.37

opět van Vleck.

Jestliže v magnetiku neprotékají žádné volné proudy, dostáváme soustavu Maxwellových rovnic

$$\text{div}\,\vec{B} \;=\; 0\;, \qquad\qquad \text{rot}\,\vec{H} \;=\; 0\;. \tag{4.74}$$

Ta je formálně shodná se soustavou rovnic elektrostatiky v prostoru, kde nejsou náboje. Protože pole $\vec{H}$ je nyní potenciální, můžeme zavést *magnetostatický potenciál* ψ vztahem

$$\vec{H} \;=\; -\;\text{grad}\,\psi\;. \tag{4.75}$$

V tomto případě můžeme tedy mluvit o *magnetostatickém poli* a soustavě rovnic magnetostatiky.

Při navrhování cívek pro generaci magnetických polí se setkáváme s různě větvenými magnetickými indukčními toky a hovoříme o *magnetických obvodech.* Tak jako se elektrické proudy musí uzavírat do smyček, tvoří i magnetické indukční čáry uzavřené obvody. Takový uzavřený obvod konečného solenoidu je na obr. 4.36.

Nechť indukční čáry tvoří uzavřenou trubici o proměnném průřezu ΔS. Potom pro cirkulaci magnetické indukce podél trubice platí

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} \;=\; \oint_l \frac{\Phi}{\Delta S}\,dl \;=\; \Phi\,\oint_l \frac{dl}{\Delta S} \;=\; \mu\,N\,I \;=\; \mathcal{E}_m\;.$$

Je-li N počet závitů solenoidu, představuje NI magnetomotorické napětí (4.59).

Veličina

$$R_m \;=\; \frac{1}{\mu} \;=\; \oint_l \frac{dl}{\Delta S} \tag{4.76}$$

závisí jen na délce a průřezu trubice a magnetických vlastnostech prostředí. Nazývá se *magnetický odpor* neboli *reluktance.* Její převrácená hodnota

$$\Lambda \;=\; \frac{1}{R_m}$$

nese název *magnetická vodivost* neboli *permeance.* Magnetický odpor se měří v jednotkách převrácený henry, magnetická vodivost v henry.

Pro magnetický obvod můžeme tedy zapsat vztah mezi indukčním tokem, magnetomotorickým napětím a magnetickým odporem, který připomíná Ohmův zákon. Nazývá se *Hopkinsonův zákon*:

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m} \, . \tag{4.77}$$

Při řešení složitejších magnetických obvodů bychom mohli pracovat analogicky s magnetickým potenciálem a magnetickým napětím, které se měří stejně jako mmn v ampérech, formulovat magnetické Kirchhoffovy vzorce apod.

Nakonec ještě určíme sílu, kterou se přitahují koncové nástavce dvou magnetů (obr. 4.37).

Síla působící mezi dvěma magnety

Pro malé magnety bychom mohli použít výrazy pro síly působící mezi magnetickými dipóly. Je-li naopak rozměr plochy S čel magnetů velký ve srovnání s šířkou mezery mezi nimi, vzniká v této vzduchové mezeře přibližně homogenní magnetické pole o indukci $\vec{B}$. Hustota energie magnetického pole v mezeře je $w_m = B^2/2\mu_0$, při posunutí magnetů o Δd se celková energie změní o $w_m S \Delta d$. Tato veličina musí být rovna práci, kterou koná síla F na dráze Δd, a proto

$$F = w_m \, S = \frac{B^2 \, S}{2 \, \mu_0} \, .$$

5. Pohyb nabitých částic v elektrických a magnetických polích

Nabité částice se v elektrických a magnetických polích pohybují pod vlivem Lorentzovy síly. Jde tedy o to řešit pohybovou rovnici

$$m \, \frac{d\vec{v}}{dt} = q \, (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \, . \tag{4.78}$$

Pole $\vec{E}, \vec{B}$ mohou být obecně zadanými funkcemi souřadnic a času, takže řešení pohybové rovnice může být složité. Taková obecná řešení je třeba určovat například v elektronové a iontové optice, kde se částice pohybují v nehomogenních polích. Předpokládejme nejdříve, že pole jsou homogenní.

Pohyb v čistě elektrickém poli je analogický pohybu částice v homogenním poli tíhovém. Nechť elektrické pole míří směrem osy x: $\vec{E} = (E, 0, 0)$. Pohybová rovnice ve složkách dá řešení

$$x = \frac{1}{2} \, \frac{q}{m} \, E \, t^2 + v_{0x} \, t + x_0, \quad y = v_{0y} \, t + y_0, \quad z = v_{0z} \, t + z_0 \, , \tag{4.79}$$

které závisí na počátečních podmínkách.

Začíná-li se částice pohybovat z počátku z klidu, bude její pohyb analogický volnému pádu:

$$x = \frac{1}{2} \, \frac{q}{m} \, E \, t^2 \, , \quad v_x = \frac{q}{m} \, E \, t = \sqrt{\frac{2qEx}{m}} \, .$$

Protože

$$\frac{1}{2} \, m \, v_x^2 = q \, e \, x \, , \qquad \varphi = - \, E \, x + \varphi_0 \, ,$$

dostáváme zákon zachování energie ve tvaru

$$\frac{1}{2} \, m \, v_x^2 + q \, \varphi = q \, \varphi_0 \, .$$

Bude-li mít částice počáteční rychlost v_0 ve směru osy y, bude řešení

$$x = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E t^2, \qquad y = v_0 t$$

a dráha bude parabolická jako u vodorovného vrhu v tíhovém poli

$$x = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{E}{v_0^2} y^2 .$$

V čistě magnetickém poli, které má směr osy z bude pohybová rovnice ve složkách

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} v_y B , \qquad \frac{dv_y}{dt} = - \frac{q}{m} v_x B , \qquad \frac{dv_z}{dt} = 0 .$$

Pohyb ve směru magnetického pole (osy z) je rovnoměrný, protože v tomto směru magnetické pole silově nepůsobí:

$$z = v_{0z} t + z_0 .$$

Soustavu diferenciálních rovnic pro složky v_x, v_y, které jsou provázány, můžeme řešit bud tak, že jednu z rovnic zderivujeme znovu podle času, vyloučíme jednu z funkcí a pro druhou budeme řešit rovnici druhého řádu, nebo přechodem ke komplexní rychlosti $u = v_x + \mathrm{i} v_y$. Vynásobíme-li rovnici pro v_y imaginární jednotkou i a sečteme obě rovnice, dostaneme

$$\frac{du}{dt} + \mathrm{i} \frac{qB}{m} u = 0 .$$

Řešením této rovnice je komplexní funkce

$$u = C \,\mathrm{e}^{\alpha t} = v_{0\perp} \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\delta + \omega_c t)} ,$$

kde ω_c je takzvaná *cyklotronová frekvence* rovná

$$\omega_c = \frac{q}{m} B . \tag{4.80}$$

Pro komplexní rychlost máme

$$u = v_{0\perp} \cos(\omega_c t + \delta) - \mathrm{i}\, v_{0\perp} \sin(\omega_c t + \delta) , \tag{4.81}$$

a tedy výsledné řešení ve složkách

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0\perp} \cos(\omega_c t + \delta) , \qquad & x &= x_0 - r_c \sin\delta + r_c \sin(\omega_c t + \delta) \\ v_y &= - v_{0\perp} \sin(\omega_c t + \delta) , \qquad & y &= y_0 - r_c \cos\delta + r_c \cos(\omega_c t + \delta) . \end{aligned} \tag{4.82}$$

Délka r_c se nazývá *cyklotronový poloměr*. Je roven

$$r_c = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} = \frac{m\, v_{0\perp}}{q\, B} . \tag{4.83}$$

V homogenním magnetickém poli koná tedy nabitá částice rovnoměrný kruhový pohyb v rovině kolmé k magnetickému poli s úhlovou frekvencí ω_c a s poloměrem r_c. Na tento pohyb se superponuje rovnoměrný pohyb ve směru osy z takže výsledná dráha částice má tvar šroubovice, která se ovíjí kolem magnetické indukční čáry (obr. 4.38).

Je důležité si všimnout, že částice bude rotovat kolem indukční čáry v *levotočivém smyslu*, takže svým vlastním indukovaným magnetickým polem bude vnější pole oslabovat. Volné částice (které tvoří například plazma) se tedy chovají v magnetickém poli jako diamagnetika.

obr. 4.38 obr. 4.39

obr. 4.40 obr. 4.41

Přejdeme nyní k situaci. kdy působí současně magnetické a elektrické pole, která jsou navzájem kolmá: $\vec{E} = (0, E, O)$, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Pohybová rovnice bude nyní nehomogenní:

$$\frac{du}{dt} + \mathrm{i}\,\frac{qB}{m} = \mathrm{i}\,\frac{qE}{m}\,.$$

K obecnému řešení homogenní rovnice (4.81) musíme přičíst ještě zvláštní řešení nehomogenní rovnice. Snadno zjistíme, že je reálné a rovno

$$u_{nh} = v_d = \frac{E}{B}\,, \tag{4.84}$$

Této veličině říkáme *driftová rychlost.* Ve zkřížených elektrickém a magnetickém poli koná tedy částice jednak pohyb po šroubovici ovíjející se kolem osy z ve směru magnetického pole a kromě toho se posouvá ve směru osy x, tedy kolmo jak k magnetickému tak k elektrickému poli (!). Takovému pohybu napříč magnetickým indukčním čarám říkáme *drift.* Všimněme si, že driftová rychlost nezáleží ani na znaménku ani na hmotnosti částice. Superpozicí kruhového a postupného pohybu vzniká trajektorie ve tvaru cykloidy , případně cykloidy zkrácené nebo prodloužené (obr. 4.40).

Drift může být způsoben i jinými silami než elektrickým polem (například gravitací) a dochází k němu i v nehomogenním magnetickém poli, kolmo ke směru gradientu. V těchto případech bude směr driftu záviset na znaménku elektrického náboje částice.

Pohybuje-li se nabitá částice v nehomogenním magnetickém poli, chová se jako diamagnetická a je vytlačována z oblasti větší hustoty siločar. Na tomto jevu jsou založena *magnetická zrcadla.* Pohybuje-li se částice podél siločáry po šroubovici, bude se v silnějším poli jak poloměr tak stoupání šroubovice

obr. 4.42

obr. 4.43

obr. 4.44

zmenšovat, až se částice zastaví a začne se pohybovat opačným směrem. Toho se využívá v otevřených magnetických nádobách určených k udržení horkého plazmatu (viz obr. 4.41). [28]

Na pohybu nabitých částic v elektrických a magnetických polích je založeno množství technických aplikací, zahrnovaných pod souhrnným názvem elektronika. Různě uspořádaná pole umožňují svazky nabitých částic fokusovat a vytvářet elektrické a magnetické čočky. Na tom je založena *elektronová a iontová optika.* Na obr. 4.42 jsou znázorněny elektrické a magnetické čočky jednak s podélným a jednak s příčným polem.

Elektrická a magnetická pole umožňují také separovat částice podle rychlostí a vytvářet rychlostní filtry. Nechť se nabitá částice pohybuje rychlostí v ze vzdálenosti x_0 podél osy x a dopadá na stínítko (fotografickou desku) v rovině y, z (obr. 4.43).

Elektrické a magnetické pole míří rovnoběžně (souhlasně či nesouhlasně) ve směru osy y. Ve směru osy x nepůsobí na částici žádná síla a částice dosáhne stínítka za dobu $t = x_0/v$. Za tuto dobu se odchýlí ve směru y pod vlivem elektrického pole a ve směru z pod vlivem magnetického pole. Částice o témž měrném náboji a různých rychlostech tedy dopadají na stínítko podél paraboly

$$z^2 = \frac{q\ B^2 x_0^2}{2\ m\ E}\ x\ .$$

Této "metody parabol" použil v r. 1901 W. Kaufmann, když určoval závislost hmotnosti relativistických elektronů na jejich rychlosti. Uspořádáme-li magnetické a elektrické pole vzájemně kolmo, můžeme zvolit

[28]Na vlastnostech pohybu nabitých částic v nehomogenním magnetickém a gravitačním poli je založeno chování kosmických částic slunečního větru v zemském magnetickém poli. Zemské magnetické pole má charakter pole dipólu se siločarami zhušťujícími se u geomagnetických pólů. Nabitá částice nemůže pronikat k zemskému povrchu napříč siločarám, ovíjí se kolem nich a pod vlivem gravitačního pole koná drift v rovnoběžkovém směru. Zároveň putuje od pólu k pólu a tam se vždy odráží jako od magnetického zrcadla. V polárních oblastech tak roste koncentrace těchto částic a s tím souvisí výskyt polárních září. Zemská magnetosféra nás tak chrání před pronikáním nabitých kosmických částic.

obr. 4.45

jejich velikosti tak, aby částice o dané rychlosti pohybující se v kolmém směru k oběma polím nebyla vůbec odchylována a prolétávala nastavenou štěrbinou (viz příklad 4.6).

Naopak urychlíme-li částice na stejné rychlosti, budou jejich dráhy v magnetickém poli záviset na měrném náboji q/m. Toho se využívá v *hmotnostní spektroskopii a spektrometrii*, například k analýze izotopového složení směsi iontů. Na obr. 4.45 je znázorněno schema prvního spektroskopu, který zkonstruoval F.W.Aston 1917 a modernějšího spektrometru Dempsterova.

Pohybu nabitých částic v příčném magnetickém poli se využívá v cyklických *urychlovačích*, které umožňují zkoumat chování částic pohybujících se a srážejících se při obrovských energiích. Poloměr kruhové dráhy částice R v magnetickém poli roste s rychlostí. Tak se v cyklotronu pohybují ionty mezi nástavci obrovského magnetu ze středu po rozvíjející se spirále a při přechodu mezerou mezi duanty jsou urychlovány střídavým napětím o frekvenci ω. Jakmile částice dosáhne obvodu magnetického pole, urychlování musí skončit. To je nevýhoda cyklotronu. Pokud rychlosti částice nejsou relativistické, zůstává doba oběhu, odpovídající cyklotronové frekvenci, konstantní. Při dosažení relativistických rychlostí začne narůstat hmotnost částice a prodlužovat se doba oběhu. Je-li urychlovací napětí konstantního kmitočtu, částice začne vypadávat ze synchronismu. Proto nelze na cyklotronu urychlovat relativistické částice.

Synchronizace můžeme dosáhnout tím, že budeme snižovat frekvenci urychlovacího napětí (fázotron neboli synchrocyklotron), zvyšovat hodnotu magnetické indukce (synchrotron) nebo oboje (protonový synchrotron neboli synchrofázotron).

Je také možno ponechat frekvenci i magnetické pole a vynechávat postupně jednu, dvě, tři atd urychlovací periody (mikrotron). Existuje též indukční urychlovač (betatron) s rostoucí magetickou indukcí, kde urychlování vyvolává indukované elektrické pole.

Protože pro relativistické částice se rychlost prakticky rovná rychlosti světla a příliš se nemění, tím že u synchrotronu a synchrofázotronu udržujeme konstantní poměr mezi magnetickou indukcí a hmotností, zůstává konstantní i poloměr dráhy. Pak nemusíme konstruovat magnety o velkých rozměrech nástavců a poloměr urychlovací dráhy může činit desítky kilometrů. Tím se také zmenší křivost dráhy a sníží se ztráty synchrotronovým zářením. Měníme-li magnetické pole nebo urychlovací frekvenci, může být urychlovací cyklus ovšem pouze pulsní. V následující tabulce porovnáváme různé typy cyklických urychlovačů.

urychlovač	B	ω	R	částice	typická energie
CYKLOTRON	konst	konst	rost	ionty	25 MeV
FÁZOTRON	konst	kles	rost	ionty	680 MeV
SYNCHROTRON	rost	konst	konst	elektrony	1 GeV
SYNCHROFÁZOTRON	rost	kles	konst	ionty	1 TeV
MIKROTRON	konst	konst	rost	elektrony	50 MeV
BETATRON	rost	-	konst	elektrony	300 MeV

Mějme nyní vodič obdélníkového průřezu rozložený podél osy y tak, že jeho hrany jsou orientovány ve směru x (hrana b) a z (hrana a). Nechť magnetické pole působí ve směru osy z a elektrické pole leží v rovině y, z (obr. 4.44). Je zřejmé, že konduktivita (měrná vodivost) σ bude nyní různá v různých směrech a bude představovat tenzor tvaru

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

Magnetické pole neovlivňuje pohyb nabitých částic v podélném směru a složka vodivosti ve směru osy z bude

$$j_z = \sigma E_z , \qquad \sigma = \frac{q^2 n}{2m\nu}$$

(viz (3.33)).

Podél osy y poteče tzv. přímý proud, pro nějž platí [29]

$$j_y = \sigma_1 E_y , \qquad \sigma_1 = \frac{\sigma}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}}$$

Podél osy x, napříč magnetickému i elektrickému poli teče tzv. Hallův proud, pro nějž platí

$$j_x = \sigma_2 E_y , \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma \frac{\omega_c}{\nu}}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} .$$

Hallův proud kolmý k magnetickému i elektrickému poli je nám už známý drift částic po cykloidách. Je spíše otázka, jak vůbec může téci přímý proud. Ukazuje se, že je to umožněno srážkami částic. Je-li částice v klidu, magnetické pole na ni nepůsobí a elektrické ji posune v přímém směru. Na pohybující se částici začne však okamžitě působit pole magnetické a částice začne driftovat v příčném směru. Při další srážce se částice zastaví a pod vlivem elektrického pole se opět posune v přímém směru (obr. 4.46).

Pro vodivost v daném směru je tedy rozhodující poměr cyklotronové frekvence, která vyjadřuje vliv magnetického pole a srážkové frekvence. Je-li $\omega_c/\nu \ll 1$, bude $\sigma_1 \approx \sigma, \sigma_2 \approx \sigma$ a magnetické pole ovlivní vodivost jen málo. Naopak při $\omega_c/\nu \gg 1$ bude $\sigma_1 \ll \sigma_2 \ll \sigma$ a vodivost v přímém směru silně poklesne.

Předpokládejme nyní, že vodič je v poměrně slabém magnetickém poli a teče jím stacionární proud $I = jab = nquab$. V příčném směru x působí na nosiče náboje síla $F = quB = qE_t$, kde E_t je efektivní příčné elektrické pole. Na bočních stranách vodiče tak vzniká napětí

$$U = E\, b = u\, B\, b = \frac{j}{nq}\, B\, b = \frac{I\, B}{n\, q\, a} = K\, \frac{I\, B}{a} . \tag{4.85}$$

Toto příčné napětí se nazývá Hallovo a jeho vznik *Hallův jev.* Konstanta K je Hallova konstanta, která závisí na materiálu vodiče, můžeme ji určit z proudu, magnetické indukce a Hallova napětí a stanovit z ní znaménko a měrný náboj nosičů náboje. Pro některé vodiče bylo zjištěno

[29] Vztahy mezi jednotlivými složkami vodivosti lze určit následovně. Zavedeme efektivní elektrické pole $\vec{E}_{ef} = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}$, kde $\vec{j} = nq\vec{u}$. Potom $\vec{j} = \sigma \vec{E}_{ef} = \sigma(\vec{E} + \frac{\vec{j}}{nq} \times \vec{B})$. Dále rozepíšeme $\vec{j} = \sigma E_z \vec{z}_0 + \sigma_1 E_y \vec{y}_0 + \sigma_2 E_y \vec{x}_0$ a dosadíme do předchozí rovnice. Porovnáním příslušných složek vektorů a vyloučením E_y dostaneme $\sigma_1 = \sigma - \frac{\sigma \sigma_2 B}{nq}$, $\sigma_2 = \frac{\sigma \sigma_1 B}{nq}$ a uvážíme-li, že $\frac{\sigma B}{nq} = \frac{\omega_c}{\nu}$, dostaneme složky σ_1, σ_2.

obr. 4.46 obr. 4.47

vodič	[K C^{-1}.m^3]
Cu	- $5,3.10^{-11}$
Ag	- $8,9.10^{-11}$
Bi	- $5,0.10^{-7}$
Zn	+ 10.10^{-11}
Cd	+ 6.10^{-11}

Hallova konstanta odpovídá klasické teorii vodivosti u jednomocných kovů, má překvapivě velkou absolutní hodnotu u bismutu a dokonce kladnou u některých dvojmocných kov (děrová vodivost).

Známe-li konstantu K, a změříme-li Hallovo napětí, můžeme určit hodnotu magnetické indukce (Hallova sonda). Hallův jev se využívá také k separaci kladných a záporných nábojů v proudu ionizovaného plynu v magnetohydrodynamických generátorech (MHD) a vytváření velkých stejnosměrných napětí.

Příklady

4.1 Jak se změní napětí U_0 mezi deskami nabitého kondenzátoru měřené v laboratorní soustavě, začne-li se kondenzátor pohybovat rychlostí $v = 0,8\ c$ ve směru a) kolmém na desky, b) rovnoběžném s deskami.

$[U = 0,6\ U_0, \qquad U = 1,67\ U_0]$

4.2 V urychlovači letí náboje o vlastní hustotě $\rho' = 10^{-4}$ C.m^{-3} rychlostí $v = 0,8c$ ve směru osy x. Jakou hustotu proudu naměříme v laboratorní soustavě?

[4.10^4 A.m^{-2}]

4.3 Určete celkovou sílu, kterou bude dlouhý přímý vodič protékaný proudem $I_1 = 10$ A působit na obdélníkovou smyčku podle obr. 4.47, jíž protéká proud $I_2 = 5$ A.

[$3,5.10^{-5}$ N, přitažlivá; $1,25.10^{-6}$ N stlačuje smyčku se stran]

4.4 V prostoru je dáno elektrické a magnetické pole jako $E_x = E_y = E_z = 3.10^4$ V.m^{-1}, $B_x = 0, \quad B_y = -B_z = 5.10^{-5}$ T. Najděte souřadnou soustavu, v níž $B = 0$.

[$v = v_x = -\ 0,5\ c$]

4.5 Přímým vodičem protéká proud $I = 100$ A. Určete elektrické a magnetické pole $\vec{E},\ \vec{B}$, jak se jeví ve vzdálenosti 10 cm od vodiče v souřadné soustavě pohybující se rovnoběžně s vodičem rychlostí 0,8 c.

[8.10^4 V.m^{-1}, $\quad 3,33.10^{-4}$ T]

4.6 Jaká výsledná síla působí na nabitou částici pohybující se rychlostí $v = E/B$ ve vzájemně kolmých elektrickém a magnetickém polích tak, že vektory $\vec{E},\ \vec{B},\ \vec{v}$ tvoří pravoúhlou pravotočivou soustavu?

[nulová)

4.7 Určete magnetickou indukci ve středu smyčky protékané proudem I ve tvaru kružnice, rovnostranného trojúhelníka, čtverce, obdélníka, šestiúhelníka.

$[\frac{\mu_0 I}{2r}, \quad \frac{18\mu_0 I}{4\pi a}, \quad \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}, \quad \frac{2\mu_0 I\sqrt{a^2+b^2}}{\pi ab}, \quad \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{\pi a}]$

4.8 Rovnostranný trojúhelník je sletován z homogenního drátu. Ke dvěma vrcholům trojúhelníka je přiloženo emn. Jaká bude magnetická indukce ve středu trojúhelníka?

[0]

4.9 Krychle je sletována ze stejných úseků drátů. Ke dvěma protilehlým vrcholům krychle připojíme emn. Jaká bude magnetická indukce ve středu krychle?

[0]

4.10 Čtvercovou smyčkou o straně 6 m teče proud 10 A. Určete magetickou indukci v bodě na ose smyčky ve výšce 4 m nad rovinou smyčky.

[$4,8.10^{-7}$ T]

4.11 Nekonečný drát je ohnut do půlkruhu podle obr. 4.48. Určete magnetickou indukci ve středu půlkruhu.

$[\frac{\mu_0(2+\pi)I}{4\pi r}]$

4.12 Uvnitř dlouhého vodiče kruhového průřezu poloměru 5 mm je vyvrtána válcová dutina o poloměru 0,5 mm, jejíž osa prochází rovnoběžně s osou vodiče ve vzdálenosti $a = 3$ mm (obr.4.49). Vodičem teče proud $I = 1$ A. Jaká bude magnetická indukce v dutině?

[$B = \frac{\mu_0 j\ a}{2} = 2,4.10^{-5}$ T] obr.4.48 obr.4.49

4.13 Elektrický proud I protéká stěnami duté kovové trubky o vnitřním a vnějším poloměru R_1, R_2. Jaký bude průběh magnetické indukce ve stěnách trubky?

$$\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2-R_1^2)}\left(r-\frac{R_1^2}{r}\right)\right]$$

4.14 Tři rovnoběžné přímé vodiče tvoří hrany trojbokého rovnostranného hranolu, jsou navzájem vzdáleny 10 cm a každým teče proud 20 A stejným směrem. Určete směr a velikost magnetické indukce na ose hranolu a na ose jedné ze stěn hranolu.

[0, $4,62.10^{-5}$ T]

4.15 Solenoid má délku 30 cm a průměr 6 cm. Na 1 cm je navinuto 5 závitů, drát má odpor 0,01 $\Omega.\mathrm{m}^{-1}$ a je připojen k $\mathcal{E} = 24$ V. Jaká bude magnetická indukce uvnitř solenoidu, tlak na boční stěnu a spotřebovávaný výkon?

[$5,2.10^{-2}$ T, 1 130 Pa, 2 kW]

4.16 Zemské magnetické pole na severním pólu má indukci o velikosti $B = 6,2.10^{-5}$ T a její vektor míří kolmo k zemi. Určete velikost magnetického dipólového momentu Země a proud, který by musel téci po rovníku, aby takový moment vyvolal.

[$8,1.10^{22}$ A.m^2, $6,5.10^8$ A]

4.17 Jakou silou se přitahují dva pólové nástavce magnetu o ploše 10 cm^2, je-li v mezeře intenzita magnetického pole $H = 4,37.10^6$ A.m^{-1} ?

[12 kN]

obr. 4.50

4.18 Malý podkovovitý magnet ze železa o obdélníkovém průřezu 1 x 0,5 cm unese železné závaží o hmotnosti 1,2 kg. Určete magnetickou indukci v blízkosti čelních ploch magnetu.

$[0,55\ \mathrm{T}]$

4.19 Mějme dva malé kotoučky poloměru $r = 1$ cm a tloušťky $d = 0,5$ cm z magnetizované látky měrné hmotnosti $\rho = 8\ 800$ kg.m^{-3}, jejichž vektory magnetizace o velikosti $M = 8,4.10^5$ A.m^{-1} jsou orientovány ve směru rotační osy. V jaké výšce h se bude vznášet jeden kotouček nad druhým, který je upevněn na podložce? Viz obr. 4.50.

[5,27 cm]

4.20 Elektron vletí do homogenního magnetického pole rychlostí $v = 5.10^6$ m.s^{-1} a začne se pohybovat po šroubovici o poloměru$r = 5$ cm a stoupání s=30 cm. Určete velikost magnetické indukce.

$$\left[\frac{mv}{e}\ \left(\ \frac{s^2}{4\pi^2} + r^2\ \right)^{-1/2}\ =\ 4,1.10^{-4}\ \mathrm{T}\right]$$

4.21 Deuteron se pohybuje po kružnici o poloměru 40 cm v magnetickém poli $B = 1,5$ T. Určete rychlost, energii a dobu oběhu deuteronu.

$[2,9.10^7\ \mathrm{m.s^{-1}},\quad 8,7\ \mathrm{MeV},\quad 8,6.10^{-8}\ \mathrm{s}]$

obr. 5.1

obr. 5.2

5. E L E K T R O M A G N E T I C K É P O L E

1. Elektromagnetická indukce

Vložíme-li vodič do statického (stacionárního) elektrického pole, budou se na jeho povrchu indukovat elektrické náboje. Tomuto jevu se říká elektrostatická indukce. Mohli bychom očekávat, že vložíme-li vodič ve tvaru uzavřené smyčky do vnějšího magnetického pole (tj. do pole jiné smyčky protékané stacionárním proudem), bude se ve smyčce indukovat elektrický proud. Nic takového se však neděje. Když Faraday prováděl (1831) experimenty tohoto druhu, všiml si však, že při zapnutí a vypnutí elektromotorického napětí v první smyčce se objevily krátkodobé proudové impulsy v druhé smyčce. Tak dospěl k objevu *elektromagnetické indukce*, která se projevuje u proměnných, nestacionárních proudů.

Uvažme vodič ve tvaru tyčky orientované ve směru osy x, která se pohybuje kolmo k magnetickému poli ve směru osy y rychlostí $\vec{v}$ (obr. 5.1).

Na volné náboje ve vodiči bude působit Lorentzova síla, která uvnitř vodiče vyvolá ekvivalentní elektrické pole

$$\vec{E} \;=\; -\,\vec{v} \times \vec{B}\,.$$

Tím dojde k přerozdělení náboje a polarizaci vodiče. Mohlo by se zdát divné, že uvnitř vodiče působí elektrické pole a mohli bychom se ptát, co se s tímto polem stane v soustavě souřadné spojené s vodičem. Pak jde o statický vodič a pole uvnitř musí být nulové. V tomto případě však pole skutečně vymizí, protože při přechodu ke klidové soustavě vznikne pole $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$, které vykompenzuje sílu se strany magnetického pole. Uvnitř vodiče je pak pole nulové a vně vodiče je pole vytvářeno povrchovým nábojem, který ovšem existuje v každé vztažné soustavě.

Mějme nyní uzavřenou smyčku obdélníkového tvaru (obr. 5.2) v rovině kolmé k magnetickému poli, se stranou a ve směru osy y a stranou b ve směru osy x pohybující se směrem y rychlostí $\vec{v}$. Bude-li magnetické pole homogenní, dojde pouze k přerozdělení nábojů na smyčce. Bude-li však pole ve směru pohybu smyčky nehomogenní, bude práce sil magnetického pole působících na náboj podél uzavřené smyčky různá od nuly:

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\, v\, (B_1 - B_2)\, b = \mathcal{E}^{ind}\, q,$$

kde $\mathcal{E}^{ind}$ je indukované elektromotorické napětí.

Za časový interval dt se smyčka posune o vzdálenost vdt ve směru osy y. Magnetický indukční tok smyčkou se přitom změní o

$$d\Phi = (B_2 - B_1)\, b\, v\, dt\,.$$

Porovnáním obou vztahů zjistíme, že v obvodu se indukuje elektromotorické napětí

$$\mathcal{E}^{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}\,. \tag{5.1}$$

Vztah (5.1) vyjadřuje Faradayův *zákon elektromagnetické indukce.* Platí zcela obecně, bez ohledu na to, jakým způsobem dochází ke změně indukčního toku Φ. Naši úvahu o pohybu smyčky bychom mohli postupně zobecňovat na libovolný pohyb smyčky obecného tvaru nebo na případ, kdy smyčka zůstává v klidu a v čase se mění magnetická indukce. V elektromagnetických strojích se nejčastěji smyčka otáčí v homogenním magnetickém poli a tím se mění indukční tok.

Důležité je, že indukované elektromotorické napětí působí v opačném směru, než změna, která je vyvolala. Vyjadřuje to znaménko minus v (5.1) a s touto situací jsme se vlastně už setkali při studiu diamagnetismu. Toto pravidlo o směru působení indukovaného emn se nazývá *Lenzovo pravidlo.*

Uvažme dvě nehybné vodivé smyčky ve vakuu. Nechť v první (primární) smyčce dojde ke změně elektrického proudu. Tato změna vyvolá změnu magnetického pole vytvářeného touto smyčkou, a tedy i změnu indukčního toku druhou (sekundární) smyčkou. V ní se pak indukuje emn a začne protékat indukovaný proud. Ten teče v takovén směru, aby jím vytvářené magnetické pole působilo proti změně indukčního toku (záporná zpětná vazba). Kdyby tomu tak nebylo, změna magnetického pole by se zvětšovala nade všechny meze. Dochází tedy k těmto změnám:

$$\frac{dI_1}{dt} \to \frac{dB_1}{dt} \to \frac{d\Phi_{12}}{dt} \to \mathcal{E}_2^{ind} \to I_2 \to B_2\,.$$

Zákon elektromagnetické indukce je projevem obecné vlastnosti hmoty, kterou označujeme jako setrvačnost, a je přirozenou reakcí odporu proti změně. Tato vlastnost zajišťuje stabilitu přírodních procesů.

Indukované proudy vznikají nejen v různých vodičích, ale i v témže vodiči, dojde-li ke změně magnetického toku. V masivnícvh vodičích se projevují jako tzv. *vířivé* neboli *Foucaultovy proudy*, kterých se využívá například k tlumení oscilací pohyblivých částí elektrických přístrojů. Představují vlastně magnetické tření. Existenci vířivých proudů musíme brát v úvahu při konstrukci transformátorových jader, statorů a rotorů dynam a elektromotorů i jinde, kde jsou nežádoucím jevem.

Jev elektromagnetické indukce má i další zajímavý důsledek spočívající v tom, že střídavé proudy a elektromagnetické vlny nepronikají příliš hluboko do objemu vodičů a zůstávají soustředěny v tenké povrchové vrstvě. Říká se tomu *skinefekt* podle anglického skin = kůže. Tak střídavé proudy protékající vodičem nejsou rozloženy rovnoměrně po jeho průřezu, ale protékají v povrchové vrstvě tím tenčí, čím je frekvence proudu a konduktivita vodiče vodiče vyšší. Řešením Maxwellových rovnic s uvážením Faradayova zákona elektromagnetické indukce (viz např. knihu Sedlák, Štoll: Elektřina a magnetismus) lze určit tloušťku této povrchové vrstvy jako

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\, \omega\sigma}}\,. \tag{5.2}$$

Zde ω je úhlová frekvence střídavého proudu, σ konduktivita vodiče; relativní permeabilitu vodiče klademe rovnu jedné.

Faradayův zákon elektromagnetické indukce lze vyjádřit i v diferenciálním tvaru. Máme

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

a použijeme-li Stokesovu větu, dostaneme na levé straně plošný integrál rotace $\vec{E}$, odkud

$$\text{rot } \vec{E} \; = \; - \; \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, . \tag{5.3}$$

V časově proměnném poli tedy už není elektrické pole potenciální a je svázáno s polem magnetickým. Můžeme zase shrnout Maxwellovy rovnice pro časově proměnné pole ve vakuu a srovnat je s rovnicemi pro stacionární pole (4.28). Nyní máme

$$\text{div } \vec{E} \; = \; \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{rot } \vec{B} \; = \; \mu_0 \, \vec{j} + \, ?$$

$$\text{rot } \vec{E} \; = \; - \; \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{div } \vec{B} \; = \; 0 \, . \tag{5.4}$$

Rovnice pro div $\vec{E}$ (Gaussův zákon) a div $\vec{B}$ považujeme za platné i v případě nestacionárního pole, otázkou pouze zůstává, zda bude v časově proměnném poli platit rovnice pro rot $\vec{B}$. Na první pohled je zřejmá určitá nesymetrie těchto rovnic - rotace elektrického pole závisí na změně magnetického pole a dala by se očekávat i obrácená závislost. Máme však k dospozici ještě rovnici kontinuity vyjadřující zákon zachování elektrického náboje, která má pro nestacionární proud tvar (3.8). Aplikujeme-li operaci divergence na Ampérův zákon, dostaneme

$$\text{div rot } \vec{B} \; = \; \mu_0 \text{ div } \vec{j} \; = \; 0.$$

To ovšem platí jen ve stacionárním poli, obecně máme

$$\text{div } \vec{j} \; = \; - \; \frac{\partial \rho}{\partial t} \, .$$

Zkusíme tedy nahradit otazníček v rovnicích (5.4) a napsat

$$\text{rot } \vec{B} \; = \; \mu_0 \, \vec{j} + \alpha \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \, ,$$

kde α je třeba určit porovnáním s rovnicí kontinuity. Pak máme

$$\text{div rot } \vec{B} \; = \; \mu_0 \text{ div } \vec{j} \; + \; \alpha \text{ div } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \; = \; \mu_0 \text{ div } \vec{j} \; + \; \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} \; = \; \mu_0 \, \left(\text{div } \vec{j} \; + \; \frac{\alpha}{\varepsilon_0 \mu_0} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \; = \; 0 \, .$$

Rovnice kontinuity bude splněna, položíme-li

$$\alpha \; = \; \varepsilon_0 \, \mu_0 \; = \; \frac{1}{c^2} \, .$$

Tím dostáváme soustavu Maxwellových rovnic ve vakuu konsistentní se zákonem zachování náboje pro časově obecně proměnná, nestacionární pole

$$\text{div } \vec{E} \; = \; \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{rot } \vec{B} \; = \; \mu_0 \, \vec{j} \; + \; \frac{1}{c^2} \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} \; = \; - \; \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{div } \vec{B} \; = \; 0 \, . \tag{5.5}$$

Nově doplněný člen

$$\mu_0 \, \varepsilon_0 \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \; = \; \frac{1}{c^2} \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \; = \; \mu_0 \, \vec{j}_M \tag{5.6}$$

vyjadřuje Maxwellův posuvný proud ve vakuu a dospěli jsme k němu pouze na základě teoretické úvahy, bez odvolání na experimentální poznatek. Existence tohoto proudu o hustotě $\vec{j}_M$ byla skutečně experimentálně prokázána až po Maxwellových pracích a tak byl odhalen zvláštní druh elektrického, nestacionárního proudu, který není spojen s přemisťováním nábojů.

Příčina toho, proč nebyl pozorován dříve tkví v koeficientu $1/c^2$, který je velmi malý. Posuvný proud se tak projeví až při velmi rychlých změnách elektrického pole, vysokofrekvenčních proudech, kdy také časová derivace $\partial\vec{E}/\partial t$ je velká. Při pomalých změnách pole, například při průmyslových frekvencích 50 nebo 60 Hz, můžeme tedy Maxwellův posuvný proud zanedbat a používat soustavu rovnic s Ampérovým zákonem bez otazníčku v (5.4). Přitom předpokládáme, že magnetické pole zůstává úměrné volnému proudu $\vec{j}$, že stačí sledovat jeho změny. Elektromagnetické pole splňující soustavu rovnic (5.4) nazýváme *kvazistacionární*. V tomto a následujícím odstavci se budeme zabývat právě kvazistacionárními proudy a obvody.

Při vysokých frekvencích posuvný proud zanedbat nelze a je třeba používat kompletní soustavu Maxwellových rovnic (5.5). V takovém případě dochází k vyzařování elektromagnetických vln. Skutečně, kdybychom chtěli po obyčejném elektrickém vedení přenášet vysokofrekvenční proudy, změnilo by se nám toto vedení v anténu. Předpověď existence elektromagnetických vln byla jedním z největších úspěchů Maxwellovy teorie. Maxwell především ustanovil, že světlo je příčné elektromagnetické vlnění - proto se také v soustavě Maxwellových rovnic objevila rychlost světla ve vakuu c. Dále zjistil, že soustava rovnic pro elektromagnetické pole ve vakuu *bez nábojů a proudů*, tj při $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\vec{E} &= 0 & \mathrm{rot}\,\vec{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\,\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \mathrm{div}\,\vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

má netriviální řešení. Elektromagnetické pole se může odtrhnout od nábojů a proudů a začít samostatně existovat v podobě elektromagnetické vlny. Soustava Maxwellových rovnic tak také nabývá krásné symetrie.

Vrátíme se ke kvazistacionárnímu poli. Uvažme proudovou smyčku, pro níž můžeme definovat indukčnost L. Zavedli jsme ji definicí (4.69) a hraje pro smyčku podobnou úlohu jako kapacita pro nabitý vodič. Nazýváme ji *vlastní indukčností* smyčky.

Máme-li v prostoru více smyček, budou vzájemně indukčně provázány svými magnetickými toky a můžeme opět psát soustavu lineárních rovnic vyjadřujících vztahy mezi proudy a magnetickými toky ve smyčkách, jako u kapacit rovnice (2.47). Potom máme

$$\Phi_i \;=\; L_{ik}\, I_k\,. \tag{5.8}$$

Koeficienty L_{ik} se nazývají *indukčními koeficienty*, koeficienty s různými indexy jsou *vzájemné indukčnosti*, které někdy označujeme jako $L_{ik} = M_{ik}$. V soustavě SI měříme indukčnosti v jednotkách henry (H).

Pro vzájemné indukčnosti platí opět *věta o vzájemnosti* $M_{ik} = M_{ki}$, kterou můžeme dokázat buď z energetické úvahy (nezáleží na pořadí v jakém proudy v jednotlivých smyčkách nabíhají) nebo následujícím způsobem.

Mějme dvě smyčky jako na obr. 5.3. Indukční tok smyčkou můžeme vyjádřit pomocí vektorového potenciálu jako

$$\Phi \;=\; \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \;=\; \int_S \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot d\vec{S} \;=\; \oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}\,.$$

Potom podle (4.32)

$$M_{12} \;=\; \frac{\Phi_{12}}{I_2} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l_1}\cdot d\vec{l_2}}{R}\,. \tag{5.9}$$

Výsledek nezávisí na pořadí indexů 1 a 2, čímž je věta o vzájemnosti dokázána.

Indukčnost můžeme definovat i pomocí Faradayova zákona (dynamická definice indukčnosti). V i-té smyčce se indukuje emn

$$\mathcal{E}_i^{ind} \;=\; -\,\frac{d\Phi_i}{dt} \;=\; -\,\sum_k L_{ik}\,\frac{dI_k}{dt}\,.$$

obr. 5.3

Pro jednu smyčku tedy

$$\mathcal{E}^{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{5.10}$$

S uvážením indukovaného emn bude Ohmův zákon v uzavřeném obvodu znít

$$\mathcal{E} = R\,I + L\frac{dI}{dt} \tag{5.11}$$

a Jouleův zákon

$$\mathcal{E}\,I = R\,I^2 + L\,I\frac{dI}{dt}, \tag{5.12}$$

kde pod R jsme zahrnuli i vnitřní odpory zdrojů. Část výkonu emn se tedy nevratně mění v tepelnou energii a část se spotřebovává na kompenzaci změn indukčního toku. Protéká-li smyčkou stacionární proud, musel postupně narůstat od nulové hodnoty a část práce vnějšího zdroje se měnila v energii magnetického pole smyčky. Ke zvětšení indukčního toku o $d\Phi$ bylo třeba vykonat práci $dA = Id\Phi$, takže celková práce k vytvoření magnetického pole smyčku je rovna

$$W = \int L\,I\frac{dI}{dt}\,dt = \int_0^I L\,I\,dI = \frac{1}{2}L\,I^2 = \frac{1}{2}I\,\Phi. \tag{5.13}$$

Určíme-li celkovou energii magnetického pole vyvolaného proudem ve smyčce můžeme pak její indukčnost stanovit podle (5.13).

Také energii soustavy proudových smyček můžeme určit integrováním hustoty energie magnetického pole (4.36) v celém prostoru:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i I_i\,\Phi_i = \frac{1}{2}\sum_i I_i\int_{S_i}\vec{B}_i\cdot d\vec{S}_i = \frac{1}{2}\sum_i I_i\int_{S_i}(\text{rot }\vec{A}_i)\cdot d\vec{S}_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i\oint_{l_i}\vec{A}\cdot d\vec{l}_i = \frac{1}{2}\sum_i\int_{V_i}(\vec{A}_i\cdot\vec{j}_i)\,dV_i = \frac{1}{2}\int_\infty(\vec{A}\cdot\vec{j})\,dV =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int_\infty\vec{A}\cdot\text{rot }\vec{B}\,dV = \frac{1}{2\mu_0}\int_\infty\text{div }(\vec{B}\times\vec{A})\,dV + \frac{1}{2\mu_0}\int_\infty\vec{B}\cdot\text{rot }\vec{A}\,dV =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int_{S\to\infty}\vec{B}\times\vec{A}\cdot d\vec{S} + \frac{1}{2\mu_0}\int_\infty B^2\,dV = \int_\infty w_m\,dV. \tag{5.14}$$

Objemové integrování jsme rozšířili z objemů smyček na celý prostor - pokud v něm neteče proud je jeho příspěvek k $\vec{A}\cdot\vec{j}$ nulový. Při rozpínámí plochy S do nekonečna jsme brali v úvahu, že pole $\vec{B}$ klesá jako $1/r^2$ a vektorový potenciál jako $1/r$, takže plošný integrál jde k nule.

obr. 5.4

1. Silové účinky magnetického pole na pohybující se vodič

Mechanické účinky spojené s elektromagnetickou indukcí jsou základem elektromotorů. Na obr. 5.4 je pohyblivý vodič hmotnosti m ,který může volně klouzat po dvou nekonečných vodivých kolejnicích v rovině kolmé k magnetickému poli. Pro jednoduchost zanedbáme odpor vodiče a částí kolejnic vytvářejících smyčku.

Nechť v obvodu působí konstantní emn E tak, že obvodem protéká proud I proti směru hodinových ručiček. Na pohyblivý vodič přitom působí síla o velikosti

$$F = I\, b\, B = m \frac{dv}{dt}$$

a tento vodič se začne pohybovat proměnnou rychlostí $v(t)$. Při pohybu se mění indukční tok smyčkou a vzniká v něm indukované napětí $-bBv(t)$. Z Ohmova zákona

$$I(t) = \frac{1}{R} \left[\mathcal{E} - b\, B\, v(t)\right]$$

a dosadíme-li za I z výrazu pro sílu, dostaneme nehomogenní rovnici pro $v(t)$:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 b^2}{mR} v = \frac{\mathcal{E} B b}{mR} .$$

Její řešení je

$$v(t) = \frac{\mathcal{E}}{Bb} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{B^2 b^2}{mR} t}\right) .$$

Rychlost vodiče tedy postupně poroste k ustálené hodnotě $v_\infty = \mathcal{E}/Bb$. Celkový výkon emn je

$$\mathcal{E}\, I = R\, I^2 + I\, B\, b\, v .$$

Spotřebuje se jednak na ohmické ztráty, jednak na pohon vodiče. Vznikl lineární motor, který ovšem nemůže pracovat trvale.

Můžeme si představit opačnou situaci, kdy v obvodu emn nepůsobí, ale vnější síla pohybuje vodičem. Má-li se vodič pohybovat konstantní rychlostí, je třeba, aby tato síla byla kompenzována silou magnetickou, tj. byla rovna

$$F = -I\, B\, b = -\frac{\mathcal{E}^{ind} B b}{R} = \frac{B^2 b^2}{R} v .$$

Potom vznikne elektrický generátor a v něm bude vznikat indukované napětí

$$\mathcal{E}^{ind} = -\frac{FR}{bB} ,$$

obr. 5.5

pokud ovšem délka kolejnic dovolí pokračovat v pohybu.

2. Indukčnost solenoidu

Na obr. 5.5 je znázorněn solenoid konečné délky l a poloměru R.

Pokud zanedbáme okrajové efekty a budeme považovat pole v solenoidu za homogenní, můžeme určit jeho indukčnost buď pomocí statické definice, dynamické definice nebo z energie nahromaděné v solenoidu. Indukční tok průřezem solenoidu

$$\Phi \; = \; B\; S \; = \; \mu_0 \; I \; n.\pi R^2$$

musíme brát jako N-násobný, kde N je celkový počet závitů. Tak dostaneme

$$L \; = \; \frac{N \; \Phi}{I} \; = \; \mu_0 \; n \; V \; \frac{N}{l} \; = \; \mu_0 \; n^2 \; V \; .$$

Zde V je objem solenoidu a n počet závitů na jednotku délky. Týž výsledek bychom pochopitelně dostali ze vztahu $L = 2W/I^2$, kde W je celková magnetická energie v objemu solenoidu. Přesný výpočet s ohledem na okrajové efekty dává

$$L \; = \; k \; \mu_0 \; n^2 \; V, \qquad \text{kde} \qquad k \; = \; 1 - \frac{8R}{3\pi l} + \frac{R^2}{2l^2} - \frac{R^4}{4l^4} \; .$$

3. Vlastní indukčnost přímých vodičů

Chcemeli určit vlastní indukčnost připadající na jednotku délky nekonečného přímého vodiče protékaného proudem I, můžeme postupovat tak, že v axiální rovině plošný pás jednotkové šířky vycházející kolmo z vodiče a určíme celkový indukční tok tímto pásem (obr. 5.6).

Tok diferenciální ploškou dS bude $d\Phi = Bdr$, a tedy

$$L_l \; = \; \frac{\Phi_l}{I} \; = \; \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \; .$$

Tento integrál, jak známo, diverguje při $r \to 0$ i při $r \to \infty$. Není to chyba přírody, ale naše - nekonečně dlouhé ani nekonečně tenké vodiče neexistují. Připustíme-li, že vodič má konečný průřez poloměru R, můžeme určit příspěvek L_{li} k vlastní indukčnosti díky indukčnímu toku uvnitř plného vodiče. Tam je magnetická indukce

$$B \; = \; \frac{\mu_0 \; I \; r}{2\pi \; R^2} \; .$$

obr. 5.6 obr. 5.7

Je-li vodič dutý, je v něm magnetické pole nulové a tato část vlastní indukčnosti (nazýváme ji vnitřní indukčností) odpadá. Indukční tok ploškou ve vodiči ve vzdálenosti $r < R$ od osy obepíná ovšem jen část proudu rovnou r^2/R^2-tině celkového proudu. Musíme tok proto brát jako r^2/R^2 -násobný. Potom vnitřní indukčnost vodiče na jednotku délky bude

$$L_{li} \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi\; R^4} \int_0^R r^3 \, dr \;=\; \frac{\mu_0}{8\pi} \;. \tag{5.15}$$

Pro $r \to \infty$ nemůžeme v případě jednoho nekonečného vodiče divergenci integrálu odstranit. Je to tím, že i v případě že proud přichází a odchází z nekonečna, musí, lidově řečeno, jít jednou tam a jednou zpátky. Má tedy smysl uvažovat indukčnost dvojlinky na jednotku délky (obr. 5.7). Pak stačí uvažovat tok pásem jednotkové šířky mezi oběma vodiči; po stranách dvojlinky se toky obou vodičů vyruší. Je-li l vzdálenost os obou vodičů a R jejich poloměr, a jsou-li vodiče duté, dostaneme

$$L_l \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\int_R^{l-R} \frac{dr}{r} \;+\; \int_R^{l-r} \frac{dr}{l-r} \right)$$

a provedeme-li v druhém integrálu substituci $l - r = s$, dostaneme

$$L_l \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\int_R^{l-R} \frac{dr}{r} \;+\; \int_R^{l-R} \frac{ds}{s} \right) ,$$

neboli

$$L_l \;=\; \frac{\mu_0}{\pi} \, \ln \frac{l-R}{R} \;. \tag{5.16}$$

Nejsou-li vodiče duté, je třeba přičíst ještě vnitřní indukčnost (5.15) od každého vodiče, tj. $\mu_0/4\pi$. Připomeneme-li si výraz pro kapacitu dvojlinky na jednotku délky (2.56), zjistíme, že platí

$$L_l \; C_l \;=\; \varepsilon_0 \; \mu_0 \;=\; \frac{1}{c^2} \;. \tag{5.17}$$

4. Vlastní indukčnost koaxiálního kabelu

Mějme koaxiální kabel tvořený dvěma dutými vodiči o poloměrech $R_1 < R_2$, takže magnetické pole je soustředěno v prostoru mezi vodiči. Energii tohoto pole připadající na jednotku délky určíme jako

$$W_l \;=\; \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \; dV \;=\; \frac{1}{2\mu_0} \int_{R_1}^{R_2} B^2 \; 2\pi \; r \; dr \;=\; \frac{\mu_0 \; I^2}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \;=\; \frac{\mu_0 \; I^2}{4\pi} \; \ln \frac{R_2}{R_1} \;.$$

obr. 5.8

Indukčnost bude tedy

$$L_l \;=\; \frac{2\,W_l}{I^2} \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi}\;\ln\frac{R_2}{R_1}\;. \tag{5.18}$$

Nebude-li vnitřní vodič dutý, přičte se vnitřní indukčnost (5.15). Srovnáním s kapacitou na jednotku délky (2.55) zjistíme, že opět platí (5.17).

5. Vlastní indukčnost kruhové smyčky

Máme určit indukčnost kruhové smyčky protékané proudem. Víme již, že smyčku nebudeme moci považovat za nekonečně tenkou, nýbrž musíme jí připsat konečný průřez o poloměru $R \ll r$, kde r je poloměr smyčky. K určení vlastní indukčnosti bychom měli určit celkový indukční tok plochou ohraničenou osovou kružnicí smyčky. Můžeme ji opět rozdělit na indukčnost vnitřní a vnější. Vnitřní indukčnost je spojena s tokem mezikružím plochy $\pi R(2r - R)$ uvnitř vodiče a vnější s tokem plochou kruhu o poloměru $r - R$.

U vnitřní indukčnosti dostáváme z (5.15)

$$L_i \;=\; \frac{\mu_0}{8\pi}\;.\;2\pi\;r \;=\; \frac{\mu_0\;r}{4}\;.$$

Pokud jde o vnější indukčnost, museli bychom znát průběh magnetického pole na celé kruhové ploše ohraničené smyčkou. Protože vně smyčky můžeme považovat proud za tekoucí po nekonečně tenké osové kružnici, je úloha ekvivalentní výpočtu vzájemné indukčnosti dvou tenkých koncentrických kruhových smyček o poloměrech r a $r - R$. Výpočet není snadný, vede na eliptické integrály a lze jej najít například v knize Petržílka, Šafrata: Elektřina a magnetismus. Jako přibližný výsledek dostáváme

$$L_e \;=\; \mu_0\;r\left(\;\ln\frac{8r}{R}\;-\;\frac{7}{4}\;\right)\;.$$

6. Vzájemná indukčnost dvou smyček a cívek

Mějme dvě souosé kruhové smyčky o poloměrech $R_2 \ll R_1$, jejichž středy jsou vzdáleny o výšku h (obr. 5.8).

Magnetické pole na ose velké smyčky

$$B = \frac{1}{2}\,\mu_0\, I_1\, \frac{R_1^2}{(R_1^2+h^2)^{3/2}}$$

můžeme považovat v ploše malé smyčky přibližně za homogenní, takže vzájemná indukčnost bude

$$M_{12} = \frac{\pi\mu_0}{2}\,\frac{R_1^2\, R_2^2}{(R_1^2+h^2)^{3/2}}\ .$$

Budou-li smyčky v téže rovině, dostaneme

$$M_{12} = \frac{\mu_0\, S_2}{2\, R_1}\ .$$

Mějme nyní dvě cívky o poloměrech $R_1,\ R_2$, počtech závitů na jednotku délky $n_1,\ n_2$ a výškách $l_1,\ l_2$. Uvažme dva případy:

a) Obě cívky mají stejné rozměry, jsou dostatečně dlouhé a navinuty na společném jádře, takže indukční tok jimi procházející je totožný. Obě cívky se liší pouze počtem závitů, takže pro jejich vlastní a vzájemné indukčnosti platí:

$$L_1 = \mu_0\, n_1^2\, V, \quad L_2 = \mu_0\, n_2^2\, V, \quad M_{12} = \mu_0\, n_1\, n_2\, V\ ,$$

takže

$$M_{12} = \sqrt{L_1\, L_2}\ . \tag{5.19}$$

Uvedený výraz představuje nejvyšší možnou hodnotu vzájemné indukčnosti dvou cívek, když je jejich indukční vazba nejtěsnější.

b) První cívka je dostatečně dlouhá, druhá o mnohem menším poloměru je do ní koaxiálně zasunuta. Pak dostaneme

$$M_{12} = \mu_0\, n_1\, n_2\, V_2\ .$$

7. <u>Transformátor</u>

Prozkoumejme blíže vztah mezi vlastními a vzájemnými indukčnostmi dvou cívek. Zanedbáme-li jejich ohmické odpory a předpokládáme-li, že v primární cívce působí emn $\mathcal{E}_1$, dostaneme pro obvody obou cívek

$$\mathcal{E}_1 - L_1\frac{dI_1}{dt} - M_{12}\frac{dI_2}{dt} = 0, \qquad L_2\frac{dI_2}{dt} + M_{21}\frac{dI_1}{dt} = 0.$$

Vyjádříme-li z druhé rovnice dI_2/dt a označíme vzájemnou indukčnost prostě M, dostaneme

$$\mathcal{E}_1 - L_1\left(1-\frac{M^2}{L_1\, L_2}\right)\frac{dI_1}{dt} = 0\ .$$

V první smyčce tedy působí efektivní vlastní indukčnost

$$L_{ef} = L_1\,(\,1 - k^2\,)\ , \qquad k = \frac{M}{\sqrt{L_1\, L_2}}\ .$$

Veličinu k nazýváme činitelem vazby mezi smyčkami; je roven maximálně 1.

Indukčně vázaných cívek se používá v transformátoru, kde jsou cívky uspořádány jako v případě a) předchozí úlohy. Potom zřejmě $L_1/M = M/L_2 = n_1/n_2$. Nechť je v obvodu primární cívky zapojen odpor R_1 a působí zde střídavé emn $\mathcal{E}(\mathrm{t})$, v obvodu sekundární cívky odpor R_2. Potom platí

$$\mathcal{E}_1(t) - L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} = R_1\, I_1\ , \qquad -L_2\frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt} = R_2\, I_2\ .$$

a) b)

obr. 5.9

V sekundárním obvodu rozlišíme tři případy:

a) $R_2 \to \infty$, transformátor naprázdno. Potom $I_2 = 0$ a na svorkách sekundární cívky zjistíme indukované napětí, které má při malém odporu R_1 velikost

$$\mathcal{E}_2^{ind} = \frac{n_2}{n_1}\, \mathcal{E}_1 \; .$$

b) $R_2 = 0$, transformátor nakrátko. Z rovnice pro sekundární obvod plyne

$$I_2 = -\,\frac{L_1}{M} = -\,\frac{n_1}{n_2}\, I_1 \; .$$

c) $R_2 \neq 0$, malý. Proud v sekundárním obvodě bereme jako v případě transformátoru nakrátko a dosazením dI_2/dt do rovnice pro primární obvod dostaneme rovnici

$$\mathcal{E}_1 - L_1\,(\,1 - k^2\,)\,\frac{dI_1}{dt} = \left(R_1 + \frac{n_1^2}{n_2^2}\, R_2 \right) I_1 \; .$$

V primárním obvodu tedy působí efektivní indukčnost a efektivní odpor.

2. Kvazistacionární obvody

Nejdříve prozkoumáme takzvané *přechodové stavy* v elektrických obvodech, které nastávají při zapnutí a vypnutí zdroje emn. Na obr. 5.9 jsou znázorněny RC obvod (s odporem a kondenzátorem v sérii) a LC obvod (s odporem a cívkou v sérii) s přepínačem, který umožňuje zapnout a vypnout zdroj konstantního emn.

Je-li U napětí a Q náboj na kondenzátoru, potom v RC obvodu při zapojeném emn máme

$$\mathcal{E} - U = R\,I \,, \quad Q = C\,U \,, \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

a pro změnu náboje na kondenzátoru máme diferenciální rovnici

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{R\,C}\, Q = \frac{\mathcal{E}}{R} \; .$$

Obecné řešení této rovnice se skládá z obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního (zvláštního) řešení nehomogenní rovnice:

$$Q(t) = \text{konst}\;.\;\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + \mathcal{E}\,C \; .$$

obr. 5.10

Konstantu musíme pak určit vždy z počátečních podmínek. Nehomogenní rovnice odpovídá zapnutému zdroji emn, homogenní rovnice stavu bez zapojeného emn. Zapneme-li zdroj v okamžiku $t = 0$, kdy je kondenzátor nenabitý, poroste na něm náboj (a napětí) podle zákona

$$Q = \mathcal{E}\, C \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \right) , \quad U = \frac{Q}{C} .$$

Vypneme-li zdroj v okamžiku t_0, kdy bylo na kondenzátoru dosaženo napětí U_0, bude náboj (a napětí) klesat podle zákona

$$Q = U_0\, C\, \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{RC}} .$$

Tento průběh změny náboje na kondenzátoru při jeho nabíjení a vybíjení vidíme na obr. 5.10.

Vidíme, že napětí na kondenzátoru nabíhá a klesá s charakteristickou dobou $\tau_C = RC$, které říkáme časová konstanta obvodu. Při vybíjení kondenzátoru klesne za tuto dobu napětí na 1/e-tinu. To je třeba mít na paměti - kondenzátory o velké kapacitě zkratované přes značný odpor potřebují dostatečný čas k tomu, aby napětí na nich pokleslo na bezpečnou hodnotu.

Charakteristický tvar napěťového pulsu na obr. 5.10 může být využit v impulsové technice; vhodnou volbou parametrů obvodu můžeme takto generovat pulsy trojúhelníkového nebo pilovitého průběhu. Podotkněmě, že pilovitá napětí potřebujeme například k rozmítání elektronového paprsku na televizní obrazovce.

Průběh proudu v obvodu dostaneme snadno zderivováním náboje podle času; při nabíjení a vybíjení tak máme:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} , \quad I = -\frac{U_0}{R}\, \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{RC}} .$$

Průběh proudu vidíme na obr. 5.11.

Podobně bychom mohli analyzovat poměry v RL obvodu. Pak bychom řešili diferenciální rovnici

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}\, I = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

s výsledkem při zapnutí a vypnutí emn

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \right) , \quad I = I_0\, \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} .$$

Vidíme, že tentokrát časový průběh proudu odpovídá časovému průběhu náboje u RC obvodu na obr. 5.10 s časovou konstantou $\tau_L = L/R$.

obr. 5.11

Přejdeme nyní k sériovému RLC obvodu. Platí v něm

$$\mathcal{E} \; - \; U \; - \; L \, \frac{dI}{dt} \; = \; R \, I \; , \qquad I \; = \; \frac{dQ}{dt} \; = \; C \, \frac{dU}{dt} \; .$$

Nejvhodnější zřejmě bude vyjádřit z těchto vztahů diferenciální rovnici pro U:

$$\frac{d^2U}{dt^2} \; + \; \frac{R}{L} \, \frac{dU}{dt} \; + \; \frac{1}{LC} \, U \; = \; \frac{\mathcal{E}}{LC} \; . \tag{5.20}$$

To je ale rovnice pro vynucené kmity harmonického oscilátoru, kterou jsme v mechanice zapisovali ve tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} \; + \; 2 \, \delta \, \frac{dx}{dt} \; + \; \omega_0^2 \, x \; = \; f \; .$$

Přitom jsme označili *vlastní frekvenci* obvodu

$$\omega_0 \; = \; \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{5.21}$$

(tzv. *Thomsonův vzorec*), *dekrement útlumu*

$$\delta \; = \; \frac{R}{2L} \tag{5.22}$$

a frekvenci

$$\omega \; = \; \sqrt{\omega_0^2 \; - \; \delta^2} \; . \tag{5.23}$$

Uvažme napřed řešení homogenní rovnice, kdy emn $\mathcal{E} = 0$. V případě slabého útlumu ($\delta^2 - \omega_0^2 < 0$) se bude napětí v obvodu měnit harmonicky podle zákona

$$U(t) \; = \; U_0 \, \mathrm{e}^{-\delta t} \, \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Amplitudu U_0 a fázovou konstantu φ_0 musíme ovšem určit z počátečních podmínek. Proud I najdeme jako

$$I(t) \; = \; C \, \frac{dU}{dt} \; = \; C \, U_0 \, \mathrm{e}^{-\delta t} \, [- \, \delta \sin(\omega t + \varphi_0) \; + \; \omega \cos(\omega t + \varphi_0)] \; =$$

$$= \; \frac{CU_0\omega}{\sin\alpha} \, \mathrm{e}^{-\delta t} \, [\sin(\omega t + \varphi_0) \; \cos\alpha \; + \; \cos(\omega t + \varphi_0) \; \sin\alpha] \; =$$

$$= I_0 \, e^{-\delta t} \, \sin(\omega t + \varphi_0 + \alpha) \, .$$

Přitom jsme zavedli veličinu α, která vyjadřuje fázový rozdíl mezi napětím a proudem v obvodu vztahem

$$\text{cotg } \alpha \; = \; - \frac{\delta}{\omega} \, .$$

Při nulovém útlumu je cotg $\alpha = 0$ a proud je posunut vůči napětí právě o $\pi/2$. Obvod přitom kmitá na vlastní frekvenci $\omega = \omega_0$. Při kritickém útlumu ($\delta = \omega_0$) a silném útlumu ($\delta^2 - \omega_0^2 > 0$) nastává aperiodický režim a napětí i proud v obvodu klesají exponenciálně k nule.

Nechť nyní v obvodu působí harmonické emn $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t$. Amplituda vynucující síly je tedy $f_0 = \mathcal{E}_0 / LC$. Potom musíme řešit nehomogenní rovnici pro vynucené kmity, které je součtem obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Řešení homogení rovnice je vždy tlumeno a brzy klesne k nule. Obvod začne oscilovat na frekvenci vynucených kmitů Ω bez útlumu. Energie pohlcovaná na odporu bude dodávana zdrojem emn. Máme tak řešení

$$U(t) \; = \; U_0 \, \sin(\Omega \, t \; + \; \varphi_0),$$

kde amplitudu kmitů U_0 a fázovou konstantu φ_0 můžeme najít stejným způsobem jako v případě vynucených kmitů mechanického oscilátoru. Dostaneme tak

$$\text{tg } \varphi_0 \; = \; \frac{\omega_0^2 \; - \; \Omega^2}{2\delta \, \Omega} \; = \; \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\Omega \, C} \; - \; \Omega \, L \right) \, , \tag{5.24}$$

$$U_0 \; = \; \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} \; = \; \frac{\mathcal{E}_0}{LC} \, \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \; \varphi_0}} \; = \; \frac{\mathcal{E}_0}{RC\Omega} \; \cos \varphi_0 \, . \tag{5.25}$$

Pro proud dostaneme

$$I(t) \; = \; C \, \frac{dU}{dt} \; = \; C \; U_0 \, \Omega \cos(\Omega t + \varphi_0) \; = \; I_0 \; \cos(\Omega t + \varphi_0) \, , \tag{5.26}$$

takže amplituda proudu je

$$I_0 \; = \; C \; U_0 \; \Omega \; = \; \frac{\mathcal{E}_0}{R} \; \cos \varphi_0 \, . \tag{5.27}$$

Proud a napětí na kondenzátoru jsou tedy vzájemně posunuty o $\pi/2$ a proud je posunut vzhledem k emn o φ_0. Situace je znázorněna na obr. 5.12.

Amplituda napětí (a proudu) dosahuje maxima na rezonanční frekvenci

$$\Omega_r \; = \; \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \; = \; \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \, , \tag{5.28}$$

a to

$$U_{0max} \; = \; \frac{f_0}{2 \; \delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \; = \; \frac{\mathcal{E}_0}{RC\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \, . \tag{5.29}$$

Při $\Omega = 0$ nastává statická výchylka $U_{0st} = f_0/\omega_0^2$. Tangens φ_0 se mění od $\pi/2$ do $-\pi/2$ a při rezonanci je roven nule. To je rezonance v amplitudě.

Pokud jde o rezonanci v energii, musíme určit závislost I_0^2 na Ω. Pro energii nahromaděnou v obvodu máme

$$W \; = \; \frac{1}{2} \; L \; I_0^2 \; = \; \frac{\mathcal{E}_0^2 \; \Omega^2}{2L[\; (\; \omega_0^2 - \Omega^2 \;)^2 + 4 \; \delta^2 \Omega^2 \;]} \, . \tag{5.30}$$

Maximum energie v rezonanci odpovídá

$$W_{max} \; = \; \frac{\mathcal{E}_0^2}{8L\delta^2} \, .$$

obr. 5.12 obr. 5.13

Z rezonanční křivky v energii (obr. 5.13) můžeme určit dekrement útlumu. Z mechaniky víme, že šířka této rezonanční křivky v polovině výšky je rovna právě 2 δ. Činitel jakosti obvodu je pak roven

$$Q \;=\; \frac{\omega_0}{2\,\delta} \;=\; \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\;. \tag{5.31}$$

Zbývá vyšetřit otázku, jaký výkon vyvíjí zdroj emn v RLC obvodu. Okamžitý výkon, závislý na čase je

$$P \;=\; \mathcal{E}\; I \;=\; \mathcal{E}_0\; I_0\;\cos\Omega t\;\cos(\Omega t+\varphi_0) \;=\; \mathcal{E}_0\; I_0\;(\;\cos^2\Omega t\;\cos\varphi_0 \;-\; \cos\Omega t \sin\Omega t\;\sin\varphi_0\;)\;.$$

První člen se nazývá výkon činný, druhý výkon jalový. Vystředujeme-li totiž okamžitý výkon v čase, druhý člen vymizí a první dá

$$< P > = \;\frac{1}{2}\;\mathcal{E}_0\; I_0\;\cos\varphi_0 \;=\; \mathcal{E}_{ef}\; I_{ef}\;\cos\varphi_0\;. \tag{5.32}$$

Zavedli jsme efektivní hodnoty emn a proudu $\mathcal{E}_{ef} = \mathcal{E}_0/\sqrt{2}$, $\quad I_{ef} = I_0/\sqrt{2}$. Veličinu $\cos\varphi_0$ nazýváme *účiník*. Je-li účiník roven jedné, lze tedy střední výkon určit jako součin efektivních hodnot emn a proudu. Jinak záleží i na přítomnosti kapacity a indukčnosti v obvodu. Maximální výkon je odebírán při rezonanci, naopak blíží-li se φ_0 k $\pm\pi/2$, klesá výkon k nule.

Elektrické obvody v nichž působí harmonicky proměnné emn nazýváme *střídavými*. Také pro ně můžeme používat Ohmův zákon a Kirchhoffova pravidla a řešit je jako elektrické sítě. Musíme však vzít v úvahu, že emn a proudy jsou popsány jednak svými amplitudami jednak fázovými konstantami, mohou být vzájemně fázově posunuty. Sčítání vzájemně fázově posunutých sinusových a kosinusových proudů a napětí by bylo velmi složité. Navíc předpokládáme, že v celé síti je jedna společná úhlová frekvence Ω.

Jeden způsob, jak takové sítě řešit, je přechod ke komplexním obrazům emn a proudů nazývaným *fázory*. Fázory můžeme přitom znázorňovat v komplexní rovině vektorovými diagramy. Provedeme přiřazení

$$A_0\;\cos(\Omega t+\alpha) \;\;\to A_0\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\;= \hat{A}\;.$$

Lze se přesvědčit, že počítání s goniometrickými funcemi dá touž výslednou amplitudu a fázovou konstantu jako počítání s fázory. Výsledkem je ovšem komplexní číslo; chceme-li dostat časový průběh dané veličiny, stačí vynásobit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$ a vzít reálnou část.

obr. 5.14 obr. 5.15

obr. 5.16 obr. 5.17

Uvažme výše zkoumaný sériový RLC obvod. Emn a proudu můžeme přiřadit fázory $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0$ a $\hat{I} = I_0 e^{i\varphi_0}$. Pro fázory můžeme napsat Ohmův zákon v komplexním tvaru jako

$$Z = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\hat{I}} = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} e^{-i\varphi_0} = Z_0 e^{-i\varphi_0} . \tag{5.33}$$

Komplexní veličina Z se nazývá *impedance* obvodu. Podle (5.24) a (5.27) zjistíme, že velikost impedance je

$$Z_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$$

a tangens jejího argumentu

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{1}{R}\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) .$$

Je to tedy komplexní číslo

$$Z = R + i X = R + i \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) . \tag{5.34}$$

Reálnou část impedance R nazýváme *rezistance*, imaginární část X *reaktance*. Ta se skládá z *induktance* ΩL a *kapacitance* $1/\Omega C$. Vodivosti odpovídá převrácená hodnota impedance

$$Y = \frac{1}{Z} = G + i S$$

nazývaná *admitance*. Její reálná část G je *konduktance* a imaginární část S *susceptance*.

1. Paralelní RLC obvod

Na obr. 5.14 je znázorněn paralelní RLC obvod.
Při takovém paralelním zapojení se sčítají admitance:

$$Y = i \Omega C + \frac{1}{R + i \Omega L}$$

obr. 5.18 obr. 5.19

Tato admitance je reálná na rezonanční frekvenci

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

a v ideálním případě $R = 0$ bude na rezonančním kmitočtu nulová. V tom případě se paralelní obvod chová jako nekonečný odpor; všechna energie osciluje v obvodu a neprochází dále.

Bude-li obvod zapojen způsoby znázorněnými na obr. 5.15, 5.16, 5.17, budou odpovídající rezonanční frekvence rovny

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC - R^2C^2}}\,, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,.$$

2. <u>Trojfázový proud</u>

Při přenosu průmyslových střídavých proudů se používá trojfázové soustavy. Generátor v elektrárně produkuje tři střídavá napětí, která jsou fázově posunuta vždy o $2\pi/3$. Uspořádáme-li tato napětí do trojúhelníka (obr. 5.18) a budou-li amplitudy všech tří napětí stejné, bude zřejmě součet jejich fázorů nulový:

$$\hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \hat{U}_3 = 0\,.$$

Určíme proud protékající kterýmkoli vodičem vedení. Například do vrcholu 3 vtéká větví 2-3 proud $\hat{I}_1 = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, který se rozdělí na proud $\hat{I}_2 = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + 2\pi/3)}$ ve větvi 3-1 a proud $\hat{I} = I_{max} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ vycházející vedením z vrcholu 3. Položíme-li $\varphi = 0$, dostaneme z Kirchhoffova zákona

$$\hat{I} = \hat{I}_1 - \hat{I}_2 = I_0 \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3} \right) = I_0 \sqrt{3}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}\,,$$

a tedy

$$I_{max} = \sqrt{3}\, I_0\,.$$

Vektorový diagram skládání těchto proudů je na obr. (5.19).

Podobně bychom ukázali, že při uspořádání do hvězdy (obr. 5.20) bude výsledný proud čtvrtým (nulovým) vodičem roven nule. Pro napětí tentokrát platí vztah $U_{max} = \sqrt{3}\, U_0$, takže při efektivní hodnotě napětí mezi dvěma vrcholy 380 V dostáváme mezi kterýmkoli vrcholem a "nulákem" 22O V.

3. Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole

V předchozím odstavci jsme na základě zákona elektromagnetické indukce a zákona zachování elektrického náboje odvodili kompletní soustavu Maxwellových rovnic ve vakuu pro vektor intenzity elektrického pole a vektor magnetické indukce (5.5). Při řešení těchto rovnic vycházíme z toho, že magnetické

obr. 5.20

pole je solenoidální (div $\vec{B} = 0$) a tak můžeme zavést vektorový potenciál vztahem $\vec{B} = \text{rot}\ \vec{A}$. Dosazením do rovnice elmg indukce dostaneme

$$\text{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\ \text{rot}\ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\ .$$

Tedy

$$\text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0\ .$$

Pole $\vec{E}$ sice potenciální není, ale zato je potenciální pole uvedené v závorce. Můžeme proto zavést skalární potenciál φ vztahem

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\ \text{grad}\ \varphi\ . \tag{5.35}$$

Budeme tak řešit soustavu rovnic pro skalární a vektorový potenciál $\varphi(x, y, z, t)$, $\vec{A}(x, y, z, t)$ a pak najdeme vektory polí ze vztahů

$$\vec{E} = -\ \text{grad}\ \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\ , \qquad \vec{B} = \text{rot}\ \vec{A}\ . \tag{5.36}$$

Dosazením do Maxwellových rovnic dostaneme poměrně komplikované vztahy

$$\text{div}\left(\text{grad}\ \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\text{rot rot}\ \vec{A} = \mu_0\ \vec{j} - \varepsilon_0\mu_0\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{grad}\ \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\ .$$

Lze je upravit na

$$\Delta\ \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\ \text{div}\ \vec{A}$$

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\ \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\ \mu_0\ \vec{j} + \text{grad}\left(\text{div}\ \vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\ .$$

Skalární a vektorový potenciál však nejsou určeny jednoznačně a můžeme na ně klást dodatečné podmínky. Můžeme například požadovat splnění *Lorentzovy kalibrační (cejchovací) podmínky*

$$\text{div}\ \vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0\ . \tag{5.37}$$

Potom se soustava rovnic pro potenciály drasticky zjednoduší a navíc se obě rovnice stanou symetrickými:

$$\Delta\,\varphi \;-\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \;=\; -\,\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \qquad \Delta\,\vec{A} \;-\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \;=\; -\,\mu_0\,\vec{j}\;. \tag{5.38}$$

Zavedeme-li nový operátor zvaný *d'Alembertián*, který je vlastně zobecněným "laplasiánem", vztahem

$$=\;\Delta\;-\;\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,,$$

můžeme zapsat rovnice pro potenciály elektromagnetického pole ve velmi jednoduchém a přehledném tvaru

$$\varphi\;=\;-\,\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \qquad\qquad \vec{A}\;=\;-\,\mu_0\,\vec{j}\;. \tag{5.39}$$

Řešením této soustavy nehomogenních parciálních diferenciálních rovnic při zadaných hustotách náboje a proudu dostaneme potenciály a z nich pak podle (5.36) určíme vektory polí. V obecném případě to může být i obtížná úloha.

Najdeme jedno řešení Maxwellových rovnic ve vakuu, které popisuje rovinnou *elektromagnetickou vlnu.* Na potenciály naložíme podmínky div $\vec{A} = 0$, $\quad\varphi = 0$, které jsou v souladu s Lorentzovou podmínkou. Dále budeme předpokládat, že všechny veličiny závisí pouze na souřadnici z (směr šíření rovinné vlny) a t. Stačí tedy hledat pouze vektorový potenciál z d'Alembertovy rovnice $\vec{A} = 0$, která má tvar

$$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}\;-\;\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\;=\;0\;.$$

Řešením této rovnice je funkce

$$\vec{A}\;=\;\vec{A}_0\;\cos(\omega\,t\;-\;k\,z\;+\;\alpha),$$

která představuje rovinnou vlnu šířící se fázovou rychlostí

$$v_f\;=\;\frac{\omega}{k}\;=\;c\;. \tag{5.40}$$

Z podmínky div $\vec{A} = 0$ plyne $\partial A_z/\partial z = 0$, $\quad A_z = \text{konst} = 0$ (konstantní nenulové řešení nás nezajímá), a vektorový potenciál je tedy kolmý ke směru šíření vlny z. Můžeme proto v jeho směru zvolit třeba osu x: $\vec{A} \equiv (A, 0, 0)$. Elektrické a magnetické pole vlny tedy bude

$$\vec{E}\;=\;-\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,, \qquad \vec{B}\;=\;\mathrm{rot}\;\vec{A}\,, \tag{5.41}$$

a jejich jediné nenulové složky

$$E_x\;=\;\omega\;A_0\;\sin(\omega\,t\;-\;k\,z\;+\;\alpha), \quad B_y\;=\;k\;A_0\;\sin(\omega\,t\;-\;k\,z\;+\;\alpha)\;. \tag{5.42}$$

Elektrické a magnetické pole se mění podle téhož harmonického zákona, ve fázi, a všechny tři vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$ (vektor $\vec{k}$ ve směru šíření vlny nazýváme vlnovým vektorem) tvoří pravotočivou soustavu, jak je vidět na obr. 5.21. [30]

Elektromagnetická vlna přenáší energii W a hybnost $\vec{P}$ a je tedy plně reálným fyzikálním objektem. Hustotu toku energie (energii přenesenou za jednotku času jednotkou plochy) nazýváme *Poyntingův vektor* $\vec{S}$. Zákon zachování energie můžeme matematicky vyjádřit jako rovnici kontinuity

$$\frac{\partial w}{\partial t}\;+\;\mathrm{div}\;\vec{S}\;=\;0\;. \tag{5.43}$$

[30] Elektromagnetická vlna je tedy příčná a pravotočivá. Mohla by vzniknout otázka, zda existují také levotočivé elektromagnetické vlny. Tato otázka však není zcela na místě vzhledem k tomu, že magnetická indukce představuje axiální vektor. Přejdeme-li inverzí k levotočivé soustavě souřadnic, změní vektory $\vec{E}$ a $\vec{k}$ znaménko, zatímco vektor $\vec{B}$ nikoli. Vlna se tedy stane levotočivou. Je ovšem zřejmé, že změna soustavy souřadnic nemůže nic změnit na fyzikálním charakteru elektromagnetické vlny, takže oba popisy jsou zcela rovnocenné.

obr. 5.21 obr. 5.22

Zde w je objemová hustota energie elektromagnetického pole. Tuto hustotu pro pole ve vakuu jsme již určili jako (4.37). Pomocí Maxwellových rovnic můžeme zákon zachování energie upravit na tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\, E^2}{2} + \frac{B^2}{2\,\mu_0}\right) = \varepsilon_0\, \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\, \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\, (\, \vec{E} \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{rot} \vec{E}\,) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} (\vec{B} \times \vec{E})\, .$$

Odtud Poyntingův vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\, \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}\, , \tag{5.44}$$

Hustota hybnosti přenášené elektromagnetickou vlnou je $\vec{S}/c^2$. Dopadá-li tedy elektromagnetická vlna kolmo na nějakou plochu a je na ní zcela pohlcena, předala jednotce této plochy za dobu Δt zároveň hybnost obsaženou v objemu $c\, \Delta t$ (obr. 5.22). Vyvinula tedy mechanický tlak

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\, \frac{S}{c^2}\, c\, \Delta t = \frac{S}{c}\, . \tag{5.45}$$

Je-li plocha dokonale odrazivá, bude tlak elektromagnetické vlny dvojnásobný.

Maxwellovy rovnice jsou rovnicemi makroskopickými, vystupují v nich náboje, proudy a pole měřené našimi makroskopickými přístroji a mohou být tak přímo konfrontovány z experimentem. V minulém století, když bylo zjištěno, že z kovů mohou vylétávat elektrony a že látka je vlastně tvořena nabitými částicemi, vytvořil Lorentz takzvanou elektronovou teorii hmoty. Neznal sice ještě stavbu atomu, ale představoval si látku jako vakuum, v němž jsou rozloženy a pohybují se nabité částice. Tyto částice jsou popsány rozložením *mikroskopických* nábojových a proudových hustot, které ovšem nejsou přímo měřitelné, a tak vznikají *mikroskopická* elektrická a magnetická pole podřizující se rovnicím stejného tvaru jako jsou rovnice Maxwellovy. Rovnice pro mikroskopická, lokální pole a hustoty se nazývají *Lorentzovy rovnice* a můžeme je zapsat jako

$$\operatorname{div} \vec{E}_l = \frac{\rho_l}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot} \vec{B}_l = \mu_0\, \vec{j}_l + \varepsilon_0 \mu_0\, \frac{\partial \vec{E}_l}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_l = -\frac{\partial \vec{B}_l}{\partial t} \qquad \operatorname{div} \vec{B}_l = 0\, . \tag{5.46}$$

Od Lorentzových rovnic můžeme přejít k rovnicím Maxwellovým tak, že mikroskopické veličiny vystředujeme přes dostatečně velké prostorové a časové intervaly. U nábojů a proudů pak musíme rozlišovat veličiny vázané v látce a veličiny volné. Označíme

$$< \vec{E}_l > = \vec{E}\, , \quad < \vec{B}_l > = \vec{B}\, , \quad < \rho_l > = \rho + \rho_v\, , \quad < \vec{j}_l > = \vec{j} + \vec{j}_m + \vec{j}_p\, .$$

Podle (2.42), (4.54) a (3.10) máme pro vázané náboje, magnetizační a polarizační proudy

$$\rho_v \;=\; -\,\mathrm{div}\;\vec{P}\;, \quad \vec{j}_m \;=\; \mathrm{rot}\;\vec{M}, \quad \vec{j}_p \;=\; \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\;.$$

Zavedeme-li nyní vektory

$$\vec{D} \;=\; \varepsilon_0\;\vec{E} \;+\; \vec{P}\;, \quad \vec{H} \;=\; \frac{1}{\mu_0}\;\vec{B} \;-\; \vec{M}\;,$$

dostaneme

$$\mathrm{div}\;\vec{E} \;=\; \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \;=\; \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\mathrm{div}\;\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

odkud po vynásobení ε_0 máme

$$\mathrm{div}\;\vec{D} \;=\; \rho\;,$$

kde ρ je hustota pouze volných nábojů.

Dále

$$\mathrm{rot}\;\vec{B} \;=\; \mu_0\;\vec{j} + \mu_0\;\vec{j}_m + \mu_0\;\vec{j}_p + \varepsilon_0\;\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \;=\; \mu_0\;\vec{j} + \mu_0\;\mathrm{rot}\;\vec{M} + \mu_0\;\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0\;\varepsilon_0\;\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\;.$$

Dělením μ_0 dostaneme

$$\mathrm{rot}\;\vec{H} \;=\; \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\;,$$

kde $\vec{j}$ je hustota pouze volných proudů.

Tak dospíváme ke konečné podobě Maxwellových rovnic pro obecné elektromagnetické pole v látkovém prostředí

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\;\vec{D} \;&=\; \rho & \qquad \mathrm{rot}\;\vec{H} \;&=\; \vec{j} \;+\; \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\;\vec{E} \;&=\; -\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \qquad \mathrm{div}\;\vec{B} \;&=\; 0\;. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Tyto rovnice je třeba doplnit vztahy

$$\vec{D} \;=\; \varepsilon\;\vec{E}\;, \qquad \vec{B} \;=\; \mu\;\vec{H}\;, \qquad \varepsilon_0\;\mu_0 \;=\; \frac{1}{c^2}$$

a hraničními podmínkami

$$\begin{aligned} \mathrm{Div}\;\vec{D} \;&=\; \sigma & \qquad \mathrm{Rot}\;\vec{H} \;&=\; \alpha \\ \mathrm{Rot}\;\vec{E} \;&=\; 0 & \qquad \mathrm{Div}\;\vec{B} \;&=\; 0\;. \end{aligned} \tag{5.48}$$

obr. 5.23

Příklady

5.1 Dlouhým přímým vodičem teče proud I. Určete magnetický indukční tok obdélníkovou smyčkou umístěnou podle obr. 5.23. Vzdaluje-li se smyčka od vodiče rychlostí v určete indukované emn.

$$\left[\ \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}\ , \qquad \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(a_2-a_1)lv}{a_1 a_2}\ \right]$$

5.2 Dvě dlouhé dokonale vodivé kolejnice jsou od sebe vzdáleny 0,5 m a spojeny odporem 0,2 Ω. Po nich klouže dokonale vodivá tyč rychlostí 4 m.s^{-1}. Kolmo k rovině kolejnic působí magnetické pole 0,5 T. Určete indukované emn, sílu potřebnou k udržení konstantní rychlosti, mechanický a tepelný výkon v tomto zařízení.

[1 V, 1,25 N, 5 W, 5 W]

5.3 Určete vlastní indukčnost a magnetickou energii solenoidu o poloměru 1 cm a délce 50 cm s 6 závity na 1 cm délky, protéká-li závity proud 1 A.

[71 μH, 3,5.10^{-5} J]

5.4 Určete vlastní indukčnost toroidální cívky malého průřezu 1 cm^2 o poloměru středové kružnice 5 cm, s celkovým počtem závitů N=100.

[4.10^{-6} H]

5.5 Určete vlastní indukčnost toroidu obdélníkového průřezu o vnitřním poloměru 10 cm, vnějším poloměru 20 cm a výšce 5 cm, je-li na něm navinuto 1 000 závitů.

[6,93 mH]

5.6 Kovový kotouč poloměru 10 cm rotuje s frekvencí 60 Hz kolem osy v homogenním magnetickém poli 0,2 T kolmém k rovině kotouče. Najděte potenciální rozdíl mezi středem a okrajem kotouče. Jaký bude tento rozdíl bez magnetického pole?

[0,377 V, $4{,}0.10^{-9}$ V]

5.7 Čtvercová smyčka o straně 10 cm rotuje v homogenním magnetickém poli 0,2 T kolem osy rovnoběžné s rovinou čtverce a kolmé k poli s frekvencí 50 Hz. V okamžiku $t = 0$ leží smyčka v rovině kolmé k poli. Určete závislost indukovaného emn na čase.

[$0, 2\pi \sin 100\pi t$]

5.8 Jaké maximální emn se může indukovat v cívce se 4 000 závity o středním poloměru 12 cm rotující s frekvencí 30 Hz v zemském magnetickém poli o indukci 5.10^{-5} T?

[1,73 V]

5.9 Dvě cívky jsou indukčně vázány vzájemnou indukčností 5 H. Jak se musí měnit proud v primární cívce, aby se v sekundární indukovalo konstantní emn 1 V? Může se takto indukovat trvale?

[- 0,2 t+ konst, ne]

5.10 Dvě cívky mají indukčnosti 0,2 H, 0,3 H a vzájemnou indukčnost 0,1 H. Jaká bude výsledná indukčnost při zapojení těchto cívek do série?

[0,7 H nebo 0,3 H, podle způsobu zapojení]

5.11 Kondenzátor o kapacitě 0,1 μF s počátečním napětím 1 000 V se vybíjí přes odpor 10 Ω. Za jakou dobu poklesne velikost náboje na kondenzátoru na úroveň jednoho elementrárního náboje?

[$3, 4.10^{-5}$s]

5.12 Kondenzátor o kapacitě 100 μF je nabit na 10 000 V. Vybíjíme jej přes odpor 1 kΩ. Za jak dlouho se můžeme kondenzátoru bez nebezpečí dotýkat?

[asi za 0,5 - 1 s, podle naší tělesné nátury]

5.13 Dokažte, že energie rozptýlená na odporu během vybíjení kondenzátoru je právě rovna energii, která byla v kondenzátoru nahromaděna.

5.14 Cívka má odpor 100 Ω. Jsou-li přívody cívky zkratovány v době, kdy cívkou prochází ustálený proud, klesne proud v cívce na jednu desetinu původní hodnoty za 0,01 s. Jaká je vlastní indukčnost cívky?

[435 mH]

5.15 K nabití akumulátoru je potřeba 20 ampérhodin ustáleného proudu. Za jak dlouho se akumulátor nabije střídavým proudem o efektivní hodnotě 1 A, který usměrníme dvoucestným usměrňovačem?

[22,2 h]

5.16 Prostor mezi deskami kondenzátoru je vyplněn dielektrikem o relativní permitivitě 3 a rezistivitě 10^8 Ω.m. Určete časovou konstantu kondenzátoru.

$[2,65.10^{-3}\mathrm{s}]$

5.17 Sériový RLC obvod má vlastní frekvenci f_0=600 kHz, kapacitu 370 pF a odpor 15 Ω. Určete činitel jakosti obvodu.

[50]

5.18 Sériový obvod má kapacitu 0,1 μF a indukčnost 0,1 H. Jaký musí být odpor R, aby nastal právě případ kritického útlumu?

[2 kΩ]

5.19 Sériový rezonanční obvod $R = 0,1\ \Omega,\ L = 1\ H,\ C = 100\ \mu F$ je připojen ke zdroji střídavého napětí o amplitudě 1 V. Jaká bude amplituda napětí a proudu při rezonanci?

[1 000 V, 10 A]

5.20 Mějme spotřebič o reálné impedanci R, který při efektivním napětí 120 V vyvíjí výkon 60 W. Chceme provozovat tento spotřebič na témž výkonu při efektivní hodnotě napětí 240 V v síti 50 Hz. Jakou indukčnost nebo jakou kapacitu bychom museli předřadit?

[1,32 H nebo 7,67 μF]

S O U S T A V Y   F Y Z I K Á L N Í C H   J E D N O T E K

Základem dnešních měrových soustav je systém metrický, který se zrodil v období Velké francouzské revoluce. Jednotka *metr* byla původně definována z délky kvadrantu zemského poledníku jako jeho desetimiliontá část a realizována v podobě tzv. archivního metru z r. 1799. Bylo to platinové pravítko průřezu 25 krát 4 mm, které sloužilo jako míra koncová a je dnes uloženo v Louvru. V r.1869 bylo upuštěno od poledníkové definice a za metr prohlášena délka prototypu. Nový prototyp zvaný mezinárodní metr byl zhotoven r.1889 a představuje kolejničku z platiny a iridia (9:1) o průřezu 20 krát 20 mm. Vzdálenost metru je na něm vyznačena dvěma vrypy, je to tedy míra čárková. V roce 1960 byla délka metru stanovena pomocí vlnové délky světla až konečně r. 1983 byla přijata dnešní definice:
metr je délka rovnající se vzdálenosti, kterou uběhne světlo ve vakuu za 1/299 792 458 s. Pokud by se tedy podařilo dále zpřesnit hodnotu rychlosti světla ve vakuu, zůstala by její číselná hodnota stejná a změnil by se metr.

Jednotka hmotnosti, *kilogram*, byla rovněž stanovena pomocí prototypu. Je jím rovnostranný platino - iridiový válec o průměru 38 mm a je uložen v Sèvres u Paříže. Byl zhotoven r. 1889 a od té doby se nepodařilo najít vhodnou přírodní definici jednotky hmotnosti.

Pokud jde o jednotku času, *sekundu*, byla původně stanovována z astronomických měření, jako 1/86 400 středního slunečního dne, pak z délky tropického roku a v r.1967 byla sekunda definována jako *doba trvání 9 192 631 770 period záření, které přísluší přechodu mezi dvěma velmi jemnými hladinami základního stavu atomu cesia 133.*

V roce 1875 byla uzavřena mezinárodní metrická konvence mezi 17 státy (včetně Rakousko-Uherska), jejichž počet se od té doby neustále zvětšoval. Československo k ní přistoupilo jako nový stát 1922. Nejvyšším orgánem konvence je Generální konference pro míry a váhy, která se schází každé čtyři roky v Paříži a upravuje otázky jednotek a měření. Otázky jednotek a měření elektrických a magnetických veličin byly zprvu upravovány na mezinárodních elektrotechnických kongresech, z nichž první se sešel v Paříži r. 1881.

Elektrické a magnetické jednotky původně navazovaly na soustavu CGS (centimetr - gram - sekunda) a vycházely ze symetrie Coulombových zákonů pro elektrické a magnetické náboje:

$$F \;=\; k_1\,\frac{Q_1\,Q_2}{r^2}\,, \qquad F \;=\; k_2\,\frac{M_1\,M_2}{r^2}\,.$$

Položíme-li zde konstanty $k_1,\ k_2$ rovny jedné a bezrozměrné, dostaneme nezávislé jednotky pro elektrický a magnetický náboj s týmž rozměrem $\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}$. Intenzitu magnetického pole $\vec{H}$ pak definujeme analogicky intenzitě elektrického pole jako sílu působící na jednotkový magnetický náboj.

Vedle Coulombových zákonů máme však ještě další silový zákon, podle něhož nekonečný přímý vodič vyvolává v okolí magnetické pole o velikosti intenzity

$$H \;=\; k_3\,\frac{2\,I}{r}\,.$$

Tento zákon spojuje elektrické a magnetické veličiny. Protože jednotky těchto veličin byly již určeny volbou konstant $k_1,\ k_2$, není konstanta k_3 nezávislá a je možno ji změřit. To učinil Weber a s překvapením zjistil, že tato konstanta je rovna převrácené hodnotě rychlosti světla ve vakuu.

Obecně platí mezi těmito konstantami vztah $k_1 k_2/k_3 = c^2$. Můžeme tedy vždy dvě z nich volit a třetí je pak určena. Položíme-li k_1 a k_3 rovny jedné, dostaneme elektrostatickou soustavu CGSE, položíme-li k_2

a k_3 rovny jedné, magnetickou soustavu CGSM, položíme-li k_1 a k_2 rovny jedné, vyjde nám $k_3 = 1/c$ a dostaneme Gaussovu absolutní soustavu. Ta se dosud běžně používá v zahraniční fyzikální literatuře. Má tu výhodu, že vektory intenzity elektrického a magnetického pole, elektrické a magnetické indukce mají v ní všechny stejný rozměr a nevyskytují se v ní nefyzikální konstanty ε_0 a μ_0. Zato se v řadě vzorců, například u magnetické Lorentzovy síly, objevuje koeficient $1/c$.

Protože jednotky napětí, proudu a odporu v soustavách CGS neměly vhodnou velikost pro praktické užití, zavedl mezinárodní elektrotechnický kongres v Chicagu r. 1893 tazvané praktické jednotky: ohm jako 10^9 CGSM, ampér jako 10^{-1} CGSM a volt jako 10^8 CGSM. Zároveň definoval i experimentální prototypy těchto jednotek (ohm jako odpor rtuťového sloupce za definovaných podmínek, ampér jako proud, který při elektrolýze vyloučí z roztoku dusičnanu stříbrného určité množství stříbra a volt jako určitou část napětí Westonova článku). Součin voltu a ampéru dává jednotku výkonu jeden watt rovný 10^7 jednotek výkonu CGS. Aby se dosáhl soulad mezi těmito praktickými elektrotechnickými jednotkami a mechanickými jednotkami, přešlo se od soustavy CGS k soustavě MKS (metr - kilogram - sekunda), kde je jednotkou výkonu právě watt.

V roce 1882 navrhl Heaviside takzvanou racionalizaci elektrických a magnetických jednotek (vlastně normování toku siločar na jednotku prostorového úhlu) a konstanty $k_1,\ k_2$ dostaly tvar

$$k_1 \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,, \qquad k_2 \;=\; \frac{1}{4\pi\mu_0}\,.$$

Pokud by elektrický a magnetický náboj byly skutečně dvě nezávislé veličiny, bylo by možno nezávisle volit konstanty $\varepsilon_0,\quad \mu_0$ a tím určit soustavu jednotek. V Gaussově absolutní soustavě by stačilo zvolit $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1/4\pi$. Protože se však ukázalo, že magnetický náboj je vázán s nábojem elektrickým a pro konstanty ε_0, μ_0 platí vztah (4.10), můžeme vlastně volit jen jednu konstantu.

A tak Generální konference v roce 1948 rozhodla položit $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ m.kg.s^{-2}A^{-2} a definovat tak jako základní jednotku pro elektromagnetické veličiny *ampér* (viz definice na str. 146). Tím vznikla soustava MKSA. Později byly doplněny základní veličiny z dalších oblastí fyziky, a to jednotka teploty *kelvin* (jako *273,16tá část termodynamické teploty trojného bodu vody*, 1954), jednotka svítivosti *kandela* (jako *svítivost zdroje, který vysílá monochromatické záření frekvence 540.*10^{12} *Hz a jehož zářivost v daném směru činí 1/683 wattů na steradián*, 1979) a jednotka látkového množství *mol* (jako *látkové množství soustavy, která obsahuje právě tolik elementárních jedinců, kolik je atomů v 0,012 kg uhlíku 12*, 1971).

V roce 1960 přijala Generální konference soustavu MKSA doplňovanou o další jednotky jako ucelenou soustavu fyzikálních jednotek pod názvem le Système International d'Unités (SI), která je postupně uzákoňována v dalších zemích. U nás byla zavedena zákonem z r. 1962 a včleněna do norem. Soustava SI není ovšem uzavřena, každé čtyři roky se schází Generální konference a vnáší další změny a upřesnění. I když je otázka soustavy fyzikálních jednotek jistě důležitá, není na druhé straně třeba ji přeceňovat. Jestliže při řešení nějakého fyzikálního problému se ukáže výhodnější použít jednotek jiných, fyzik neváhá to učinit. Jedna věc jsou totiž zákony a normy lidské, které mohou být na konferencích měněny, jiná věc jsou zákony přírodní, které měněny být nemohou.

Uvedeme přehled nejdůležitějších mechanických a elektromagnetických fyzikálních veličin a jejich jednotek. V posledním sloupci uvádíme převodní koeficient k mezi soustavou SI a soustavou Gaussovou

veličina	rozměr	jednotka	k
frekvence	T^{-1}	Hz	-
rychlost	LT^{-1}	$m.s^{-1}$	-
zrychlení	LT^{-2}	$m.s^{-2}$	-
hybnost	LMT^{-1}	$kg.m.s^{-1}$	-
síla	LMT^{-2}	N	-
tlak	$L^{-1}MT^{-2}$	Pa	-
energie	L^2MT^{-2}	J	-
výkon	L^2MT^{-3}	W	-
proud	I	A	3.10^9
náboj	TI	C	3.10^9
intenzita el. pole	$LMT^{-3}I^{-1}$	$V.m^{-1}$	$1/3.10^4$
potenciál, emn	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	V	1/300
el. indukce	$L^{-2}TI$	$C.m^{-2}$	$12\pi.10^5$
el. indukční tok	TI	C	$12\pi.10^9$
el. dipól. moment	LTI	C.m	3.10^{11}
polarizace	$L^{-2}TI$	$C.m^{-2}$	3.10^5
kapacita	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	F	9.10^{11}
odpor	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	Ω	$1/9.10^{11}$
vodivost	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	S	9.10^{11}
mg. indukce	$MT^{-2}I^{-1}$	T	10^4
mg. indukční tok	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	Wb	10^8
intenzita mg. pole	$L^{-1}I$	$A.m^{-1}$	$4\pi.10^{-3}$
mg. dipól. moment	L^2I	$A.m^2$	10^3
magnetizace	$L^{-1}I$	$A.m^{-1}$	10^{-3}
indukčnost	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	H	10^9
mmn	I	A	$4\pi.10^{-1}$
mg. odpor	$L^{-2}M^{-1}T^2I^2$	H^{-1}	$4\pi.10^{-7}$
mg. vodivost	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	H	$10^7/4\pi$

Otázky:

01. Základní postuláty STR, Lorentzovy transformace a jejich důsledky
02. Relativistické skládání rychlostí, aberace
03. Hmotnost, hybnost a energie v STR
04. Základní postuláty OTR a její experimentální ověření
05. Elektrický náboj v klidu a za pohybu
06. Coulombův zákon a jeho experimentální ověření
07. Elementární náboj a metody jeho určování
08. Energie soustavy nábojů, hustota energie elektrického pole
09. Gaussův zákon
10. Maxwellovy rovnice elektrostatického pole a jejich řešení
11. Multipólový rozvoj elektrostatického pole
12. Elektrický dipól a jeho pole
13. Elektrická dvojvrstva
14. Vektor elektrické polarizace, polarizovaná tělesa
15. Vodiče v elektrostatickém poli
16. Základní úloha elektrostatiky a její řešení
17. Kapacita, kondenzátor, energie kondenzátoru
18. Elektrostatické pole v dielektriku, vektor elektrické indukce
19. Stacionární elektrický proud a pole
20. Rovnice kontinuity elektrického proudu
21. Ohmův zákon v integrálním a diferenciálním tvaru
22. Klasická teorie vodivosti, vodivost elektrolytů a plynů
23. Tolmanův - Stewartův pokus
24. Vodivost kondenzovaných látek, supravodivost
25. Elektromotorické napětí a jeho zdroje
26. Kirchoffovy zákony a řešení sítí
27. Jouleův zákon v integrálním a diferenciálním tvaru
28. Elektrické pole pohybujícího se náboje
29. Síly mezi pohybujícími se náboji, síla Lorentzova
30. Magnetická indukce a vektorový potenciál
31. Maxwellovy rovnice stacionárních polí
32. Ampérův zákon
33. Biotův - Savartův zákon
34. Transformace složek elektrického a magnetického pole
35. Síly působící mezi elektrickými proudy
36. Magnetický tlak a hustota energie magnetického pole
37. Pohyb nabité částice v elektrickém a magnetickém poli
38. Hallův jev
39. Indukčnost, solenoid a energie solenoidu
40. Faradayův zákon elektromagnetické indukce
41. Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole, posuvný proud
42. Elektromagnetická vlna
43. Přechodové stavy v RC a RL obvodu
44. Impedance
45. Rezonance v sériovém RLC obvodu
46. Magnetický dipól a jeho pole
47. Vektor magnetizace a intenzity magnetického pole, magnetika
48. Magnetické obvody
49. Maxwellovy rovnice v látkovém prostředí, vztah k Lorentzovým rovnicím
50. Soustavy jednotek ve fyzice

Obsah

Předmluva

Předkládaná skripta jsou určena studentům prvního ročníku Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze jako pomůcka při studiu základního kursu fyziky ve druhém semestru. Mohou ovšem sloužit i dalším zájemcům a studentům vyšších ročníků k vyhledání potřebné informace. Vycházejí s mnohaleté pedagogické zkušenosti autora s výukou předmětu Elektřina a magnetismus a ve srovnání s dříve používanými skripty jsou pojata přehledněji a systematičtěji, těsněji sledují přednáškový výklad. Aplikace teorie na konkretní problémy jsou vyčleněny do číslovaných úloh, k procvičení látky a přípravě ke zkouškám slouží příklady za jednotlivými kapitolami a závěrečné otázky. Skripta tvoří jeden celek s připravovanými skripty autora Mechanika.

Skripta nemají ovšem nahradit učebnice a další monografickou literaturu, se kterou musí studenti fyzikálních a fyzikálně inženýrských oborů pracovat. V tomto ohledu je k dispozici učebnice autorů B. Sedláka a I. Štolla "Elektřina a magnetismus" (Academia, Karolinum 1993), kde je možno najít odkazy i na další literaturu a také informaci o historickém vývoji poznatků o elektřině a magnetismu. Klasickou učebnicí, v níž je stále možno najít cenné poučení, je kniha V. Petržílky a S. Šafraty "Elektřina a magnetismus" z r. 1953.

Autor děkuje všem, kde v průběhu mnoha let přispěli ke zdokonalování výuky tohoto předmětu a především odhalování chyb a omylů (což je ovšem proces nikdy nekončící), spolupracovníkům na katedře fyziky, studentům a zejména recenzentovi.

Praha září 1994

I. Štoll