1. Síly působící mezi pohybujícími se náboji

Nejdříve určíme intenzitu elektrického pole pohybujícího se bodového náboje. V elektrostatice je velikost náboje určována z Coulombovy síly, kterou tento náboj působí na zkušební jednotkový náboj v dané vzdálenosti r. Pro pohybující se náboj však Coulombův zákon neplatí a síla mezi dvěma náboji může nyní záviset na jejich vzájemné poloze vzhledem ke směru pohybu, případně na rychlosti nábojů. Ocitáme se tak v situaci, že vlastně nevíme, jak určit velikost pohybujícího se náboje.

Budeme proto postulovat platnost Gaussova zákona, který je obecnější než Coulombův, a budeme předpokládat, že platí i pro náboj v libovolném pohybu. Obklopíme bodový náboj v daném okamžiku myšlenou kulovou plochou poloměru r a definujeme velikost náboje pomocí toku intenzity elektrického pole touto plochou: [1]

$$q \;=\; \varepsilon_0 \oint_K \vec{E}\cdot d\vec{S}\,. \tag{4.1}$$

Pokusíme se nyní zjistit, jak budou rozloženy siločáry kolem bodového pohybujícího se náboje. V prvním přiblížení, pro malé rychlosti, očekáváme, že tyto siločáry budou radiální a izotropní jako u pole Coulombova a budou se přemisťovat spolu s nábojem. Upřesníme toto očekávání. Za tím účelem provedeme myšlený pokus s pohybujícím se nabitým deskovým kondenzátorem. Nechť kondenzátor je klidu nabit s plošnou hustotou σ_0, jeho desky orientovány kolmo k ose z a intenzita pole mezi deskami má velikost $E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$ (obr. 4.1).

Utíkejme nyní s kondenzátorem rovnoměrně rychlostí $\vec{v}$ ve směru osy x. Podle relativistické kontrakce délek (1.12) se při pohybu zkrátí podélný rozměr desek, a tedy se zmenší i jejich plocha koeficientem $1/\gamma \;=\; \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Protože náboj je relativisticky invariantní a jeho velikost se za pohybu nemění, změní se plošná hustota náboje a velikost intenzity pole na

$$\sigma \;=\; \frac{Q}{S} \;=\; \frac{Q\gamma}{S_0} \;=\; \gamma\,\sigma_0\,, \qquad E \;=\; \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \;=\; \gamma\,\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \;=\; \gamma\,E_0\,.$$

Bude-li se takto orientovaný kondenzátor pohybovat ve směru y, změní se pole stejným způsobem. Při pohybu ve směru osy z se velikost desek nezmění, ale desky se sblíží. To neovlivní hustotu náboje ani intenzitu pole, změní se ovšem napětí na kondenzátoru.

Mějme nyní klidovou soustavu S a pohybující se soustavu S' jako na obr. 1.6 a budiž S' vlastní soustava kondenzátoru (soustava pohybující se spolu s kondenzátorem ve směru osy x). Orientujeme-li nyní kondenzátor tak, aychom mohli sledovat změny jednotlivých složek pole dostaneme následující transformační vzorce pro složky intenzity elektrického pole:

$$E_x \;=\; E'_x\,, \qquad E_y \;=\; \gamma\,E'_y\,, \qquad E_z \;=\; \gamma\,E'_z\,. \tag{4.2}$$

Připomeňme, že jde o transformaci vzhledem k soustavě S', v níž jsou elektrické náboje v klidu.

Mějme nyní bodový náboj q pohybující se rovnoměrně přímočaře podél osy x a spojme s ním počátek O'. U rovnoměrného přímočarého pohybu je lhostejno, v kterém okamžiku budeme pole zkoumat, a je proto výhodné zvolit okamžik $t = t' = 0$ v němž souřadné osy obou soustav splývají (obr. 4.2).

Potom se Lorentzovy transformace zjednodušují na $x' = \gamma\,x, \quad z' = z$. Protože v čárkované soustavě je pole Coulombovo, dostaneme pro transformaci složek:

$$E'_x \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\cos\theta'}{r'^2} \;=\; k\,\frac{x'}{r'^3} \;=\; k\,\gamma\,\frac{x}{r'^3} \;=\; E_x\,,$$

[1] Velikost náboje tak definujeme podle normální složky síly působící na zkušební náboj rovnoměrně rozprostřený na kulové ploše vystředované po této ploše.

obr. 4.1

obr. 4.2

$$E'_z \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sin\theta'}{r'^2} \;=\; k\frac{z'}{r'^3} \;=\; k\,\frac{z}{r'^3} \;=\; \frac{1}{\gamma}\,E_z\,,$$

neboli

$$\vec{E} \;=\; \gamma\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r'^3}\,. \tag{4.3}$$

Z provedených transformací je vidět, že platí

$$\frac{E'_x}{E'_z} \;=\; \frac{x'}{z'}, \qquad \frac{E_x}{E_z} \;=\; \frac{x}{z}\,.$$

To znamená, že při rovnoměrném přímočarém pohybu náboje zůstává elektrické pole radiální, centrální. Siločáry zůstávají v přímkách vycházejících z náboje a mohou se pouze natáčet jako pevné tyčky.

Určíme hustotu rozložení siločar v různých směrech, tj. velikost intenzity elektrického pole:

$$E^2 \;=\; k^2\,\gamma^2\,\frac{x^2+z^2}{r'^6} \;=\; k^2\,\gamma^2\,\frac{x^2+z^2}{[(\gamma x)^2+z^2]^3} \;=\; \frac{k^2}{\gamma^4}\,\frac{x^2+z^2}{(x^2+z^2-\beta^2 z^2)^3} \;=$$

$$=\; k^2\,\frac{(1-\beta^2)^2}{(x^2+z^2)^2\left(1-\frac{\beta^2 z^2}{x^2+z^2}\right)^3} \;=\; k^2\,\frac{(1-\beta^2)^2}{r^4(1-\beta^2\sin^2\theta)^3}\,.$$

Označíme-li funkci úhlu θ

$$\Gamma \;=\; \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \tag{4.4}$$

nazývanou někdy "Heavisideův faktor", můžeme vyjádřit výsledné pole bodového rovnoměrně přímočaře se pohybujícího náboje v okamžiku nula jako

$$\vec{E} \;=\; \Gamma\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\,. \tag{4.5}$$

Průběh siločar tohoto pole je na obr. 4.3.

Toto pole se přemisťuje spolu s nábojem rychlostí v. V každém okamžiku se liší od Coulombova pole pouze faktorem Γ, který je relativistickou funkcí druhého řádu vzhledem k v/c. Zdálo by se tedy, že při

obr. 4.3

malých rychlostech nábojů ve vodičích nehrají relativistické efekty žádnou úlohu a že jejich vliv se uplatní teprve u nabitých částic pohybujících se v urychlovačích rychlostmi blízkými rychlosti světla ve vakuu. Skutečně elektrické pole takzvaných ultrarelativistických elektronů ($v \approx c$) je soustředěno prakticky ve směru příčném ke směru pohybu. Jak ale uvidíme, i při pomalých pohybech nábojů mohou relativistické jevy sehrát rozhodující úlohu, což je jistě překvapující.

V souvislosti s elektrickým polem pohybujícího se náboje učiníme ještě tři poznámky.

1. Lze se přesvědčit, že celkový tok intenzity elektrického pole (4.5) zůstává roven q/ε_0. Integrací ve sférických souřadnicích po ploše koule poloměru r obklopující náboj dostáváme

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E\, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \frac{q}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \Gamma \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2\theta)^{3/2}} \sin\theta \, d\theta = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

(substituce $\cos\theta = x$).

2. Pole pozorované v bodě A ve vzdálenosti r od náboje ve skutečnosti neodpovídá stavu náboje v okamžiku nula. Podle STR se jakákoli změna může projevit ve vzdálenosti r nejdříve za dobu $t = r/c$. Pole v bodě A tedy odpovídá stavu náboje v okamžiku $t = -R/c$, kde R je vzdálenost, kterou se informace o tomto poli dostala rychlostí c od náboje do bodu A. Náboj se přitom nacházel na ose x ve vzdálenosti $vt = vR/c$ před počátkem (viz obr. 4.4). Je poměrně jednoduchou geometrickou úlohou vyjádřit pole $\vec{E}$ nikoli jako funkci $\vec{r}$, ale jako funkci $\vec{R}$ (takzvané *retardované pole*):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(1-\beta^2)\,(\vec{R} - R\vec{\beta})}{(R - \vec{R}\cdot\vec{\beta})^3} \,. \tag{4.6}$$

Uvedeného výrazu je třeba v případě, že se velikost nebo rychlost náboje za pohybu mění.

3. V případě, že se náboj pohybuje nerovnoměrně nebo po zakřivené dráze, je situace složitější a řeší se v teorii elektromagnetického pole. Zde jen poukážeme na to, že celkový počet siločar sice zůstává stejný, ale siločáry jsou zakřiveny ("vlasy náboje vlají") a dochází k vyzařování elektromagnetických vln. Jde-li o například o náhlé zbrzdění rovnoměrně se pohybujícího náboje do klidu, přejde Heavisideovo pole (4.5) na pole Coulombovo, a to během doby brzdění Δt. Protože siločáry musí zůstat spojité, vznikne oblast v podobě kulové vrstvy, kde siločáry mají tangenciální složku. Tloušťka této vrstvy je $c\,\Delta t$ a rozpíná se prostorem rychlostí c. Mluvíme o takzvaném brzdném záření. Podobně při křivočarém pohybu náboje v magnetckém poli dochází k vyzařování synchrotronového záření, které způsobuje nežádoucí energetické ztráty v urychlovačích. Na obr. 4.5 je naznačen průběh siločar urychlovaného náboje, na obr. 4.6 vznik tangenciální složky elektrického pole. Matematickým řešením těchto úloh se zde nemůžeme zabývat.

obr. 4.4

obr. 4.5

obr. 4.6

Mějme nyní dva bodové náboje a uvažujme o síle, kterou náboj q_0 bude působit na náboj q. Rozlišme čtyři případy:

I. Oba náboje jsou v klidu. Síla bude Coulombova,

$$\vec{F} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_0\;q}{r^3}\,\vec{r}\;.$$

II. Náboj q_0 se pohybuje rychlostí $\vec{v}$, náboj q je v klidu. Podle (4.5) bude síla rovna

$$\vec{F} \;=\; \Gamma\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_0 q}{r^3}\,\vec{r}\;.$$

III. Náboj q_0 je v klidu, náboj q se pohybuje rychlostí $\vec{v}$. Spojíme čárkovanou soustavu S' s nábojem q. V této soustavě platí $\vec{F}' = q\;\vec{E}'$ a podle (4.2) $E_x = E'_x,\quad E_{y,z} = (1/\gamma)\;E'_{y,z}$. Musíme si totiž uvědomit, že tentokrát je to soustava S, v níž je náboj q_0 vytvářející pole v klidu.

Jak se bude transformovat síla mezi oběma soustavami? Relativistické transformace složek síly vyjadřují vztahy (1.31). Položíme-li v nich $\vec{u} = (v, 0, 0)$, dostaneme

$$F_x \;=\; F'_x, \qquad F_{y,z} \;=\; \frac{1}{\gamma}\,F'_{y,z}\;.$$

V laboratorní soustavě S bude tedy nehybný náboj q_0 působit na pohybující se náboj q silou o složkách

$$F_x \;=\; F'_x \;=\; q\;E'_x \;=\; q\;E_x\;,$$

$$F_{y,z} \;=\; \frac{1}{\gamma}\,F'_{y,z} \;=\; \frac{1}{\gamma}\,q\;E'_{y,z} \;=\; \frac{1}{\gamma}\,q\;\gamma\;E_{y,z} \;=\; q\;E_{y,z}\;.$$

Vidíme, že elektrické pole působí stejnou silou na nehybný i pohybující se náboj. Srovnáním případů II. a III. zjistíme, že nehybný náboj působí na pohybující se náboj jinou silou než pohybující se náboj na nehybný. Mezi pohybujícími se náboji tedy *neplatí Newtonův zákon akce a reakce*. Je to způsobeno tím, že v relativistické fyzice se silové působení šíří konečnou rychlostí a na akci nemůže následovat okamžitá reakce.

IV. Přejdeme nyní k obecnému případu, kdy oba náboje se pohybují, a to různými rychlostmi. Tentokrát spojíme souřadnou soustavu S' s nábojem q_0, který se pohybuje v laboratorní soustavě rychlostí $\vec{v}$ a směrujeme osu x podél této rychlosti. Je tedy $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Náboj q má potom v soustavě S rychlost $\vec{u}$ a v soustavě S' rychlost $\vec{u}'$. Všimneme si opět situace v okamžiku nula, kdy $t = t' = 0$. Náboj q_0 vytvoří v soustavě S' Coulombovo pole se středem v počátku a bude působit na náboj q silou

$$\vec{F}' \;=\; q\;\vec{E}' \;=\; q\,\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}'}{r'^3} \;=\; k\,\frac{\vec{r}'}{r'^3}\;.$$

V kapitole o STR jsme odvodili transformaci takové síly do laboratorní soustavy S vztahem (1.33). Proto bude

$$\vec{F} \;=\; \frac{k\;\gamma}{r'^3}\left[\vec{r} \;+\; \frac{1}{c^2}\;\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{r})\right]\;. \tag{4.7}$$

Podle (4.3) a (4.5) pohybující se náboj q_0 vytváří elektrické pole

$$\vec{E} \;=\; \gamma\,\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r'^3} \;=\; \Gamma\,\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\;.$$

Sílu, kterou působí náboj q_0 pohybující se obecně rychlostí $\vec{v}$ na náboj q pohybující se obecně rychlostí $\vec{u}$ můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$\vec{F} = q\,\Gamma\,\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\,\left[\vec{r} + \frac{1}{c^2}\,\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{r})\right] = q\,\left[\vec{E} + \frac{1}{c^2}\,\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{E})\right]. \tag{4.8}$$

Vidíme, že mezi pohybujícími se náboji působí kromě elektrické síly qE ještě další síla úměrná náboji a kolmá k rychlosti náboje $\vec{u}$. Tato síla nevymizí ani při nerelativistických rychlostech, kdy položíme faktor $\Gamma = 1$. Této síle říkáme síla magnetická.

Ve výrazu (4.8) stále vystupuje rychlost $\vec{v}$ náboje, který vyvolává silové působení. Abychom se této rychlosti zbavili, zavedeme vedle elektrického další pole, magnetické a definujeme tzv. *vektor magnetické indukce* $\vec{B}$ [2] vztahem

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\,\vec{v}\times\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi c^2\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\,(\vec{v}\times\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q_0}{r^3}\,(\vec{v}\times\vec{r}). \tag{4.9}$$

Přitom jsme zavedli novou konstantu μ_0 nazývanou *permeabilita vakua* nebo též magnetická konstanta. Mezi konstantami ε_0 a μ_0 platí vztah

$$\varepsilon_0\,\mu_0 = \frac{1}{c^2}. \tag{4.10}$$

Zatímco každá z těchto konstant zvlášť žádný fyzikální smysl nemá a vyplývá pouze z volby soustavy jednotek, jejich součin fyzikální význam má a vyjadřuje vztah elektromagnetických jevů k rychlosti světla. Jak uvidíme dále, číselná hodnota μ_0 byla stanovena přesně na $\mu_0 = 4\pi\,.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$ (henry na metr).

Nyní můžeme napsat sílu, která působí na pohybující se elektrický náboj ve tvaru

$$\vec{F} = q\,[\,\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\,] \tag{4.11}$$

To je známá *Lorentzova síla* a výraz (4.11) můžeme také považovat za definici elektrického a magnetického pole. Kdybychom si chtěli ušetřit celé předchozí relativistické odvozování, mohli bychom brát existenci magnetického pole jako nový, samostatný experimentální fakt a formulovat situaci takto:

Pohybující se elektrické náboje budí v prostoru jednak elektrické, jednak magnetické pole. Na pohybující se náboj působí elektrické a magnetické pole Lorentzovou silou (4.11).

2. Vlastnosti magnetického pole

Magnetické pole je popsáno vektorem magnetické indukce $\vec{B}$, jehož rozložení v prostoru můžeme znázornit *indukčními čarami*. Jednotkou magnetické indukce v soustavě SI je tesla (T) a má fyzikální rozměr $\mathrm{MT^{-2}I^{-1}}$. Můžeme zavést magnetický indukční tok a cirkulaci magnetické indukce podél uzavřené křivky vztahy

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}\,, \qquad \Gamma = \oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}\,.$$

Magnetický indukční tok má pro svůj mimořádný význam jednotku se zvláštním názvem, weber. Také pro magnetické pole platí princip superpozice, magnetické pole vytvářené jednotlivými pohybujícími se náboji a proudy se nezávisle sčítají.

Jeden bodový pohybující se náboj nemůže vytvořit stacionární magnetické pole. Musíme mít uzavřený stacionární proud, rozdělit ho na malé proudové elementy a určit výslednou magnetickou indukci podle principu superpozice. Na obr. 4.7 je zakreslena proudová smyčka l a vektor průvodiče $\vec{R}$ od malého dráhového elementu $d\vec{l}$ do bodu A, v němž magnetickou indukci určujeme.

Proudový element $d\vec{I}$ můžeme vyjádřit pomocí hustoty a střední rychlosti náboje v objemu smyčky (obr. 4.8):

$$d\vec{I} = I d\vec{l} = j\,\Delta S\,d\vec{l} = \vec{j}\,dV = \rho\,dV\,\vec{v}\,. \tag{4.12}$$

[2] Název je historický a nevýstižný.

obr. 4.7 obr. 4.8

obr. 4.9 obr. 4.10

Podle (4.9) bude proudový element $d\vec{I}$ vytvářet v bodě A magnetické pole o indukci

$$d\vec{B} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\rho\, dV}{R^3}\,(\vec{v}\times\vec{R}) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\; I\;\frac{d\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}\;. \tag{4.13}$$

Všimněme si, že v tomto výrazu již nevystupuje hustota náboje, nýbrž pouze proud. Jak víme, proud a tedy i magnetické pole mohou existovat i v případě, že objemová hustota elektrického náboje je nulová. Na rozdíl od bodového náboje, který můžeme realizovat malým nabitým tělesem nemůže "proudový element" samostatně existovat, vždy musí být součástí nějakého uzavřeného obvodu. Proto má fyzikální smysl pouze magnetická indukce vyvolaná proudovou smyčkou l. Určíme ji z principu superpozice integrací příspěvků jednotlivých proudových elementů:

$$\vec{B} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\; I\;\int_l \frac{d\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}\;. \tag{4.14}$$

Vztah (4.14) se nazývá *Biotův - Savartův (- Laplaceův) zákon* a umožňuje najít magnetické pole různých stacionárních proudových obvodů.

Uvažujme *přímý vodič* jímž protéká proud I ve směru osy x (obr. 4.9) a hledejme magnetickou indukci v bodě A na ose z ve vzdálenosti r od vodiče. Z vektorového součinu v Biotově - Savartově zákonu je zřejmé, že vektor magnetické indukce bude kolmý k rovině tvořené proudovou přímkou a bodem A a bude tečný ke kružnici v rovině kolmé k proudu se středem na proudové přímce. Bude mít směr pravotočivého šroubu vzhledem ke směru proudu (obr. 4.10).

obr. 4.11

Probíhá-li element dl podél vodiče, mění se veličiny l, R, θ, které jsou vázány vztahy

$$l \;=\; -\,\frac{r}{\mathrm{tg}\;\theta}\;, \quad dl \;=\; \frac{r\;d\theta}{\sin^2\theta}\;, \quad R \;=\; \frac{r}{\sin\theta}\;.$$

Podle (4.14) pak máme

$$B \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\;I\int_l \frac{|d\vec{l}\times\vec{R}|}{R^3} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\;\frac{I}{r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\;d\theta \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\;\frac{I}{r}\;(\cos\theta_1\;-\;\cos\theta_2)\;. \tag{4.15}$$

Výraz (4.15) lze použít k výpočtu příspěvku přímého úseku vodiče k magnetické indukci; úhly θ_1 a θ_2 svírají průvodiče konců vodiče s bodem A.

Je-li vodič nekonečný, bude $\theta_1 = 0, \;\; \theta_2 = \pi$ a magnetická indukce bude

$$B \;=\; \frac{\mu_0\;I}{2\pi\;r}\;. \tag{4.16}$$

Určíme magnetické pole plošného proudu protékajícího po nekonečné rovině (obr. 4.11). S bodu A, v němž pole určujeme, spustíme kolmici na proudovou rovinu ve vzdálenosti r. Vyčleníme dva přímkové proudy $dI = \alpha\;dl$ (α je plošná hustota proudu) ve stejných vzdálenostech l od paty této kolmice a sečteme vektorově jejich příspěvky k magnetické indukci v bodě A. Vidíme, že výsledný vektor magnetické indukce vyvolané touto dvojicí přímkových proudů $d\vec{B}$ je rovnoběžný s proudovou rovinou. Nyní zbývá integrovat přes všechny takové dvojice přímých proudů v rovině. Vezmeme-li v úvahu, že

$$l \;=\; r\;\mathrm{tg}\;\theta, \quad dl \;=\; \frac{r\;d\theta}{\cos^2\;\theta}, \quad R \;=\; \frac{r}{\cos\theta}$$

a

$$dB \;=\; 2\;\frac{\mu_0\;dI}{2\pi\;R}\;\cos\theta \;=\; \frac{\mu_0\;\alpha\;\cos\theta\;dl}{\pi\;R}$$

obr. 4.12

a po integraci

$$B \;=\; \frac{\mu_0\ \alpha}{\pi}\int\frac{\cos\theta\ dl}{R} \;=\; \frac{\mu_0\ \alpha}{\pi}\ \int_0^{\pi/2}\ d\theta \;=\; \frac{\mu_0\ \alpha}{2}\ . \tag{4.17}$$

Magnetická indukce vpravo od proudové roviny bude mít tedy velikost $B = (\mu_0\ \alpha)/2$ a bude mířit kolmo k proudu a rovnoběžně s rovinou, vlevo od roviny bude mít směr opačný. Na proudové rovině má tedy tečná složka magnetické indukce nespojitost $\mu_0\ \alpha$. Je užitečné srovnat tyto závěry s chováním intenzity elektrického pole na nabité rovině (2.24).

Máme-li dvě rovnoběžné proudové roviny, bude se magnetická indukce superponovat. Budou-li plošné proudy souhlasně rovnoběžné, vyruší se pole mezi rovinami, budou-li proudy nesouhlasně rovnoběžné, bude magnetické pole o indukci $B = \mu_0\ \alpha$ soustředěno v prostoru mezi rovinami. Necháme-li téci proud po plášti válce kolmo k ose, bude osové magnetické pole soustředěno uvnitř válce. Poteče-li proud po plášti rovnoběžně s osou, bude magnetické pole uvnitř válce nulové.

Na obr. 4.12 je znázorněn směr a rozložení magnetické indukce vytvářené dvojicemi proudových rovin ve srovnání intenzitou elektrického pole nabitých rovin.

Získané výsledky nám umožňují najít obecné *transformační vztahy*, podle nichž se mění elektrické a magnetické pole při přechodu od jedné inerciální vztažné soustavy k druhé. Můžeme totiž použít opět naši metodu utíkání s deskovým kondenzátorem.

Na obr. 4.13 je znázorněn nabitý kondenzátor, jehož desky leží v rovině x, z. Pohybuje-li se tento kondenzátor rovnoměrně ve směru osy x, protéká v tomto směru vlastně konvekční plošný proud. Je-li v laboratorní soustavě rychlost kondenzátoru rovna u a plošná hustota náboje σ, bude lineární hustota proudu $\alpha \;=\; \sigma\ u$ a v prostoru mezi deskami kondenzátoru bude existovat y-ová složka intenzity elektrického pole a z-ová složka magnetické indukce:

$$E_y \;=\; \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad B_z \;=\; \mu_0\ \alpha \;=\; \mu_0\ \sigma\ u\ .$$

Přejdeme-li k čárkované soustavě, která se pohybuje vůči laboratorní také ve směru x rychlostí v, a v níž se kondenzátor pohybuje rychlostí u', musíme přetransformovat rychlost u a plošnou hustotu náboje σ. Podle vzorců pro skládání rychlostí (1.14) dostaneme

$$\beta'_u \;=\; \frac{\beta_u\ -\ \beta}{1\ -\ \beta_u\ \beta}, \quad \text{kde} \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \beta_u = \frac{u}{c}, \quad \beta'_u = \frac{u'}{c}\ .$$

Pokud jde o plošnou hustotu náboje, bude ve vlastní soustavě kondenzátoru rovna σ_u a v soustavách S a S' $\sigma = \gamma_u\ \sigma_u, \quad \sigma'_u = \gamma'_u\ \sigma_u$. Vztah mezi γ a β je dán (1.1). V čárkované soustavě tedy máme

obr. 4.13

$$\sigma' \;=\; \gamma_u' \sigma_u \;=\; \frac{\gamma_u'}{\gamma_u}\sigma \;=\; \frac{\sigma}{\gamma_u}\frac{1}{\sqrt{1-\beta_u'^2}} \;=\; \frac{\sigma}{\gamma_u}\frac{1-\beta_u\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta_u^2)}} \;=\; \sigma\gamma(1-\beta_u\beta)\;.$$

Tak dostaneme složky elektrického a magnetického pole:

$$E_y' \;=\; \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \;=\; \gamma\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\beta_u\beta\sigma}{\varepsilon_0}\right) \;=\; \gamma\left(E_y - \beta c\frac{\mu_0\sigma u}{c^2\varepsilon_0\mu_0}\right) \;=\; \gamma(E_y - \beta c B_z)\;,$$

$$B_z' \;=\; \mu_0\sigma' u' \;=\; \mu_0\sigma\gamma c(\beta_u - \beta) \;=\; \gamma(\mu_0\sigma u - \mu_0\sigma v) \;=\; \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}\,\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) \;=\; \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}\,E_y\right).$$

Podobně bychom postupovali i u ostatních složek. Můžeme tedy napsat obecné transformační vzorce pro elektrické a magnetické pole při přechodu mezi dvěma inerciálními vztažnými soustavami:

$$\begin{aligned} E_x' \;&=\; E_x\;,\;\; E_y' \;=\; \gamma(E_y - \beta c B_z)\;,\;\; E_z' \;=\; \gamma(E_z + \beta c B_y) \\ B_x' \;&=\; B_x\;,\;\; B_y' \;=\; \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_z\right)\;,\;\; B_z' \;=\; \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}E_y\right)\;. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Jsou-li v soustavě S' náboje v klidu, potom $\vec{B}' = 0$ a platí vztahy (4.2). Pohybuje-li se soustava S' pomalu, můžeme položit $\gamma = 1$ a transformační vztahy se zjednoduší na

$$\vec{E}' \;=\; \vec{E} \;+\; \vec{v}\times\vec{B}\;,\quad \vec{B}' \;=\; \vec{B} \;-\; \frac{1}{c^2}\,\vec{v}\times\vec{E}\;. \tag{4.19}$$

Při každé transformaci je důležitou otázka takzvaných invariantů, tj. veličin, které se při transformaci nemění. Také v případě elektrického a magnetického pole můžeme ověřit, že transformace (4.18) ponechávají beze změny dvě kombinace vektorů $\vec{E}$, $\vec{B}$:

$$\vec{E}\cdot\vec{B} \;=\; \vec{E}'\cdot\vec{B}'\;,\quad B^2 \;-\; \frac{1}{c^2}E^2 \;=\; B^{,2} - \frac{1}{c^2}E^{,2}\;. \tag{4.20}$$

Znamená to mimo jiné. že jsou-li vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$ v jedné vztažné soustavě vzájemně kolmé (jejich skalární součin je roven nule), budou kolmé ve všech vztažných soustavách.

obr. 4.14

Určíme sílu, která působí na proudový element se strany magnetického pole. Vyjdeme-li ze vzorce pro Lorentzovu sílu, můžeme napsat

$$d\vec{F} \;=\; \rho\, dV(\vec{E} \,+\, \vec{u}\times\vec{B}) \;=\; \rho\, dV\ \vec{E} \,+\, \vec{j}\ dV\times\vec{B} \;=\; \rho\, dV\ \vec{E} \,+\, I\ d\vec{l}\times\vec{B}\ .$$

Je-li objem, v němž protéká proud elektricky neutrální ($\rho = 0$), bude magnetické působení na proudový element dáno pouze posledním členem. Protože magnetický element sám vytváří magnetické pole o indukci (4.13), můžeme zapsat silový zákon pro vzájemné působení dvou proudových elementů:

$$d\vec{F} \;=\; I_1 d\vec{l_1}\times\vec{B}_2 \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I_1 I_2}{R_{12}^3}\,[d\vec{l_1}\times(d\vec{l_2}\times\vec{R}_{12})]\ . \tag{4.21}$$

Tento silový zákon se někdy nazývá *Ampérovým vzorcem.* Ampér měl snahu vybudovat nauku o vzájemném silovém působení vodičů s proudem podle vzoru Newtonovy dynamiky. Jak jsme se však zmiňovali, proudové elementy nemohou samostatně existovat, a tak má fyzikální význam pouze výsledné silové působení mezi uzavřenými proudovými smyčkami.

Uvažme například dva rovnoběžné nekonečně dlouhé přímé proudové vodiče (obr. 4.14). Na obrázku je též vyznačen směr síly, kterou působí druhý vodič na první. Protékají-li oběma vodiči souhlasné proudy, vodiče se přitahují, jsou-li proudy nesouhlasné, vodiče se odpuzují. Protože druhý vodič vytváří magnetické pole o indukci kolmé k proudovému elementu druhého vodiče, můžeme pro velikost síly, kterou druhý vodič působí na element prvního vodiče napsat

$$dF_{12} \;=\; I_1\ B_{12}\ dl_1, \quad B_{12} \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi}\ \frac{I_2}{r}\ .$$

Síla mezi dvěma nekonečnými proudy je ovšem nekonečná. Zajímáme se proto, jakou silou působí druhý vodič na jednotku délky prvního vodiče. Dostáváme

$$F_l \;=\; \frac{dF_{12}}{dl_1} \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi}\ \frac{I_1 I_2}{r}\ . \tag{4.22}$$

Tento vzorec byl vzat za základ pro definici jedné ze základních jednotek soustavy SI, ampéru. Podle usnesení 9. Generální konference pro míry a váhy v Paříži v roce 1948

Ampér (A) je proud, který při stálém průtoku dvěma rovnoběžnými přímými nekonečně dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti jednoho metru, vyvolá mezi vodiči sílu 2.10^{-7} *newtonu na jeden metr délky.*

Touto definicí je vlastně zvolena hodnota konstanty μ_0, jak jsme výše uvedli. Protože konstanty μ_0 a ε_0 jsou vzájemně vázány byly definováním ampéru vlastně stanoveny jednotky všech elektrických i magnetických veličin.

Stacionární magnetické pole je vždy vytvářeno stacionárními proudy. Přitom nazáleží na tom, o jaký druh proudu jde, zda jde o kondukční proud protékající vodičem nebo o konvekční proud nábojů mechanicky přemisťovaných v prostoru. Tento poznatek musel být ovšem experimentálně ověřen. Zasloužili se o to v minulém století americký fyzik H.A.Rowland, dále W.K.Roentgen a ruský fyzik A.A.Eichenwald. Rowland za svého působení v Berlíně 1876 provedl citlivý pokus s pozlaceným ebonitovým kotoučem, který rychle rotoval mezi dvěma uzemněnými skleněnými deskami. Tím vznikly vlastně dva kondenzátory s jednou společnou rotující elektrodou. Při rotaci nabité elektrody vznikl smyčkový proud a změny jím vytvářeného slabého magnetického pole (asi 10^{-5} velikosti pole geomagnetického) při změně směru rotace byly registrovány magnetkou zavěšenou v mosazné trubce na torzním vlákně. Podobný pokus provedl později (1888) Roentgen, když nechal rotovat dielektrický skleněný kotouč mezi deskami nehybného kondenzátoru. Na povrchu kotouče se indukovaly polarizační vázané náboje, které při rotaci vytvářely konvekční proud. Magnetické pole vytvářejí samozřejmě i vázané proudy v látkovém prostředí a také proud posuvný, který je ovšem nestacionární. To prokázal experimentálně Whitehead, když registroval magnetické impulsy vznikající při průchodu střídavého elektrického proudu kondenzátorem zaplněným dielektrikem.

Také stacionární magnetické pole můžeme popsat soustavou Maxwellových rovnic vyjadřujících jeho obecné vlastnosti. Jednou z těchto vlastností je experimentální fakt, že neexistují magnetické náboje, z nichž by indukční čáry vycházely a že magnetické pole (i nestacionární) je solenoidální. Indukční čáry se musí uzavírat samy do sebe nebo vycházet a končit v nekonečnu. [3]

Tok magnetických indukčních čar uzavřenou plochou je tedy vždy roven nule:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 , \tag{4.23}$$

neboli v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 . \tag{4.24}$$

Určíme, čemu se rovná cirkulace magnetické indukce podél uzavřené křivky. Vezměme zprvu nekonečný přímý vodič s proudem I, o němž víme že vytváří indukční čáry magnetického pole v podobě kružnic se středem na vodiči a o velikosti dané (4.16). Cirkulace podél takové kružnice bude

$$\Gamma = \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l \frac{\mu_0 \, I}{2\pi \, r} \, dl = \mu_0 \, I . \tag{4.25}$$

Tento výsledek můžeme zobecnit na libovolnou uzavřenou křivku a libovolné rozložení proudů. Předně je zřejmo, že neobepíná-li křivka žádný proud, bude cirkulace podél ní nulová. Na obr. 4.15 vidíme uzavřenou křivku v poli přímkového proudu sestavenou ze dvou radiálních úseků a dvou koncentrických oblouků kružnic.

Radiální úseky k cirkulaci nepřispívají, příspěvky na obloucích kružnic se vzájemně vyruší (pole klesá nepřímo úměrně poloměru, délka oblouku roste úměrně s poloměrem). Na obr. 4.16 vidíme obecnou křivku neobepínající proud v poli přímého vodiče. Můžeme ji rozdělit na malé úseky $d\vec{l_1}$, $d\vec{l_2}$, vyťaté dvěma blízkými radiálními paprsky. Délky těchto úseků budou v poměru

$$\frac{r_1}{\cos\alpha_1} \; : \; \frac{r_2}{\cos\alpha_2} \; ,$$

zatímco projekce vektoru $\vec{B}$ do tangenciálního směru budou v poměru obráceném.

Cirkulace bude tedy nenulová jen tehdy, obepíná-li křivka proud. Pro obecnou křivku l_1 na obr. 4.17 můžeme provést následující úvahu. Zvolíme pomocnou kružnici l_2 se středem na vodiči a vytvoříme spojení

[3]Jak ukázal P.A.M.Dirac, kvantová teorie pole připouští existenci magnetického monopólu, tedy částice nesoucí magnetický náboj, jehož velikost je jednoznačně vázána s velikostí elementárního elektrického náboje. Tato částice však nebyla dosud objevena a úsilí v tomto směru pokračuje, v duchu přesvědčení fyziků, že to co může existovat, existuje.

Jinak se pojem magnetického náboje (magnetického množství) ve fyzice užívá jako formální představa definovaná pomocí Coulombova zákona pro magnetické síly. Máme-li totiž dva dlouhé tyčové magnety a zkoumáme sílu, která působí mezi jejich konci, můžeme tyto konce přibližně považovat za bodové zdroje indukčních čar, za "magnetické náboje".

obr. 4.15

obr. 4.16

obr. 4.17

obr. 4.18 obr. 4.19

obou křivek $l_1 + l_2$ tak, aby příspěvek spojovacího úseku k cirkulaci bylo možno zanedbat. Nová spojená křivka již proud neobepíná a cirkulace podél ní je tedy nulová. Vzhledem k tomu, že směry procházení obou částí spojené křivky jsou protichůdné, máme

$$\oint_{l_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} - \oint_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \, .$$

Také pro obecnou křivku l_1 bude tedy cirkulace dána (4.25).

Při našem zobecňování jsme pracovali s křivkami v rovině kolmé ke směru proudu; bylo by ovšem možné uvažovat i křivky prostorové. Bude-li magnetické pole vytvářeno více proudy můžeme použít princip superpozice. Indukční čáry pro tři paralelní vodiče jsou přibližně zakresleny na obr. 4.18.

Tím dospíváme k obecnému *Ampérovu zákonu:*

Cirkulace magnetické indukce podél libovolné uzavřené křivky je rovna celkovému proudu, který tato křivka obepíná, násobenému μ_0.

Podle toho, protéká-li proud jednotlivými vodiči nebo je-li v prostoru rozložen s hustotou $\vec{j}$ dostaneme matematické vyjádření Ampérova zákona:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_\alpha I_\alpha = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \, . \tag{4.26}$$

Ampérův zákon má podobný význam pro pole magnetické jako Gaussův zákon pro pole elektrické. S použitím Stokesovy věty jej můžeme vyjádřit též v diferenciálním tvaru. Máme

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

a porovnáme-li s pravou stranou (4.26), můžeme vzhledem k libovůli ve volbě křivky a plochy přirovnat integrované funkce. V diferenciálním tvaru zní Ampérův zákon

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \, \vec{j} \, . \tag{4.27}$$

Shrneme-li nyní všechny dosud získané rovnice pro stacionární elektrické a magnetické pole, dostaneme soustavu Maxwellových rovnic pro stacionární pole jako

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \, \vec{j}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \, . \tag{4.28}$$

Rovnice v prvním řádku (I. série) spojují intenzitu elektrického pole a magnetickou indukci s náboji a proudy; z nich je tedy možno vypočítat pole, známe-li rozložení nábojů a proudů a naopak. Rovnice ve druhém řádku (II. série) náboje a proudy neobsahují a vyjadřují pouze obecné vlastnosti stacionárních polí. Říkají, že stacionární elektrické pole je potenciální a stacionární magnetické pole je solenoidální. Přitom se tato soustava rozpadá na dvě nezávislé podsoustavy rovnic pro elektrické a pro magnetické pole. Přesto že obě pole jsou vytvářena týmiž pohybujícími se náboji, nejsou vzájemně provázána.

Najdeme nyní obecné řešení rovnic stacionárního magnetického pole. Vzhledem k tomu, že divergence tohoto pole je nulová, můžeme zavést jiné vektorové pole $\vec{A}\,(x, y, z)$ nazývané *vektorový potenciál* takové, že

$$\vec{B} \;=\; \text{rot}\;\vec{A}\,. \tag{4.29}$$

Uvidíme, jestli si tím pomůžeme. Dosadíme-li do rovnice pro rotaci $\vec{B}$, dostaneme

$$\text{rot}\;\vec{B} \;=\; \text{rot rot}\;\vec{A} \;=\; \text{grad div}\;\vec{A} \;-\; \Delta\,\vec{A} \;=\; \mu_0\,\vec{j}\,.$$

Rovnice vypadá složitě, ale můžeme využít určité volnosti ve volbě vektorového potenciálu. Můžeme ho totiž zvolit tak, aby jeho divergence měla libovolnou zadanou hodnotu, byla například nulová. [4] Tato podmínka se nazývá *cejchovací* nebo *kalibrační*.

Bude-li div $\vec{A} \;=\; 0$, zjednoduší se rovnice pro vektorový potenciál na

$$\Delta\vec{A} \;=\; -\,\mu_0\,\vec{j}\,. \tag{4.30}$$

To je vektorová Laplaceova - Poissonova rovnice zcela analogická rovnici (2.13). Analogie mezi skalárním potenciálem φ a vektorovým potenciálem $\vec{A}$ tak vyniká.

Řešení rovnice (4.30) můžeme napsat okamžitě podle analogie s řešením pro elektrostatický potenciál (2.20). Máme

$$\vec{A} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(x', y', z')\;dV}{R} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\;I\int_l \frac{d\vec{l}}{R}\,. \tag{4.31}$$

Známe-li vektorový potenciál, určíme magnetickou indukci jako

$$\vec{B} \;=\; \text{rot}\;\vec{A} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \text{rot}\left(\frac{\vec{j}}{R}\right)\,dV \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{j}\;dV \;=$$

$$=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\times\vec{R}}{R^3}\,dV \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\;I\int_l \frac{d\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}\,.$$

(Při úpravě jsme prováděli operaci rotace podle nečárkovaných souřadnic x, y, z, a proto jsme považovali $\vec{j}$ za konstantní vektor. Použili jsme poslední ze vzorců (M.23). Při výpočtu gradientu $1/R$ jsme postupovali jako u složené funkce; $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$.)

Výsledek, který jsme získali představuje již známý Biotův - Savartův zákon (4.14).

Protéká-li proud o lineární hustotě $\vec{\alpha}$ po ploše, budeme mít analogicky (4.31) a (4.14)

$$\vec{A} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{\alpha}}{R}\,dS \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\;I\int_l \frac{d\vec{l}}{R}$$

$$\vec{B} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\alpha\times\vec{R}}{R^3}dS \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\;I\int_S \frac{d\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}\,. \tag{4.32}$$

Obecně lze dokázat:

[4] Zdůvodnění je následující. Nechť div$\vec{A} = f$. Pokusíme se přejít k novému vektorovému potenciálu $\vec{A}'$ takovému, aby platilo div$\vec{A}' = 0$ a zároveň rot$\vec{A}' = \vec{B}$. K tomu stačí přičíst k potenciálu $\vec{A}$ potenciál $\vec{A}''$, který vyhovuje rovnicím rot$\vec{A}'' = 0$, div$\vec{A}'' = -f$. Potom $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{A}''$ splňuje požadované vlastnosti. Je pouze otázka, zda vektorovou funkci $\vec{A}''$ lze najít, tj. zda rovnice pro ni mají řešení. Tyto rovnice jsou však formálně shodné s rovnicemi pro vektor stacionárního elektrického pole, kde položíme $f = -\rho/\varepsilon_0$. O existenci elektrického pole pak fyzik nepochybuje.

1. Je-li vektorová funkce $\vec{j}$ konečná a dostatečně hladká ve vnitřních bodech proudového objemu V, bude magnetická indukce *všude* konečná a spojitá. Vektorový potenciál $\vec{A}$ bude mít navíc i parciální derivace alespoň prvního řádu.

2. Na proudových plochách není magnetická indukce definována a vektorový potenciál zde nemá derivaci. Při průchodu touto plochou zůstávají normálové složky magnetické indukce spojité, zatímco tečné se mění skokem o $\mu_0\alpha$.

Uvedené hraniční podmínky na proudové ploše snadno získáme z věty o neexistenci magnetického náboje a Ampérova zákona. Obklopíme-li proudovou plochu těsně přiléhajícím válcem s osou kolmou k ploše, bude indukční tok válcovou plochou nulový a pro normálové složky na obou stranách plochy máme

$$\mathrm{Div}\ \vec{B} = B_{1n} - B_{2n} = 0 \quad . \tag{4.33}$$

Necháme-li podél roviny probíhat obdélníkovou smyčku tak, že delší strany l obdélníka vedou těsně po obou stranách roviny a kratší strany jsou zanedbatelné, bude smyčkou obepínaný proud $\mu_0\alpha l$, a tak

$$\mathrm{Rot}\ \vec{B} = \mu_0\vec{\alpha}, \qquad |\mathrm{Rot}\ \vec{B}| = B_{1t} - B_{2t} = \mu_0\alpha \ . \tag{4.34}$$

Shrneme způsoby výpočtu magnetické indukce různých proudových konfigurací. Můžeme k tomu použít princip superpozice příspěvků jednotlivých proudových elementů. Přitom můžeme integrovat buď vektorové potenciály (což je jednodušší) a pak najít magnetickou indukci ze vztahu (4.29), nebo můžeme přímo integrovat magnetickou indukci pomocí Biotova - Savartova zákona. Pokud je rozložení proudů symetrické, může být výhodnější použít Ampérův zákon. V případě nepravidelného uspořádání proudů v nějakém malém objemu můžeme podobně jako u elektrického pole rozložit magnetickou indukci na velkých vzdálenostech do řady magnetických multipólů a omezit se na člen nejnižšího řádu, magnetický dipól (magnetický náboj, monopól neexistuje). O této metodě pojednáme v následujícím odstavci.

Představme si nyní, že vložíme proudovou rovinu do vnějšího magnetického pole $\vec{B}_0$ rovnoběžného s rovinou a kolmého ke směru plošného proudu (obr. 4.19). Pole plošného proudu se pak bude superponovat s vnějším polem a po stranách roviny budeme mít

$$B_1 = B_0 + \frac{\mu_0\alpha}{2}\ , \qquad B_2 = B_0 - \frac{\mu_0\alpha}{2}\ ,$$

odkud

$$B_1 - B_2 = \mu_0\alpha\ , \qquad B_1 + B_2 = 2\ B_0\ .$$

Vyčleníme-li v rovině proudový pás šířky h, a v něm element délky $d\vec{l}$, bude na něj vnější pole působit silou kolmou k rovině (tlakovou silou) o velikosti

$$dF = |I\ d\vec{l} \times \vec{B}_0| = \alpha\ h\ dl\ B_0 = \alpha\ B_0\ dS\ ,$$

takže na rovinu bude působit výsledný *magnetický tlak*

$$p_m = \frac{dF}{dS} = \alpha B_0 = \frac{1}{2\mu_0}\,(B_1 - B_2)\,(B_1 + B_2) = \frac{B_1^2}{2\mu_0} - \frac{B_2^2}{2\mu_0}\ .$$

Tento výsledek můžeme zřejmě považovat za výsledný tlak působící s obou stran roviny.

Magnetické pole tedy vyvíjí tlak na plošné proudy, a to

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0}\ . \tag{4.35}$$

S magnetickým tlakem se musí počítat v magnetické hydrodynamice při proudění vodivých kapalin (rtuti, roztavených alkalických kovů při chlazení aktivní zony rychlých reaktorů, plazmatu apod.) V těchto případech se magnetický tlak superponuje s tlakem hydrodynamickým.

Situace je zde podobná, jako u mechanického napětí, které vyvíjí elektrostatické pole na nabité plochy. Vykoná-li magnetická tlaková síla práci, stane se tak na úkor energie nahromaděné v magnetickém poli. Naopak mechanickou silou působící na proudové plochy můžeme zvětšovat energii magnetického pole a tím vlastně magnetické pole vytvářet (tzv. magnetické dynamo). [5]

Podobně jako u elektrického pole je i magnetický tlak roven objemové hustotě energie magnetického pole:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} . \tag{4.36}$$

Vezmeme-li v úvahu (2.19), můžeme pro celkovou hustotu energie elektromagnetického pole napsat:

$$w = w_e + w_m = \frac{\varepsilon_0 \, E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} . \tag{4.37}$$

Relativistický výklad síly působící mezi dvěma proudy

Odvodili jsme sílu (4.27), která působí mezi dvěma přímými rovnoběžnými vodiči protékanými proudem a ukázali, že jsou-li proudy rovnoběžné souhlasně, vodiče se přitahují. Původ této síly můžeme také vyložit na základě poznatků speciální teorie relativity.

Uvažme napřed dva rovnoběžné nábojové paprsky, tj. náboje téhož znamení rozložené s lineární hustotou τ na dvou rovnoběžných přímkách ve vzdálenosti r, a pohybující se v témž směru touž rychlostí v. Intenzita pole vytvářeného lineárním nábojem se určuje podle Gaussova zákona a bude mít proto stejný tvar bez ohledu na to, zda se náboje pohybují či nikoli. Změní se ovšem lineární hustota nábojů vzhledem k efektu kontrakce délek; bude-li v soustavě S' pohybující se spolu s náboji lineární hustota τ' a v laboratorní soustavě hustota τ, bude mezi nimi platit vztah $\tau' = \tau/\gamma$. Určíme nyní sílu, kterou působí jeden paprsek na jednotku délky druhého. Ukazuje se, že příčná složka síly $F_\perp$ na jednotku délky je stejná v nehybné i pohybující se soustavě. Transformuje se totiž

$$l' = \gamma \, l, \quad t' = \frac{t}{\gamma}, \quad F'_\perp = \frac{dp'_\perp}{dt'} = \gamma \, \frac{dp_\perp}{dt} = \gamma F_\perp .$$

Síla na jednotku délky je tedy

$$F'_l = \frac{F'_\perp}{l'} = \frac{\gamma \, F_\perp}{\gamma \, l} = F_l \, .$$

V pohybující se vztažné soustavě jsou náboje nehybné a působí na ně jen elektrická síla na jednotku délky:

$$F'_l = \frac{\tau'^2}{2\pi \, \varepsilon_0 \, r} .$$

Přejdeme-li do laboratorní soustavy, dostaneme

$$F_l = F'_l = \frac{1}{\gamma^2} \, \frac{\tau^2}{2\pi \, \varepsilon_0 \, r} = \frac{\tau^2}{2\pi \, \varepsilon_0 \, r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) .$$

První člen na pravé straně je elektrická odpudivá síla, která působí mezi nehybnými lineárními náboji. Pohybují-li se náboje (čímž vzniknou dva lineární proudy), bude mezi nimi působit ještě další, *přitažlivá* síla vyjádřená druhým členem. Tato síla je ovšem druhého řádu vzhledem k v/c a pokud se náboje nepohybují relativistickými rychlostmi, lze ji zanedbat.

Jiná situace nastane, poteče-li proud dvěma rovnoběžnými, nenabitými vodiči. Pomineme-li chaotický tepelný pohyb částic, můžeme v laboratorní soustavě považovat kladné i záporné náboje ve vodiči

[5] Tímto způsobem se vysvětluje vznik magnetických polí v kosmickém prostoru. Magnetické indukční čáry jsou ve vodivé látce (plazmatu) jakoby vmraženy, pohybují se spolu s ní a při gravitačním stlačování látky roste také hustota indukčních čar a tím i magnetické pole.

obr. 4.20

(ionty a elektrony) za nehybné a vyrovnané (s lineárními hustotami $\tau > 0$ a $-\tau$ o téže absolutní velikosti). Není proto důvodu, aby mezi dvěma měděnými dráty, kterými neteče proud, působila nějaká síla. Předpokládejme nyní, že vodiči začnou protékat proudy souhlasným směrem, a to proto, že se elektrony dají do pohybu uspořádanou rychlostí v (viz obr. 4.20). V důsledku efektu kontrakce délek se nyní změní lineární hustoty pohybujících se elektronů. Drát, jímž teče proud se stane nabitým. Vzhledem k nepatrným rychlostem elektronů ve vodičích bude tento náboj ovšem velmi malý. Oba vodiče se nabijí náboji se stejným znaménkem a měly by se (nepatrně) *odpuzovat*. Experiment nám ovšem říká, že se *přitahují*, a to takovou silou, že je na ní možno založit konstrukci elektrických strojů. Kde se bere tato přitažlivá síla?

Lineární hustota náboje prvního vodiče, jímž protéká proud, bude $\tau - \gamma\,\tau$. Ten bude působit na nehybné ionty druhého vodiče silou na jednotku délky

$$F_{l+} \;=\; \frac{(\tau - \gamma\tau)\;\tau}{2\pi\;\varepsilon_0\;r} \;=\; \frac{\tau^2\;(1-\gamma)}{2\pi\;\varepsilon_0\;r}$$

Abychom určili sílu působící na *pohybující* se elektrony druhého vodiče, musíme přejít do soustavy, v níž jsou tyto elektrony v klidu a pak přetranformovat výsledek do laboratorní soustavy:

$$F_{l-} \;=\; F'_{l-} \;=\; \frac{(\gamma\;\tau - \tau)\;(-\tau)}{2\pi\;\varepsilon_0\;r} \;=\; \frac{\tau^2\;(1-\gamma)}{2\pi\;\varepsilon_0\;r}\;.$$

Síla působící v laboratorní soustavě na ionty i elektrony druhého vodiče je tedy stejná. Výsledná síla je pak rovna

$$F_l \;=\; 2\;\frac{\tau^2\;(1-\gamma)}{2\pi\;\varepsilon_0\;r} \;=\; \frac{\tau^2}{2\pi\;\varepsilon_0\;r}\;[\;2\;(1-\gamma)\;-\;(1-\gamma)^2\;+\;(1-\gamma)^2\;]\;=$$

$$=\;\frac{\tau^2}{2\pi\;\varepsilon_0\;r}\;[\;(1-\gamma^2)\;+\;(1-\gamma)^2\;]\;=\;-\;\frac{\gamma^2\;\tau^2\;v^2}{2\pi\;\varepsilon_0\;c^2\;r}\;+\;\frac{(1-\gamma)^2\tau^2}{2\pi\;\varepsilon_0\;r}\;.$$

Protože $\gamma\tau v \;=\; I$, představuje první člen na pravé straně přitažlivou sílu o velikosti

$$F_{lm} \;=\; \frac{\mu_0\;I^2}{2\pi\;r}\;.$$

Tuto sílu nazýváme magnetickou a odpovídá přesně Ampérově síle (4.27). STR tak vysvětluje experimentální fakt, že se dva vodiče protékané souhlasnými proudy přitahují a naopak tento fakt je významným potvrzením teorie relativity. Může přitom překvapovat, že vlastně celá elektrotechnika je založena na relativistických efektech druhého řádu v/c, přestože se částice vůbec nepohybují relativistickými rychlostmi. Ve výrazu pro sílu jsme našli ještě druhý člen, který představuje slabou odpudivou elektrickou sílu

$$F_{le} \;=\; \frac{(1-\gamma)^2\;\tau^2}{2\pi\;\varepsilon_0\;r} \;\approx\; \frac{v^2}{c^2}\frac{\mu_0\;I^2}{8\pi\;r}\;.$$

Je tedy čtvrtého řádu v/c vzhledem k elektrickým silám, které by působily, kdyby náboje ve vodičích nebyly vykompenzovány a druhého řádu vzhledem k silám magnetickým. Můžeme ji samozřejmě zanedbat.

obr. 4.21 obr. 4.22

Dále uvedeme výpočet magnetické indukce a magnetických sil působících na některé symetrické proudové konfigurace.

1. Magnetické pole přímého a rovinného vodiče

Mějme nekonečný přímý vodič protékaný proudem I. Víme, že ve svém okolí vytváří magnetické pole, jehož vektor leží v rovině kolmé k vodiči, je tečný ke kružnicím se středem na vodiči a je orientován podle pravidla pravotočivého šroubu. Velikost magnetické indukce můžeme najít integrováním podle Biotova - Savartova zákona. Pro úsek vodiče konečné délky máme výsledek (4.15), který pro nekonečný vodič přechází v (4.16). Mohli bychom též integrovat vektorový potenciál a podle analogie se skalárním potenciálem přímkového náboje bychom dostali

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r \ \ \vec{x}_0 .$$

Vektorový potenciál míří ve směru vodiče a není určen jednoznačně. Pomocí operace rotace bychom z něho opět dostali výraz pro magnetickou indukci.

Pro nekonečný vodič můžeme však také použít Ampérův zákon aplikovaný na kružnici obepínající vodič. Pak dostaneme

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\,\pi\, r\, B = \mu_0\, I ,$$

odkud okamžitě plyne (4.16).

Je-li nekonečný vodič konečné tloušťky R, potom použitím Ampérova zákona dostaneme cirkulaci magnetické indukce podél kružnice o poloměru $r < R$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\, \pi r^2\, j ,$$

odkud

$$B = \frac{\mu_0\, j\, r}{2} = \frac{\mu_0\, I\, r}{2\pi\, R^2}.$$

Magnetická indukce uvnitř vodiče s konstantní proudovou hustotou $\vec{j}$ tedy závisí přímo úměrně na poloměru, jak je vidět na obr. 4.21.

Také k určení magnetické indukce plošného proudu protékajího po rovinné desce s lineární hustotou α lze použít Ampérova zákona. Vyjdeme z předpokladu, že vektor magnetické indukce je rovnoběžný s deskou a kolmý ke směru proudu a zvolíme uzavřenou křivku jako na obr. 4.22.

K cirkulaci zřejmě přispívají jen úseky rovnoběžné s deskou, takže

$$2\,B\,l = \mu_0\,\alpha\, l, \quad \text{odkud} \quad B = \frac{\mu_0\,\alpha}{2} .$$

obr. 4.23 obr. 4.24

2. Magnetické pole kruhové smyčky

Určíme magnetické pole na ose kruhové smyčky protékané proudem I (v jiných bodech prostoru je to obtížné). Přitom zanedbáme pole proudu v přívodech ke smyčce. Použijeme Biotova - Savartova zákona a budeme sčítat příspěvky od dvojic protilehlých proudových elementů $I\ d\vec{l}_1,\ \ I\ d\vec{l}_2$ na obr. 4.23. Příspěvky takových dvojic budou zřejmě vždy mířit ve směru osy z v pravotočivém směru. Jejich velikost je

$$dB \ = \ 2\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\ dl}{R^2}\,\cos\theta, \qquad \cos\theta \ = \ \frac{r}{R}$$

kde r je poloměr smyčky a R délka průvodiče. Integrací podél polokružnice dostaneme

$$B \ = \ \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I\ r}{R^3}\int_0^{\pi r} dl \ = \ \frac{\mu_0\ I}{2}\,\frac{r^2}{(r^2\ +\ z^2)^{3/2}}\ .$$

Maximální hodnota magnetické indukce je ve středu smyčky ve výšce $z = 0$, a to

$$B(0) \ = \ \frac{\mu_0\ I}{2\ r}\ .$$

Je zajímavé srovnat průběh magnetické indukce na ose na obr. 4.24 s průběhem intenzity elektrického pole nabité kružnice na obr. 2.15.

3. Magnetické pole solenoidu a toroidu

Pod solenoidem rozumíme cívku s hustě navinutým drátem, jímž protéká proud. Nechť poloměr solenoidu je r a délka L, celkový počet závitů N a počet závitů na jednotku délky n. Potom můžeme rozdělit solenoid na krátké úseky délky dl a považovat je za kruhové proudy $n\ I\ dl$ (obr. 4.25).

Abychom určili magnetickou indukce kdekoli na ose solenoidu, stačí sečíst příspěvky takových kruhových proudů. Je-li l vzdálenost bodu na ose od kruhového proudu a α úhel pod nímž je vidět okraj kružnice z bodu na ose a R délka průvodiče, platí $l = r\ \mathrm{cotg}\ \alpha$, $\ dl = -r\ d\alpha/\sin^2\ \alpha, R = r/\sin\ \alpha$, a tedy

$$dB \ = \ \frac{\mu_0\ I\ n\ dl}{2}\,\frac{r^2}{R^3} \ = \ -\ \frac{\mu_0\ I\ n}{2}\,\sin\alpha\ d\alpha, \qquad \text{a}$$

obr. 4.25

obr. 4.26

$$B \;=\; -\;\frac{\mu_0\; I\; n}{2}\; \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \sin\alpha\; d\alpha \;=\; \frac{\mu_0\; I\; n}{2}\; (\cos\;\alpha_1\;-\;\cos\alpha_2)\;.$$

Průběh indukce na ose konečného solenoidu vidíme na obr. 4.26; v centrální oblasti je konstantní, na koncích se projevují okrajové efekty a indukční čáry se zakřivují. Pokud závity nebudou hustě navinuty, bude průběh pole zvlněn. Solenoid můžeme považovat též za válcovou plochu, po jejímž plášti protéká plošný proud.

Je-li solenoid nekonečný, dosadíme $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi$ a dostaneme

$$B \;=\; \mu_0\; I\; n$$

Tentýž výsledek bychom dostali z Ampérova zákona, kdybychom zvolili obdélníkovou integrační křivku jako na obr. 4.27. Z důvodu symetrie musí být pole rovnoběžné s osou, takže příčné úseky 2 a 4 k cirkulaci nepřispívají. Je-li úsek 1 na ose fixován, potom pole vně solenoidu musí být konstantní. Měníme-li totiž křivku tak, že posouváme vnější stranu 3 dále od solenoidu, obepíná křivka stále týž proud ILn. Vnější pole by ovšem muselo klesat se vzdáleností od osy válce a tak nezbývá, než aby bylo všude nulové. Odtud však plyne, že úsek 1 může být umístěn nejen na ose, ale v libovolné vzdálenosti od ní a vždy dostaneme indukci $B = \mu_0 In$. *Pole uvnitř nekonečného solenoidu je homogenní!.*

Toroid můžeme považovat za solenoid stočený do prstence. Má výhodu, že se u něho neprojevují okrajové efekty a nevýhodu, že pole už není homogenní. Jsou-li vnitřní a vnější poloměr toroidu $R_1,\; R_2$, bude podle Ampérova zákona pole v toroidu na kružnici o poloměru r dáno z $2\pi r B = \mu_0 IN$ jako

$$B \;=\; \frac{\mu_0\; I\; N}{2\pi\; r}\;.$$

obr. 4.27 obr. 4.28

Je-li toroid tenký a rozdíl mezi jeho vnitřním a vnějším poloměrem malý, bude v něm pole přibližně homogenní a rovné poli solenoidu. Odvozené výsledky pro solenoid a toroid nezávisejí na tvaru jejich průřezu.

3. Síla a moment síly působící na proudovou smyčku v magnetickém poli

Na rovinnou proudovou smyčku l plochy ΔS protékanou proudem I působí v magnetickém poli síla $\vec{F}$ a moment síly $\vec{M}$

$$\vec{F} = I \oint_l d\vec{l} \times \vec{B}, \qquad \vec{M} = \oint_l \vec{r} \times d\vec{F} = I \oint_l \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) \, .$$

Vynásobíme-li integrál pro sílu skalárně konstantním vektorem $\vec{c}$, dostaneme

$$\vec{c} \cdot \oint_l d\vec{l} \times \vec{B} = - \oint_l (\vec{c} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \int_{\Delta S} \operatorname{rot} (\vec{c} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S} (\vec{c} \, \nabla) \, \vec{B} \cdot d\vec{S} \, ,$$

Budou-li se parciální derivace $\vec{B}$ v ploše smyčky málo měnit (například bude-li smyčka malá) a zavedeme-li Ampérův magnetický moment smyčky $\vec{m} = I \Delta \vec{S}$, dostaneme

$$\vec{c} \cdot \vec{F} = \vec{m} \cdot (\vec{c} \, \nabla) \, \vec{B} \, .$$

Protože rotace $\vec{B}$ v ploše smyčky je nulová, platí

$$\vec{m} \cdot (\vec{c} \, \nabla) \, \vec{B} = \vec{c} \cdot (\vec{m} \, \nabla) \, \vec{B} \, .$$

Na smyčku proto působí síla

$$\vec{F} = (\vec{m} \, \nabla) \, \vec{B} = \nabla \, (\vec{m} \cdot \vec{B}) \, ,$$

analogická síle působící na elektrický dipól v nehomogenním elektrickém poli (2.39).

Bude-li magnetické pole homogenní, budou derivace $\vec{B}$ nulové a výsledná síla bude nulová. Budou však působit síly, které se budou snažit smyčku deformovat.

Pokud jde o moment síly, bude působit i v homogenním poli. Máme

$$\vec{M} = I \oint_l \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) = I \oint_l (\vec{B} \cdot \vec{r}) \, d\vec{l} - I \oint_l \vec{B} \, (\vec{r} \cdot d\vec{l}) \, .$$

Druhý integrál je roven nule (vytkneme konstantní $\vec{B}$ a použijeme Stokesovu větu). První integrál opět vynásobíme skalárně konstantním vektorem $\vec{c}$:

$$\vec{c} \cdot \oint_l (\vec{B} \cdot \vec{r}) \, d\vec{l} = \int_{\Delta S} \operatorname{rot} \left[(\vec{B} \cdot \vec{r}) \, \vec{c} \, \right] \cdot d\vec{S} = - \int_{\Delta S} \left[\vec{c} \times \operatorname{grad} (\vec{B} \cdot \vec{r}) \right] \cdot d\vec{S} =$$

$$= - \int_{\Delta S} (\vec{c} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = - \vec{c} \cdot \int_{\Delta S} \vec{B} \times d\vec{S} \, ,$$

a tedy

$$\vec{M} \;=\; -\,I\,\int_{\Delta S} \vec{B}\times d\vec{S} \;=\; -\,I\;\vec{B}\times\int_{\Delta S} d\vec{S} \;=\; I\;\Delta\vec{S}\times\vec{B} \;=\; \vec{m}\times\vec{B}\;,$$

Moment síly je opět analogický momentu (2.37) působícímu na elektrický dipól v elektrickém poli a snaží se natočit proudovou smyčku tak, aby její vlastní magnetické pole bylo souhlasně rovnoběžné s vnějším polem $\vec{B}$.

3. Magnetický dipól a vektor magnetizace

Podobně jako jsme zkoumali elektrické pole náboje obecně rozloženého v objemu V můžeme zkoumat i magnetické pole malého proudového objemu nebo malé smyčky na velkých vzdálenostech. Mějme objem V, v němž se uzavírají proudy s rozložené s hustotou $\vec{j}$. V teorii elektromagnetického pole se ukazuje, že vektorový potenciál na vzdálenostech mnohem větších než jsou rozměry tohoto objemu můžeme opět jednoznačně rozložit do řady magnetických multipólů jako

$$\vec{A} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\;dV}{R} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_V \vec{j}\;dV \;+\; \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\vec{m}\times\vec{r}\;+\;\cdots\;, \tag{4.38}$$

kde

$$\vec{m} \;=\; \frac{1}{2}\int_V (\;\vec{r}'\times\vec{j}\;)\;dV\;. \tag{4.39}$$

Zde opět $\vec{R}$ představuje vektor průvodiče, $\vec{r}$ je polohový vektor bodu, v němž potenciál určujeme a $\vec{r}'$ probíhá objem V. První člen v rozvoji (4.38) je roven nule, vzhledem k tomu, že proudy jsou v objemu uzavřeny a tento fakt vyjadřuje neexistenci magnetického monopólu. Druhý člen je příspěvek magnetického dipólu, přičemž *magnetický dipólový moment* je definován vztahem (4.39). Vyšší magnetické multipóly jsou méně významné.

Obyčejně pod magnetickým dipólem rozumíme malou (a proto rovinnou) proudovou smyčku plochy ΔS protékanou proudem I. Zvolíme-li počátek souřadnic uvnitř plochy této smyčky, přejde definice dipólového momentu na

$$\vec{m} \;=\; \frac{1}{2}\int_V (\vec{r}'\times\vec{j}\;)\;dV \;=\; \frac{1}{2}\,I\int_l \vec{r}'\times d\vec{l} \;=\; I\;\Delta\;\vec{S}\;. \tag{4.40}$$

Vektorový potenciál magnetického dipólu můžeme dostat také přímo integrací podél smyčky s použitím věty (M.47):

$$\vec{A} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\oint_l \frac{d\vec{l}}{R} \;=\; -\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,I\int_{\Delta S}\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times d\vec{S} \;=$$

$$=\;\frac{\mu_0}{4\pi}\,I\int_{\Delta S}\frac{d\vec{S}\times\vec{R}}{R^3} \;\approx\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{\Delta S\times\vec{r}}{r^3} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\;.$$

Magnetickou indukci dipólu najdeme jako

$$\vec{B} \;=\; \mathrm{rot}\;\vec{A} \;=\; -\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,(\;\vec{m}\;\nabla\;)\,\frac{\vec{r}}{r^3} \;=\; -\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,\nabla\,\frac{\vec{m}\;\cdot\;\vec{r}}{r^3}\;. \tag{4.41}$$

Tento výraz má matematicky stejný tvar jako výraz pro gradient potenciálu elektrického dipólu (2.31), a proto můžeme magnetickou indukci psát podle (2.33) jako

$$\vec{B} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\;(\vec{m}\;\cdot\;\vec{r}\;)\;\vec{r}}{r^5} \;-\; \frac{\vec{m}}{r^3}\right]\;. \tag{4.42}$$

obr. 4.29

Průběh siločar elektrického a magnetického dipólu na velkých vzdálenostech je skutečně shodný, jak je vidět z obr. 4.29. [6]

Magnetický dipól, jehož pole je dáno přesně vztahem (4.41) nazýváme podobně jako u elektrického dipólu bodovým, tj. zanedbáváme rozměry smyčky Vzhledem k formální shodnosti s polem elektrického dipólu můžeme převzít i vztahy pro sílu, moment silové dvojice a energii magnetického dipólu ve vnějším magnetickém poli:

$$\vec{F} \;=\; (\vec{m}\nabla)\,\vec{B}, \quad \vec{D} \;=\; \vec{m}\times\vec{B}, \quad W \;=\; -\,\vec{m}\,\cdot\,\vec{B}\,. \tag{4.43}$$

Silový moment se snaží natáčet magnetický dipól do směru pole a nehomogenní magnetické pole pak vtahuje takto orientovaný dipól do oblast silnějšího pole, kde je větší hustota indukčních čar. Existuje však jeden podstatný rozdíl od chování elektrických dipólů, který má vztah k elektromagnetické indukci. Je-li magetický dipól *indukován* vnějším polem, je orientován *proti směru pole* (!), jak uvidíme později. Takový dipól je pak z oblasti silnějšího pole *vytlačován*.

Obíhá-li nabitá částice hmotnosti m a náboje q rovnoměrně po kružnici, vytváří smyčkový proud $I = qv/2\pi r$ a její magnetický dipólový moment (budeme ho pro tuto chvíli označovat μ) má velikost

$$\mu \;=\; I\,\Delta S \;=\; \frac{q\,v}{2\pi\,r}\,\pi\,r^2 \;=\; \frac{1}{2}\,q\,r\,v \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{q}{m}\,m\,v \;=\; \gamma l\,. \tag{4.44}$$

Zde l představuje velikost momentu hybnosti částice a γ nazýváme *gyromagnetický poměr*:

$$\gamma \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{q}{m} \;=\; \frac{\mu}{l}\,. \tag{4.45}$$

Magnetický moment a moment hybnosti jsou tedy spolu vázány. Z kvantové mechaniky je známo, že moment hybnosti orbitálního pohybu elektronu v atomu je kvantován a jeho projekce v daném směru může nabývat jen násobků nejmenší hodnoty Planckovy konstanty $\hbar = 1,054.10^{-34}$J.s. Proto i magnetický orbitální moment elektronu je kvantován a může nabývat pouze celých násobků hodnoty

$$\mu_B \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{e}{m_e}\,\hbar \;=\; 9,273.10^{-24}\ \mathrm{A.m^2}\,. \tag{4.46}$$

Tato hodnota se nazývá *Bohrův magneton* a ukazuje na řádovou velikost magnetických dipólových momentů atomů. V roce 1915 provedli A. Einstein a W.J.de Haas známý *Einsteinův - de Haasův* experiment k určení gyromagnetického poměru částic magnetika. Zavěsíme-li ferromagnetický válec ve vnějším

[6] Magnetický dipólový moment definovaný vztahem (4.40) se nazývá *Ampérův* nebo proudový. Vedle toho lze formálně definovat takzvaný *Coulombův magnetický moment* s použitím představy o magnetickém náboji a Coulombova zákona pro magnetické síly mezi dvěma póly dlouhých tyčových magnetů:

$$F \;=\; \frac{1}{4\pi\,\mu_0}\,\frac{q_{m1}\,q_{m2}}{r^2}\,.$$

Jsou-li severní a jižní magnetický pól pak odděleny vektorem $\vec{l}$, bude Coulombův magnetický moment $\vec{m}_C = q_m\,\vec{l}$. Ukáže se, že jeho vztah k Ampérovu magnetickému momentu je prostě $\vec{m}_C = \mu_0\,\vec{m}$.

magnetickém poli a změníme náhle polaritu tohoto pole, musí se válec pootočit, protože se změní jeho moment hybnosti.

Tímto způsobem byl změřen gyromagnetický poměr elektronů, který se však ukázal být roven $\gamma = e/m_e$ a nikoli (4.45) ! Později se vyjasnilo, že ferromagnetismus není vyvolán orbitálním pohybem elektronů, ale jejich spiny, vlastními momenty hybnosti, které nesouvisejí s pohybem elektronů v prostoru. Jejich nejmenší hodnota je pak $\hbar/2$, takže vlastní magnetický dipólový moment elektronu je opět roven Bohrově magnetonu. Přesnější výpočet na základě kvantové elektrodynamiky dává v překvapivém souhlase s experimentem hodnotu $\mu_e = 1,00116\ \mu_B$.

Jaderné částice, protony a neutrony, mají také své magnetické dipólové momenty, které se vyjadřují v *jaderných magnetonech*

$$\mu_N \;=\; \frac{m_e}{m_p}\,\mu_B \;=\; 5,051.10^{-27}\ \mathrm{A.m^2}\ . \tag{4.47}$$

Magnetický moment protonu a neutronu není roven celému násobku jaderného magnetonu, ale $\mu_p = 2,792\ \mu_N, \quad \mu_n = -1,913\ \mu_N$.

Mějme nabité těleso náboje Q, hmotnosti M, momentu hybnosti $\vec{L}$ a momentu setrvačnosti I rotující s úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$. Jeho magnetický dipólový moment je

$$\mu \;=\; \gamma\ L \;=\; \gamma\ I\ \Omega \;=\; \frac{1}{2}\ \frac{Q}{M}\ I\ \Omega\ . \tag{4.48}$$

Známe-li tedy momenty setrvačnosti těles, můžeme přímo určit jejich magnetické momenty. Například rotující prostorově nabitá koule o momentu setrvačnosti $I = \frac{2}{5}MR^2$ bude mít magnetický dipólový moment

$$\mu \;=\; \frac{1}{5}\ Q\ \Omega\ R^2\ . \tag{4.49}$$

Pro povrchově nabitou kouli bude v (4.49) koeficient 1/3, pro objemově nabitý válec 1/4 atd.

Pro studium magnetických vlastností látek je důležité znát velikosti a chování magnetických momentů atomů a molekul. Vedle vlastních magnetických momentů atomů, které jsou řádově rovny Bohrovu magnetonu, vznikají po vložení látky do vnějšího magnetického pole momenty indukované. Magnetické pole bude na vlastní momenty působit silovým momentem, který vyvolá změnu momentu hybnosti:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}\ .$$

Pomocí gyromagnetického poměru můžeme tuto rovnici přepsat na

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} \;=\; \gamma\ (\vec{\mu} \times \vec{B})\ . \tag{4.50}$$

Tato rovnice popisuje precesní pohyb vektoru magnetického dipólového momentu kolem směru vnějšího magnetického pole s úhlovou frekvencí

$$\vec{\omega}_L \;=\; -\ \gamma\ \vec{B} \tag{4.51}$$

(takzvaná *Larmorova frekvence*). Precese zmenší střední hodnotu momentu hybnosti a tím i magnetického momentu částice. Koná-li například elektron kruhový pohyb v rovině svírající se směrem magnetického pole určitý úhel a je-li $< \rho^2 >$ střední kvadratický poloměr průmětu dráhy do roviny kolmé ke směru pole, zmenší se díky Larmorově precesi moment hybnosti o $\Delta l_L = m_e < \rho^2 > \omega_L$. To je ekvivalentní vzniku indukovaného magnetického momentu

$$\vec{\mu}_{ind} \;=\; \gamma\Delta\vec{l}_L \;=\; -\ \frac{e^2}{4m_e} < \rho^2 > \vec{B} \;=\; -\beta\vec{B}. \tag{4.52}$$

Tento výraz můžeme srovnat s indukovaným elektrickým dipólovým momentem (2.40). V atomu se Z elektrony musíme ovšem jednotlivé momenty sčítat. Pro kulově symetrický atom obyčejně uvádíme střední kvadratickou hodnotu poloměru dráhy elektronů $< r_0^2 >$ a pak dostáváme indukovaný moment atomu jako

$$\vec{\mu}_{indA} \;=\; -\ \frac{e^2\ Z < r_0^2 >}{6m_e}\ \vec{B}\ . \tag{4.53}$$

obr. 4.30

Hodnota $< \rho_0^2 >$, kterou je třeba ovšem určovat metodami kvantové fyziky, je řádově rovna rozměru atomu, 10^{-10} m.

Podobně jako u elektrických dipólů můžeme uvažovat spojité prostorové či plošné rozložení magnetických dipólů. Jsou-li v nějakém objemu magnetické dipólové momenty o koncentraci N všechny souhlasně orientovány, můžeme zavést vektor $\vec{M} = N\,\vec{m}$, který nazýváme *vektorem magnetizace*. Ten obecně (tj. i když momenty nejsou všechny stejně orientovány) představuje magnetický dipólový moment jednotky objemu. [7]. Objem s nenulovým vektorem magnetizace nazýváme *magnetizovaným*. Magnetizace se zřejmě měří v jednotkách ampér na metr.

Určíme vektorový potenciál magnetického pole buzeného v bodě o polohovém vektoru $\vec{r}$ magnetizovaným objemem s vektorem magnetizace $\vec{M}(\vec{r}')$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}')\times\vec{R}}{R^3}\,dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\int_V \mathrm{rot}'\left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R}\right)dV + \int_V \frac{\mathrm{rot}'\,\vec{M}(\vec{r}')}{R}\,dV\right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}')\times d\vec{S}}{R} + \int_V \frac{\mathrm{rot}'\,\vec{M}(\vec{r}')}{R}\,dV\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint_S \frac{\vec{\alpha}_m(\vec{r}')\;dS}{R} + \int_V \frac{\vec{j}_m(\vec{r}')\;dV}{R}\right],$$

kde pod rot' se rozumí rotace derivovaná podle proměnné $\vec{r}'$. Výsledný potenciál je tedy ekvivalentní potenciálu pole buzeného plošným proudem hustoty $\vec{\alpha}_m$ vázaným na povrch tělesa a objemovým proudem hustoty $\vec{j}_m$ vázaným uvnitř tělesa (tzv. magnetizační proudy), kde

$$\vec{\alpha}_m = \vec{M}\times\vec{n}, \qquad \vec{j}_m = \mathrm{rot}\,\vec{M} \tag{4.54}$$

($\vec{n}$ je jednotkový vektor normály k povrchu tělesa).

Magnetizovaný objem se tedy chová jako určité ekvivalentní rozdělení plošných a objemových proudů. Je-li v daném objemu vektor magnetizace konstantní, bude takový objem vytvářet pole totožné s polem plošného proudu na povrchu. Mějme například objem ve tvaru kolmého válce s vektorem magnetizace rovnoběžným s osou. Pro dostatečně dlouhý válec bude pole vně nulové a pole uvnitř bude polem solenoidu (obr. 4.30)

$$B = \mu_0\,\alpha = \mu_0\,M\,. \tag{4.55}$$

Názorně je to vidět na obr. 4.31. Smyčkové proudy dipólů se uvnitř válce vyruší a zůstane pouze obvodový proud.

Zvolme nyní válec podstavy S a malé výšky Δh (obr.4.32). Jeho celkový magnetický moment bude roven

$$\vec{m}_0 = \vec{M}\;S\;\Delta h = \vec{m}_s\;S\,, \tag{4.56}$$

kde $\vec{m}_s$ představuje plošnou hustotu magnetických dipólů. Taková nekonečně tenká válcová vrstva představuje vlastně rovinnou *magnetickou dvojvrstvu* a je ekvivalentní smyčkovému proudu I, který vytváří magnetický

[7]Nahradíme-li Ampérův magnetický moment momentem Coulombovým, nazýváme vektor $\vec{P}_m = N\vec{m}_C$ *vektorem magnetické polarizace*

obr. 4.31 obr. 4.32

moment $m_0 = I\ S$. Velikost plošné hustoty Ampérových magnetických momentů je tedy rovna $m_s = I$, Coulombových momentů $m_{Cs} = \mu_0 I$.

4. Magnetika v magnetickém poli

Magnetika budeme považovat za tělesa tvořená elementárními magnetickými dipóly; tyto dipóly mohou být jak vlastní, tak indukované. Vedle volných proudů o hustotě $\vec{j}$ musíme v magnetiku tedy uvažovat i vázané, nagnetizační proudy s hustotou (4.54). Můžeme tedy psát Maxwellovu rovnici

$$\mathrm{rot}\ \vec{B}\ =\ \mu_0\ (\ \vec{j}\ +\ \vec{j}_m\ )\ =\ \mu_0\ (\ \vec{j}\ +\ \mathrm{rot}\ M\ )\ .$$

Dělíme-li tuto rovnici μ_0, převedeme rot M na levou stranu a zavedeme vektor

$$\vec{H}\ =\ \frac{1}{\mu_0}\ \vec{B}\ -\ \vec{M}\ , \tag{4.57}$$

můžeme zapsat soustavu Maxwellových rovnic pro stacionární magnetické pole v magnetiku jako

$$\mathrm{div}\ \vec{B}\ =\ 0\ , \qquad \mathrm{rot}\ \vec{H}\ =\ \vec{j}\ . \tag{4.58}$$

Účelnost zavedení vektoru $\vec{H}$, který nazýváme *vektorem intenzity magnetického pole*, je v tom, že se pak můžeme omezit pouze na zadání proudové hustoty *volných* proudů (které se dají měřit ampérmetrem); vlastnosti vázaných magnetizačních proudů jsou již ve vektoru $\vec{H}$ obsaženy.

Tak Ampérův zákon pro cirkulaci intenzity magnetického pole bude znít

$$\oint_l \vec{H}\ \cdot\ d\vec{l}\ =\ \int_S \vec{j}\ \cdot\ d\vec{S}\ =\ I\ , \tag{4.59}$$

kde I je volný proud. Podle analogie s elektrickým polem nazýváme tuto cirkulaci *magnetomotorickým napětím* $\mathcal{E}_m = I$.

Je zřejmé, že na hranici dvou magnetik, tj. na ploše, kde jsou pouze vázané proudy, budou tečné složky vektoru intenzity magnetického pole spojité na rozdíl od složek magnetické indukce, které zde mají skok $\mu_0\alpha$. Naproti tomu vektor intenzity magnetického pole nemá tak obecný význam jako vektor magnetické indukce, který udává silové působení mezi proudy. Nemůžeme také například udat obecný vztah pro divergenci $\vec{H}$.

Soustava rovnic (4.58) nemá plně určené řešení a bylo by ji třeba ještě doplnit o vztah mezi vektory $\vec{H}$ a $\vec{B}$. Z definice je patrno, že tyto vektory nemusí mít obecně ani stejný směr. Vektor $\vec{M}$ může být

obr. 4.33

konstantní, nezávislý na vnějším magnetickém poli. Taková magnetika nazýváme *ideálně tvrdými* a jsou vhodné k vytváření permanentních magnetů.

Většina magnetik se však magnetizuje teprve pod vlivem vnějšího mageticého pole. Pokud atomy magnetika mají vlastní magnetické dipólové momenty (takovým říkáme *paramagnetika*), budou se tyto dipóly ve vnějším magnetickém poli natáčet ve směru pole. Mluvíme o tzv. orientační magnetizaci. Pokud atomy vlastní momenty nemají, budou se v magnetickém poli indukovat. Takové látky nazýváme *diamagnetika*. Jak jsme se již zmiňovali, indukované momenty budou orientovány proti směru vnějšího magnetického pole a budou ho oslabovat. Diamagnetismus je univerzální vlastností všech látek, ovšem u paramagnetik je překryt magnetickým polem vlastních dipólů, které jsou orientovány ve směru vnějšího pole a zesilují ho. V obou případech můžeme očekávat, že pro nepříliš silná pole bude vektor magnetizace úměrný intenzitě magnetického pole (*ideálně měkká* magnetika). Potom

$$\vec{M} \; = \; \kappa \, \vec{H} \, . \tag{4.60}$$

Konstantu úměrnosti κ nazýváme *magnetickou susceptibilitou.*

Pro dostatečně silná pole pozorujeme u některých magnetik (nazývaných *feromagnetika* jev hystereze. Je obdobný jevu hystereze u feroelektrik a mohli bychom nakreslit hysterezní křivku analogickou křivce na obr. 2.32 pro závislost M na H. Na obr. 4.33 vidíme hysterezní smyčku feromagnetika pro dvě různé hodnoty maximální magnetizace M_m.

Z počátku vychází opět "panenská křivka" prvotního magnetování, která se postupně blíží nasycené hodnotě M_s. Při zpětném magnetování zůstává i při nulovém vnějším poli *remanentní magnetizace* M_r, ke zrušení magnetizace je třeba *koercitivního pole* H_c. Hodnota nasycené (též *spontánní*) magnetizace je důležitou charakteristikou feromagnetika a například pro čisté železo při pokojové teplotě se udává $\mu_0 M_s = 2,15$ Wb.m^{-2}. Feromagnetika s vysokou hodnotou koercitivního pole ($> 10^3$ A.m^{-1}) a velkou remanentní magnetizací (širokou hysterezní křivkou) se nazývají *magneticky tvrdá* a hodí se pro konstrukci permanentních magnetů. Naopak materiály s úzkou hysterezní křivkou ($H_c < 100$ A.m^{-1}) jsou *magneticky měkká* a používají se v zařízeních s proměnným magnetickým polem. K nim patří například používaná ocel Aramco.

Vraťme se k předpokladu, že mezi magnetizací a intenzitou pole platí vztah přímé úměrnosti. Potom můžeme psát

$$\vec{B} \; = \; \mu_0 \; (\; \vec{H} \; + \; \vec{M} \;) \; = \; \mu_0 \; (\; \vec{H} \; + \; \kappa \, \vec{H} \;) \; = \; \mu_0 (\; 1 \; + \; \kappa \;) \, \vec{H} \; = \; \mu_0 \mu_r \, \vec{H} \; = \; \mu \, \vec{H} \, . \tag{4.61}$$

Vektor magnetické indukce je tedy úměrný vektoru intenzity magnetického pole s koeficientem úměrnosti μ, který nazýváme *absolutní permeabilitou* magnetika. V soustavě jednotek SI, kde byla formálně zavedena rozměrná konstanta μ_0, nazývaná permeabilitou vakua, je absolutní permeabilita součinem této konstanty a bezrozměrné tzv. *relativní permeability* magnetika μ_r. Pokud vektory magnetické indukce a intenzity pole nemají týž směr (například v krystalech nebo jiných magneticky anizotropních materiálech), bude mít permeabilita charakter tenzoru a dostaneme

$$B_i \;=\; \mu_{ik}\; H_k \;. \tag{4.62}$$

Veličina intenzita magnetického pole má v soustavě SI rozměr [H]= $\mathrm{L}^{-1}\mathrm{I}$ a měří se v ampérech na metr. Její cirkulace (magnetomotorické napětí) se měří v ampérech, případně ampérzávitech, je-li cirkulace brána vícenásobně.

Podle (4.61) platí mezi relativní permeabilitou a magnetickou susceptibilitou vztah

$$\mu_r \;=\; 1 \;+\; \kappa \;. \tag{4.63}$$

Protože magnetická susceptibilita může být kladná i záporná, je relativní permeabilita větší nebo menší než 1.

Relativní permeabilita magnetika je důležitou makroskopickou charakteristikou jeho magnetických vlastností. Vložíme-li magnetikum do homogenního magnetického pole v solenoidu, přičte se jeho pole $\vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}$ k magnetickému poli $\vec{B}_0$ buzenému volnými proudy v cívce. Pro výsledné pole a magnetizaci můžeme psát

$$\vec{B} \;=\; \vec{B}_0 \;+\; \mu_0\, \vec{M} \;, \qquad \vec{M} \;=\; (\; \mu_r \;-1\;)\vec{H} \;. \tag{4.64}$$

Vyjádříme-li odtud výsledné pole a magnetizaci v závislosti na původním poli ve vakuu, dostaneme

$$\vec{B} \;=\; \mu_r\, \vec{B}_0 \;, \qquad \vec{M} \;=\; \frac{\mu_r - 1}{\mu_0}\, \vec{B}_0 \;. \tag{4.65}$$

Odtud je zřejmo, že magnetické pole v magnetiku je zesilováno (případně zeslabováno, je-li relativní permeabilita menší než 1) μ_r-krát. V případě nehomogenního pole můžeme vzít vždy dostatečně malý objem, v němž lze pole považovat za homogenní a vzít lokální hodnotu relativní permeability. Tak můžeme použít dosud odvozené vztahy pro magnetické silové působení ve vakuu a formálně v něm vynásobit permeabilitu vakua μ_r. Energie magnetického pole v ideálně měkkém magnetiku bude pak

$$w_m \;=\; \frac{B^2}{2\mu_r\mu_0} \;=\; \frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2} \;. \tag{4.66}$$

Z vlastností vektorů $\vec{H}$, $\vec{B}$ plynou též podmínky pro změnu jejich složek na rozhraní dvou magnetik o permeabilitách μ_1, μ_2. Na tomto rozhraní jsou plošně rozloženy pouze vázané proudy, takže tečné složky $\vec{H}$ jsou spojité. Spojitými zůstávají i normálové složky $\vec{B}$ (obr. 4.34), takže máme

$$H_{1t} \;=\; H_{2t} \;, \qquad \mu_1\, H_{1n} \;=\; \mu_2\, H_{2n} \;. \tag{4.67}$$

Dělením těchto vztahů dostáváme

$$\frac{\mathrm{tg}\;\theta_1}{\mathrm{tg}\;\theta 2} \;=\; \frac{\mu_1}{\mu_2} \;. \tag{4.68}$$

Podobně jako jsme u kondenzátoru zaváděli kapacitu jako funkci jeho geometrie a permitivity prostředí, můžeme u solenoidu definovat *indukčnost* L jako poměr indukčního toku průřezem solenoidu a protékajícího volného proudu. Má-li solenoid N závitů, musíme tok brát N-násobný:

$$L \;=\; \frac{\Phi}{I} \;, \quad \text{resp.} \qquad L \;=\; \frac{N\;\Phi}{I} \;=\; \frac{N\;B\;S}{I} \;. \tag{4.69}$$

obr. 4.34

To je takzvaná statická definice indukčnosti. Tato indukčnost je zřejmě úměrná velikosti magnetické indukce v solenoidu. Vložíme-li do solenoidu magnetikum, zvětší se pole a tedy i indukčnost μ_r-krát:

$$L = \mu_r \, L_0 \, . \tag{4.70}$$

Vkládáním různých magnetik do solenoidu a měřením změn jeho indukčnosti můžeme měřit relativní permeabilitu. Zjistíme, že existuje několik skupin magnetik a navíc permeabilita jeví teplotní závislost. Tak u diamagnetických látek je relativní permeabilita malá, záporná a teplotně nezávislá:

látka	$(\mu_r - 1) \, . \, 10^6$
bismut	-176
stříbro	-26
NaCl	-12,6
sklo	-12,6
měď	-10,3
voda	-8,8
etanol	-7,9
vodík	-0,063

Látky paramagnetické mají relativní permitivity v širokém rozsahu a je pro ně typická teplotní závislost

$$\mu_r = 1 + \frac{C}{T} \, , \tag{4.71}$$

kde C je Curieova teplota. Výjimku tvoří alkalické kovy, jejichž permeabilita na teplotě nezávisí. Pro některá paramagnetika máme

látka	$(\mu_r - 1) \, . \, 10^6$
dusík	0,013
vzduch	0,38
kyslík	1,9
hliník	23
wolfram	176
platina	350
tekutý kyslík	3 400

obr. 4.35

Složitější situace nastává u silně magnetických látek, jako jsou feromagnetika. Jejich relativní permeabilita je proměnná v závislosti na vnějším magnetickém poli a silně teplotně závislá. Při dosažení Curieovy teploty jejich permeabilita poklesne z vysokých hodnot řádově $10^3 - 10^4$ na hodnoty běžné u paramagnetik. Typickými feromagnetiky jsou železo, kobalt, nikl, gadolinium a různé slitiny i nekovového charakteru. Curieova teplota je pro Fe 1043 K, Co 1393 K, Ni 631 K, Gd 289 K. Pro feromagnetika již neplatí přímá úměrnost mezi vektory $\vec{B}$ a $\vec{H}$ a jejich závislost pro konkretní nateriál udává *magnetizační křivka*. Pro určitý druh měkkého železa je uvedena na obr. 4.35.

Feromagnetismus vysvětlujeme tak, že magnetické dipóly atomů jsou již spontánně orientovány v tzv. Weissových doménách a ty se pak v magnetickém poli natáčejí jako celky. Sama teorie feromagnetismu je však poměrně obtížná a je založena na zákonitostech kvantové fyziky.

Vedle feromagnetik se setkáváme s *antiferomagnetiky* (NiO, FeF_2, MnS aj.), u nichž magnetické momenty sousedních atomů jsou orientovány antiparalelně. U *ferimagnetických látek* (feritů) jsou sousední momenty rovněž antiparalelní, ale různé velikosti, takže látka je spontánně zmagnetoivána. K feritům patří třeba magnetovec Fe_3O_4. Nad tzv. Neélovou teplotou přecházejí tyto látky v obyčejná paramagnetika. Těleso vytvořené z magnetika s fixně orientovanými magnetickými dipóly se nazývá permanentní magnet. Podobně jako u dielektrik i síly mezi magnetickými dipóly vyvolávají mechanické účinky (*magnetostrikce*).

Relativní permeabilita je makroskopická látková konstanta, kterou je možno teoreticky vypočítat z mikroskopického modelu magnetik. Tak pro látky diamagnetické můžeme vyjít z Langevinovy teorie indukovaných magnetických momentů atomů, které jsme odvodili v předchozím odstavci (4.53). Protože vektor magnetizace představuje magnetický dipólový moment jednotky objemu látky, dostaneme odtud

$$\mu_r \;=\; 1 \;+\; \kappa \;=\; 1 \;-\; \mu_0 \; n \; \frac{e^2 \; Z \;\; < r_0^2 >}{6 \; m_e} \; , \tag{4.72}$$

kde n je počet atomů v jednotce objemu. To je Langevinův vztah pro permeabilitu diamagnetik; počet atomů v jednotce objemu určíme pomocí Avogadrova zákona. Přesnější, kvantovou teorii diamagnetismu podal ve 20. letech J.H. van Vleck.

Pokud jde o orientační polarizaci paramagnetik, můžeme opět použít Debyovu - Langevinovu teorii a pouze modifikovat vzorec (2.82):

$$\mu_r \;=\; 1 \;+\; \frac{\mu_0 \; n \; m^2}{3 \; k \; T} \; . \tag{4.73}$$

Zde m je velikost vlastního magnetického momentu atomu a k Boltzmannova konstanta. Tento vzorec vysvětluje teplotní závislost permeability paramagnetik. Obecnou kvantovou teorii paramagnetismu podal

obr. 4.36 obr. 4.37

opět van Vleck.

Jestliže v magnetiku neprotékají žádné volné proudy, dostáváme soustavu Maxwellových rovnic

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 , \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = 0 . \tag{4.74}$$

Ta je formálně shodná se soustavou rovnic elektrostatiky v prostoru, kde nejsou náboje. Protože pole $\vec{H}$ je nyní potenciální, můžeme zavést *magnetostatický potenciál* ψ vztahem

$$\vec{H} = - \operatorname{grad} \psi . \tag{4.75}$$

V tomto případě můžeme tedy mluvit o *magnetostatickém poli* a soustavě rovnic magnetostatiky.

Při navrhování cívek pro generaci magnetických polí se setkáváme s různě větvenými magnetickými indukčními toky a hovoříme o *magnetických obvodech.* Tak jako se elektrické proudy musí uzavírat do smyček, tvoří i magnetické indukční čáry uzavřené obvody. Takový uzavřený obvod konečného solenoidu je na obr. 4.36.

Nechť indukční čáry tvoří uzavřenou trubici o proměnném průřezu ΔS. Potom pro cirkulaci magnetické indukce podél trubice platí

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l \frac{\Phi}{\Delta S} \, dl = \Phi \oint_l \frac{dl}{\Delta S} = \mu \, N \, I = \mathcal{E}_m .$$

Je-li N počet závitů solenoidu, představuje NI magnetomotorické napětí (4.59).

Veličina

$$R_m = \frac{1}{\mu} = \oint_l \frac{dl}{\Delta S} \tag{4.76}$$

závisí jen na délce a průřezu trubice a magnetických vlastnostech prostředí. Nazývá se *magnetický odpor* neboli *reluktance.* Její převrácená hodnota

$$\Lambda = \frac{1}{R_m}$$

nese název *magnetická vodivost* neboli *permeance.* Magnetický odpor se měří v jednotkách převrácený henry, magnetická vodivost v henry.

Pro magnetický obvod můžeme tedy zapsat vztah mezi indukčním tokem, magnetomotorickým napětím a magnetickým odporem, který připomíná Ohmův zákon. Nazývá se *Hopkinsonův zákon*:

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m} . \tag{4.77}$$

Při řešení složitejších magnetických obvodů bychom mohli pracovat analogicky s magnetickým potenciálem a magnetickým napětím, které se měří stejně jako mmn v ampérech, formulovat magnetické Kirchhoffovy vzorce apod.

Nakonec ještě určíme sílu, kterou se přitahují koncové nástavce dvou magnetů (obr. 4.37).

Síla působící mezi dvěma magnety

Pro malé magnety bychom mohli použít výrazy pro síly působící mezi magnetickými dipóly. Je-li naopak rozměr plochy S čel magnetů velký ve srovnání s šířkou mezery mezi nimi, vzniká v této vzduchové mezeře přibližně homogenní magnetické pole o indukci $\vec{B}$. Hustota energie magnetického pole v mezeře je $w_m = B^2/2\mu_0$, při posunutí magnetů o Δd se celková energie změní o $w_m S \Delta d$. Tato veličina musí být rovna práci, kterou koná síla F na dráze Δd, a proto

$$F = w_m\, S = \frac{B^2\, S}{2\, \mu_0} .$$

5. Pohyb nabitých částic v elektrických a magnetických polích

Nabité částice se v elektrických a magnetických polích pohybují pod vlivem Lorentzovy síly. Jde tedy o to řešit pohybovou rovnici

$$m\, \frac{d\vec{v}}{dt} = q\, (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) . \tag{4.78}$$

Pole $\vec{E}, \vec{B}$ mohou být obecně zadanými funkcemi souřadnic a času, takže řešení pohybové rovnice může být složité. Taková obecná řešení je třeba určovat například v elektronové a iontové optice, kde se částice pohybují v nehomogenních polích. Předpokládejme nejdříve, že pole jsou homogenní.

Pohyb v čistě elektrickém poli je analogický pohybu částice v homogenním poli tíhovém. Nechť elektrické pole míří směrem osy x: $\vec{E} = (E, 0, 0)$. Pohybová rovnice ve složkách dá řešení

$$x = \frac{1}{2}\, \frac{q}{m}\, E\, t^2 + v_{0x}\, t + x_0, \quad y = v_{0y}\, t + y_0, \quad z = v_{0z}\, t + z_0 , \tag{4.79}$$

které závisí na počátečních podmínkách.

Začíná-li se částice pohybovat z počátku z klidu, bude její pohyb analogický volnému pádu:

$$x = \frac{1}{2}\, \frac{q}{m}\, E\, t^2 , \quad v_x = \frac{q}{m}\, E\, t = \sqrt{\frac{2qEx}{m}} .$$

Protože

$$\frac{1}{2}\, m\, v_x^2 = q\, e\, x , \qquad \varphi = -\, E\, x + \varphi_0 ,$$

dostáváme zákon zachování energie ve tvaru

$$\frac{1}{2}\, m\, v_x^2 + q\, \varphi = q\, \varphi_0 .$$

Bude-li mít částice počáteční rychlost v_0 ve směru osy y, bude řešení

$$x = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E\,t^2, \qquad y = v_0\,t$$

a dráha bude parabolická jako u vodorovného vrhu v tíhovém poli

$$x = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{E}{v_0^2}\,y^2 \,.$$

V čistě magnetickém poli, které má směr osy z bude pohybová rovnice ve složkách

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}\,v_y\,B\,, \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\,\frac{q}{m}\,v_x\,B\,, \qquad \frac{dv_z}{dt} = 0\,.$$

Pohyb ve směru magnetického pole (osy z) je rovnoměrný, protože v tomto směru magnetické pole silově nepůsobí:

$$z = v_{0z}\,t + z_0\,.$$

Soustavu diferenciálních rovnic pro složky v_x, v_y, které jsou provázány, můžeme řešit bud tak, že jednu z rovnic zderivujeme znovu podle času, vyloučíme jednu z funkcí a pro druhou budeme řešit rovnici druhého řádu, nebo přechodem ke komplexní rychlosti $u = v_x + \mathrm{i}v_y$. Vynásobíme-li rovnici pro v_y imaginární jednotkou i a sečteme obě rovnice, dostaneme

$$\frac{du}{dt} + \mathrm{i}\,\frac{qB}{m}\,u = 0\,.$$

Řešením této rovnice je komplexní funkce

$$u = C\,\mathrm{e}^{\alpha\,t} = v_{0\perp}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\delta+\omega_c t)}\,,$$

kde ω_c je takzvaná *cyklotronová frekvence* rovná

$$\omega_c = \frac{q}{m}\,B\,. \tag{4.80}$$

Pro komplexní rychlost máme

$$u = v_{0\perp}\,\cos(\omega_c t+\delta) - \mathrm{i}\,v_{0\perp}\sin(\omega_c t+\delta)\,, \tag{4.81}$$

a tedy výsledné řešení ve složkách

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0\perp}\,\cos(\omega_c t+\delta)\,, \qquad & x &= x_0 - r_c\,\sin\delta + r_c\,\sin(\omega_c t+\delta) \\ v_y &= -\,v_{0\perp}\,\sin(\omega_c t+\delta)\,, \qquad & y &= y_0 - r_c\,\cos\delta + r_c\,\cos(\omega_c t+\delta)\,. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Délka r_c se nazývá *cyklotronový poloměr*. Je roven

$$r_c = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} = \frac{m\,v_{0\perp}}{q\,B}\,. \tag{4.83}$$

V homogenním magnetickém poli koná tedy nabitá částice rovnoměrný kruhový pohyb v rovině kolmé k magnetickému poli s úhlovou frekvencí ω_c a s poloměrem r_c. Na tento pohyb se superponuje rovnoměrný pohyb ve směru osy z takže výsledná dráha částice má tvar šroubovice, která se ovíjí kolem magnetické indukční čáry (obr. 4.38).

Je důležité si všimnout, že částice bude rotovat kolem indukční čáry v *levotočivém smyslu*, takže svým vlastním indukovaným magnetickým polem bude vnější pole oslabovat. Volné částice (které tvoří například plazma) se tedy chovají v magnetickém poli jako diamagnetika.

obr. 4.38 obr. 4.39

obr. 4.40 obr. 4.41

Přejdeme nyní k situaci. kdy působí současně magnetické a elektrické pole, která jsou navzájem kolmá: $\vec{E} = (0, E, O)$, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Pohybová rovnice bude nyní nehomogenní:

$$\frac{du}{dt} + \mathrm{i}\,\frac{qB}{m} = \mathrm{i}\,\frac{qE}{m}\,.$$

K obecnému řešení homogenní rovnice (4.81) musíme přičíst ještě zvláštní řešení nehomogenní rovnice. Snadno zjistíme, že je reálné a rovno

$$u_{nh} = v_d = \frac{E}{B}\,, \tag{4.84}$$

Této veličině říkáme *driftová rychlost*. Ve zkřížených elektrickém a magnetickém poli koná tedy částice jednak pohyb po šroubovici ovíjející se kolem osy z ve směru magnetického pole a kromě toho se posouvá ve směru osy x, tedy kolmo jak k magnetickému tak k elektrickému poli (!). Takovému pohybu napříč magnetickým indukčním čarám říkáme *drift*. Všimněme si, že driftová rychlost nezáleží ani na znaménku ani na hmotnosti částice. Superpozicí kruhového a postupného pohybu vzniká trajektorie ve tvaru cykloidy , případně cykloidy zkrácené nebo prodloužené (obr. 4.40).

Drift může být způsoben i jinými silami než elektrickým polem (například gravitací) a dochází k němu i v nehomogenním magnetickém poli, kolmo ke směru gradientu. V těchto případech bude směr driftu záviset na znaménku elektrického náboje částice.

Pohybuje-li se nabitá částice v nehomogenním magnetickém poli, chová se jako diamagnetická a je vytlačována z oblasti větší hustoty siločar. Na tomto jevu jsou založena *magnetická zrcadla*. Pohybuje-li se částice podél siločáry po šroubovici, bude se v silnějším poli jak poloměr tak stoupání šroubovice

obr. 4.42

obr. 4.43

obr. 4.44

zmenšovat, až se částice zastaví a začne se pohybovat opačným směrem. Toho se využívá v otevřených magnetických nádobách určených k udržení horkého plazmatu (viz obr. 4.41). [8]

Na pohybu nabitých částic v elektrických a magnetických polích je založeno množství technických aplikací, zahrnovaných pod souhrnným názvem elektronika. Různě uspořádaná pole umožňují svazky nabitých částic fokusovat a vytvářet elektrické a magnetické čočky. Na tom je založena *elektronová a iontová optika.* Na obr. 4.42 jsou znázorněny elektrické a magnetické čočky jednak s podélným a jednak s příčným polem.

Elektrická a magnetická pole umožňují také separovat částice podle rychlostí a vytvářet rychlostní filtry. Nechť se nabitá částice pohybuje rychlostí v ze vzdálenosti x_0 podél osy x a dopadá na stínítko (fotografickou desku) v rovině y, z (obr. 4.43).

Elektrické a magnetické pole míří rovnoběžně (souhlasně či nesouhlasně) ve směru osy y. Ve směru osy x nepůsobí na částici žádná síla a částice dosáhne stínítka za dobu $t = x_0/v$. Za tuto dobu se odchýlí ve směru y pod vlivem elektrického pole a ve směru z pod vlivem magnetického pole. Částice o témž měrném náboji a různých rychlostech tedy dopadají na stínítko podél paraboly

$$z^2 = \frac{q\, B^2 x_0^2}{2\, m\, E}\, x\,.$$

Této "metody parabol" použil v r. 1901 W. Kaufmann, když určoval závislost hmotnosti relativistických elektronů na jejich rychlosti. Uspořádáme-li magnetické a elektrické pole vzájemně kolmo, můžeme zvolit

[8]Na vlastnostech pohybu nabitých částic v nehomogenním magnetickém a gravitačním poli je založeno chování kosmických částic slunečního větru v zemském magnetickém poli. Zemské magnetické pole má charakter pole dipólu se siločarami zhušťujícími se u geomagnetických pólů. Nabitá částice nemůže pronikat k zemskému povrchu napříč siločarám, ovíjí se kolem nich a pod vlivem gravitačního pole koná drift v rovnoběžkovém směru. Zároveň putuje od pólu k pólu a tam se vždy odráží jako od magnetického zrcadla. V polárních oblastech tak roste koncentrace těchto částic a s tím souvisí výskyt polárních září. Zemská magnetosféra nás tak chrání před pronikáním nabitých kosmických částic.

obr. 4.45

jejich velikosti tak, aby částice o dané rychlosti pohybující se v kolmém směru k oběma polím nebyla vůbec odchylována a prolétávala nastavenou štěrbinou (viz příklad 4.6).

Naopak urychlíme-li částice na stejné rychlosti, budou jejich dráhy v magnetickém poli záviset na měrném náboji q/m. Toho se využívá v *hmotnostní spektroskopii a spektrometrii*, například k analýze izotopového složení směsi iontů. Na obr. 4.45 je znázorněno schema prvního spektroskopu, který zkonstruoval F.W.Aston 1917 a modernějšího spektrometru Dempsterova.

Pohybu nabitých částic v příčném magnetickém poli se využívá v cyklických *urychlovačích*, které umožňují zkoumat chování částic pohybujících se a srážejících se při obrovských energiích. Poloměr kruhové dráhy částice R v magnetickém poli roste s rychlostí. Tak se v cyklotronu pohybují ionty mezi nástavci obrovského magnetu ze středu po rozvíjející se spirále a při přechodu mezerou mezi duanty jsou urychlovány střídavým napětím o frekvenci ω. Jakmile částice dosáhne obvodu magnetického pole, urychlování musí skončit. To je nevýhoda cyklotronu. Pokud rychlosti částice nejsou relativistické, zůstává doba oběhu, odpovídající cyklotronové frekvenci, konstantní. Při dosažení relativistických rychlostí začne narůstat hmotnost částice a prodlužovat se doba oběhu. Je-li urychlovací napětí konstantního kmitočtu, částice začne vypadávat ze synchronismu. Proto nelze na cyklotronu urychlovat relativistické částice.

Synchronizace můžeme dosáhnout tím, že budeme snižovat frekvenci urychlovacího napětí (fázotron neboli synchrocyklotron), zvyšovat hodnotu magnetické indukce (synchrotron) nebo oboje (protonový synchrotron neboli synchrofázotron).

Je také možno ponechat frekvenci i magnetické pole a vynechávat postupně jednu, dvě, tři atd urychlovací periody (mikrotron). Existuje též indukční urychlovač (betatron) s rostoucí magetickou indukcí, kde urychlování vyvolává indukované elektrické pole.

Protože pro relativistické částice se rychlost prakticky rovná rychlosti světla a příliš se nemění, tím že u synchrotronu a synchrofázotronu udržujeme konstantní poměr mezi magnetickou indukcí a hmotností, zůstává konstantní i poloměr dráhy. Pak nemusíme konstruovat magnety o velkých rozměrech nástavců a poloměr urychlovací dráhy může činit desítky kilometrů. Tím se také zmenší křivost dráhy a sníží se ztráty synchrotronovým zářením. Měníme-li magnetické pole nebo urychlovací frekvenci, může být urychlovací cyklus ovšem pouze pulsní. V následující tabulce porovnáváme různé typy cyklických urychlovačů.

urychlovač	B	ω	R	částice	typická energie
CYKLOTRON	konst	konst	rost	ionty	25 MeV
FÁZOTRON	konst	kles	rost	ionty	680 MeV
SYNCHROTRON	rost	konst	konst	elektrony	1 GeV
SYNCHROFÁZOTRON	rost	kles	konst	ionty	1 TeV
MIKROTRON	konst	konst	rost	elektrony	50 MeV
BETATRON	rost	-	konst	elektrony	300 MeV

Mějme nyní vodič obdélníkového průřezu rozložený podél osy y tak, že jeho hrany jsou orientovány ve směru x (hrana b) a z (hrana a). Nechť magnetické pole působí ve směru osy z a elektrické pole leží v rovině y, z (obr. 4.44). Je zřejmé, že konduktivita (měrná vodivost) σ bude nyní různá v různých směrech a bude představovat tenzor tvaru

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

Magnetické pole neovlivňuje pohyb nabitých částic v podélném směru a složka vodivosti ve směru osy z bude

$$j_z = \sigma E_z , \qquad \sigma = \frac{q^2 n}{2m\nu}$$

(viz (3.33)).

Podél osy y poteče tzv. přímý proud, pro nějž platí [9]

$$j_y = \sigma_1 E_y , \qquad \sigma_1 = \frac{\sigma}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}}$$

Podél osy x, napříč magnetickému i elektrickému poli teče tzv. Hallův proud, pro nějž platí

$$j_x = \sigma_2 E_y , \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma \frac{\omega_c}{\nu}}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} .$$

Hallův proud kolmý k magnetickému i elektrickému poli je nám už známý drift částic po cykloidách. Je spíše otázka, jak vůbec může téci přímý proud. Ukazuje se, že je to umožněno srážkami částic. Je-li částice v klidu, magnetické pole na ni nepůsobí a elektrické ji posune v přímém směru. Na pohybující se částici začne však okamžitě působit pole magnetické a částice začne driftovat v příčném směru. Při další srážce se částice zastaví a pod vlivem elektrického pole se opět posune v přímém směru (obr. 4.46).

Pro vodivost v daném směru je tedy rozhodující poměr cyklotronové frekvence, která vyjadřuje vliv magnetického pole a srážkové frekvence. Je-li $\omega_c/\nu \ll 1$, bude $\sigma_1 \approx \sigma, \sigma_2 \approx \sigma$ a magnetické pole ovlivní vodivost jen málo. Naopak při $\omega_c/\nu \gg 1$ bude $\sigma_1 \ll \sigma_2 \ll \sigma$ a vodivost v přímém směru silně poklesne.

Předpokládejme nyní, že vodič je v poměrně slabém magnetickém poli a teče jím stacionární proud $I = jab = nquab$. V příčném směru x působí na nosiče náboje síla $F = quB = qE_t$, kde E_t je efektivní příčné elektrické pole. Na bočních stranách vodiče tak vzniká napětí

$$U = E\,b = u\,B\,b = \frac{j}{nq}\,B\,b = \frac{I\,B}{n\,q\,a} = K\,\frac{I\,B}{a} . \tag{4.85}$$

Toto příčné napětí se nazývá Hallovo a jeho vznik *Hallův jev*. Konstanta K je Hallova konstanta, která závisí na materiálu vodiče, můžeme ji určit z proudu, magnetické indukce a Hallova napětí a stanovit z ní znaménko a měrný náboj nosičů náboje. Pro některé vodiče bylo zjištěno

[9] Vztahy mezi jednotlivými složkami vodivosti lze určit následovně. Zavedeme efektivní elektrické pole $\vec{E}_{ef} = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}$, kde $\vec{j} = nq\vec{u}$. Potom $\vec{j} = \sigma \vec{E}_{ef} = \sigma(\vec{E} + \frac{\vec{j}}{nq} \times \vec{B})$. Dále rozepíšeme $\vec{j} = \sigma E_z \vec{z}_0 + \sigma_1 E_y \vec{y}_0 + \sigma_2 E_y \vec{x}_0$ a dosadíme do předchozí rovnice. Porovnáním příslušných složek vektorů a vyloučením E_y dostaneme $\sigma_1 = \sigma - \frac{\sigma\sigma_2 B}{nq}$, $\sigma_2 = \frac{\sigma\sigma_1 B}{nq}$ a uvážíme-li, že $\frac{\sigma B}{nq} = \frac{\omega_c}{\nu}$, dostaneme složky σ_1, σ_2.

obr. 4.46 obr. 4.47

vodič	$[K\ \mathrm{C}^{-1}.\mathrm{m}^3]$
Cu	- $5,3.10^{-11}$
Ag	- $8,9.10^{-11}$
Bi	- $5,0.10^{-7}$
Zn	+ 10.10^{-11}
Cd	+ 6.10^{-11}

Hallova konstanta odpovídá klasické teorii vodivosti u jednomocných kovů, má překvapivě velkou absolutní hodnotu u bismutu a dokonce kladnou u některých dvojmocných kov (děrová vodivost).

Známe-li konstantu K, a změříme-li Hallovo napětí, můžeme určit hodnotu magnetické indukce (Hallova sonda). Hallův jev se využívá také k separaci kladných a záporných nábojů v proudu ionizovaného plynu v magnetohydrodynamických generátorech (MHD) a vytváření velkých stejnosměrných napětí.

Příklady

4.1 Jak se změní napětí U_0 mezi deskami nabitého kondenzátoru měřené v laboratorní soustavě, začne-li se kondenzátor pohybovat rychlostí $v = 0,8\ c$ ve směru a) kolmém na desky, b) rovnoběžném s deskami.

$[U = 0,6\ U_0, \qquad U = 1,67\ U_0]$

4.2 V urychlovači letí náboje o vlastní hustotě $\rho' = 10^{-4}$ C.m^{-3} rychlostí $v = 0,8c$ ve směru osy x. Jakou hustotu proudu naměříme v laboratorní soustavě?

$[4.10^4$ A.m$^{-2}]$

4.3 Určete celkovou sílu, kterou bude dlouhý přímý vodič protékaný proudem $I_1 = 10$ A působit na obdélníkovou smyčku podle obr. 4.47, jíž protéká proud $I_2 = 5$ A.

$[3,5.10^{-5}$ N, přitažlivá; $1,25.10^{-6}$ N stlačuje smyčku se stran]

4.4 V prostoru je dáno elektrické a magnetické pole jako $E_x = E_y = E_z = 3.10^4$ V.m^{-1}, $B_x = 0, \quad B_y = -B_z = 5.10^{-5}$ T. Najděte souřadnou soustavu, v níž $B = 0$.

$[v = v_x = -\ 0,5\ c]$

4.5 Přímým vodičem protéká proud $I = 100$ A. Určete elektrické a magnetické pole $\vec{E}, \ \vec{B}$, jak se jeví ve vzdálenosti 10 cm od vodiče v souřadné soustavě pohybující se rovnoběžně s vodičem rychlostí 0,8 c.

$[8.10^4$ V.m^{-1}, $\quad 3,33.10^{-4}$ T]

4.6 Jaká výsledná síla působí na nabitou částici pohybující se rychlostí $v = E/B$ ve vzájemně kolmých elektrickém a magnetickém polích tak, že vektory $\vec{E}, \ \vec{B}, \ \vec{v}$ tvoří pravoúhlou pravotočivou soustavu?

[nulová)

4.7 Určete magnetickou indukci ve středu smyčky protékané proudem I ve tvaru kružnice, rovnostranného trojúhelníka, čtverce, obdélníka, šestiúhelníka.

$[\frac{\mu_0 I}{2r}, \quad \frac{18\mu_0 I}{4\pi a}, \quad \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}, \quad \frac{2\mu_0 I\sqrt{a^2+b^2}}{\pi ab}, \quad \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{\pi a}]$

4.8 Rovnostranný trojúhelník je sletován z homogenního drátu. Ke dvěma vrcholům trojúhelníka je přiloženo emn. Jaká bude magnetická indukce ve středu trojúhelníka?

[0]

4.9 Krychle je sletována ze stejných úseků drátů. Ke dvěma protilehlým vrcholům krychle připojíme emn. Jaká bude magnetická indukce ve středu krychle?

[0]

4.10 Čtvercovou smyčkou o straně 6 m teče proud 10 A. Určete magetickou indukci v bodě na ose smyčky ve výšce 4 m nad rovinou smyčky.

$[4,8.10^{-7}$ T]

4.11 Nekonečný drát je ohnut do půlkruhu podle obr. 4.48. Určete magnetickou indukci ve středu půlkruhu.

$[\frac{\mu_0(2+\pi)I}{4\pi r}]$

4.12 Uvnitř dlouhého vodiče kruhového průřezu poloměru 5 mm je vyvrtána válcová dutina o poloměru 0,5 mm, jejíž osa prochází rovnoběžně s osou vodiče ve vzdálenosti $a = 3$ mm (obr.4.49). Vodičem teče proud $I = 1$ A. Jaká bude magnetická indukce v dutině?

$[B = \frac{\mu_0 j\ a}{2} = 2,4.10^{-5}$ T] obr.4.48 obr.4.49

4.13 Elektrický proud I protéká stěnami duté kovové trubky o vnitřním a vnějším poloměru R_1, R_2. Jaký bude průběh magnetické indukce ve stěnách trubky?

$$\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\right]$$

4.14 Tři rovnoběžné přímé vodiče tvoří hrany trojbokého rovnostranného hranolu, jsou navzájem vzdáleny 10 cm a každým teče proud 20 A stejným směrem. Určete směr a velikost magnetické indukce na ose hranolu a na ose jedné ze stěn hranolu.

$[0, \quad 4,62.10^{-5}\ \mathrm{T}]$

4.15 Solenoid má délku 30 cm a průměr 6 cm. Na 1 cm je navinuto 5 závitů, drát má odpor 0,01 $\Omega.\mathrm{m}^{-1}$ a je připojen k $\mathcal{E} = 24$ V. Jaká bude magnetická indukce uvnitř solenoidu, tlak na boční stěnu a spotřebovávaný výkon?

$[5,2.10^{-2}\ \mathrm{T}, \quad 1\ 130\ \mathrm{Pa}, \quad 2\ \mathrm{kW}]$

4.16 Zemské magnetické pole na severním pólu má indukci o velikosti $B = 6,2.10^{-5}$ T a její vektor míří kolmo k zemi. Určete velikost magnetického dipólového momentu Země a proud, který by musel téci po rovníku, aby takový moment vyvolal.

$[8,1.10^{22}\ \mathrm{A.m}^2, \quad 6,5.10^8\ \mathrm{A}]$

4.17 Jakou silou se přitahují dva pólové nástavce magnetu o ploše 10 cm^2, je-li v mezeře intenzita magnetického pole $H = 4,37.10^6$ A.m^{-1} ?

[12 kN]

obr. 4.50

4.18 Malý podkovovitý magnet ze železa o obdélníkovém průřezu 1 x 0,5 cm unese železné závaží o hmotnosti 1,2 kg. Určete magnetickou indukci v blízkosti čelních ploch magnetu.

$[0,55 \text{ T}]$

4.19 Mějme dva malé kotoučky poloměru $r = 1$ cm a tloušťky $d = 0,5$ cm z magnetizované látky měrné hmotnosti $\rho = 8\,800$ kg.m^{-3}, jejichž vektory magnetizace o velikosti $M = 8,4.10^5$ A.m^{-1} jsou orientovány ve směru rotační osy. V jaké výšce h se bude vznášet jeden kotouček nad druhým, který je upevněn na podložce? Viz obr. 4.50.

[5,27 cm]

4.20 Elektron vletí do homogenního magnetického pole rychlostí $v = 5.10^6$ m.s^{-1} a začne se pohybovat po šroubovici o poloměru$r = 5$ cm a stoupání s=30 cm. Určete velikost magnetické indukce.

$$\left[\frac{mv}{e}\ \left(\frac{s^2}{4\pi^2} + r^2\right)^{-1/2} = 4,1.10^{-4} \text{ T}\right]$$

4.21 Deuteron se pohybuje po kružnici o poloměru 40 cm v magnetickém poli $B = 1,5$ T. Určete rychlost, energii a dobu oběhu deuteronu.

$[2,9.10^7 \text{ m.s}^{-1}, \quad 8,7 \text{ MeV}, \quad 8,6.10^{-8} \text{ s}]$