

# Kapitola 1

## Tomografie plazmatu na fúzních experimentech

Pojmem tomografie ( z řeckého  $\tau\acute{o}\mu\omicron\varsigma$  – část, řez a přípony  $\gamma\rho\alpha\phi\acute{\iota}\alpha$  – psaní) se zpravidla označuje soubor prostředků ke stanovení struktury objektu z jeho pozorovaných projekcí. Neznámá struktura objektu se zpravidla určuje v rovinných řezech, obecně ovšem platí, že tomografie může být zavedena pro libovolný počet dimenzí – tedy i tak, aby určila úplnou strukturu celého objektu. Pokud lze vlastnosti řezu popsat pomocí skalární analytické funkce  $g(\mathbf{r})$ , kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor, pak příslušným projekcím odpovídá skalární analytická funkce  $f(\mathbf{p})$ , ve které má vektor  $\mathbf{p}$  stejnou dimenzi jako vektor  $\mathbf{r}$ . Prostřednictvím vektoru  $\mathbf{p}$  se parametrizují všechny možné směry projekce v daném řezu, a to zpravidla tak, že jeho velikost  $p \equiv |\mathbf{p}|$  určuje nejkratší vzdálenost mezi rovinou projekce a počátkem, a jeho směr  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  je tečný k rovině projekce.<sup>2</sup> Výpočet projekcí  $f(\mathbf{p})$  z funkce  $g(\mathbf{r})$  je pak poměrně jednoduchý, je znám jako Radonova transformace a jde o integrály funkce  $g$  v rovinách projekcí:

$$f(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{r} g(\mathbf{r}) \delta(p - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) , \quad (1.1)$$

kde  $\delta$  je Diracova funkce. Obtížnější úlohu představuje inverzní Radonova transformace, tj. analytické určení funkce  $g(\mathbf{r})$  z funkce  $f(\mathbf{p})$ , viz například [Rad17], [Pik87], [Her09]. V nejobvyklejším případě řešení ve dvou dimenzích (2D) vychází inverzní Radonova transformace jako hlavní hodnota integrálu z

---

<sup>2</sup> Pojem rovina projekce je zde použit v obecném smyslu. V obvyklé dvojdímní (2D) tomografii se jedná o projekce podél přímek, zatímco v prostorech o čtyřech a více dimenzích se projekce získávají podél nadrovin.

derivace projekcí:

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} d\mathbf{n} \text{ v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial p} f(\mathbf{p}). \quad (1.2)$$

Již v tomto úplném analytickém řešení je patrný hlavní neduh tomografie: Inverzní Radonova transformace patří mezi takzvané špatně podmíněné úlohy (ill-conditioned problem). Špatně podmíněná úloha je blízkým příbuzným špatně postavené neboli nekorektní úlohy (ill-posed problem). Nekorektní úloha je taková úloha, která nespĺňuje alespoň jednu z podmínek korektní úlohy podle definice J. Hadamarda [Had02]. Podle této definice lze úlohu považovat za korektní, pokud

- existuje řešení,
- řešení je právě jedno,
- řešení se s parametry mění spojitě.

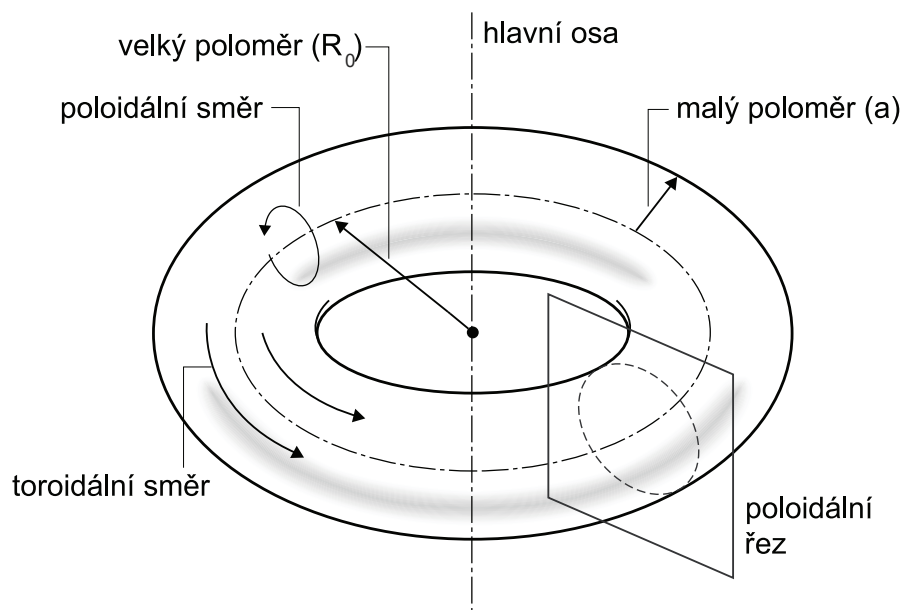
Špatně podmíněná úloha je korektní úloha, která je z hlediska výše uvedených podmínek velmi nestabilní. Z praktického hlediska zpracování fyzikálních dat vyžadují špatně podmíněné úlohy zvláštní pozornost ze dvou příčin: Za první, v rámci diskretizace analytické úlohy obvykle přestává platit podmínka existence právě jednoho řešení (připomeňme např. aliasing), a za druhé, i malé chyby v měření mohou při výpočtech vést k výše uvedené nestabilitě. Taková nestabilita může příslušné zpracování dat úplně znemožnit (například může vést k divergenci během iteračního výpočtu), nebo v lepším případě může zavinit velké chyby ve výsledku – tzv. artefakty.

Uživatel výpočetní metody přitom zpravidla očekává, že výsledkem zpracování dat bude věrohodný výstup v podobě právě jednoho řešení. Proto se obvykle z možných řešení volí takové, které je nějakým dobře definovaným způsobem nejpravděpodobnější a/nebo nejhladší. Nebezpečí artefaktů se pak snižuje zahrnutím co nejrozsáhlejšího souboru tzv. apriorních informací (mimo jiné okrajových podmínek) a také pečlivým testováním spolehlivosti zvolené metody řešení. Tu lze testovat nejlépe pomocí syntetických dat, přičemž možné nestability řešení v důsledku nepřesností v datech mohou být simulovány například metodou Monte Carlo [11]. Podrobněji se této tématice budeme věnovat v kapitole 3.

Z analytického řešení 1.2 také vyplývá nutnost znát projekce objektu  $f(\mathbf{p})$  úplně, tj. na všech vzdálenostech od počátku  $p$  i ve všech směrech  $\mathbf{n}$ , a to i pokud nás zajímá hodnota hledané funkce  $g(\mathbf{r})$  třeba jen v jediném bodě. Pro zajímavost, z obecného řešení v  $N$  dimenzích (viz např. [Pik87]) vyplývá, že

tato podmínka neplatí pro lichá  $N$ . Při lichém počtu dimenzí stačí změřit projekce neznámé funkce  $g(\mathbf{r})$  podél příslušných nadrovin pouze v libovolně malém okolí bodu, pro který je požadováno  $g(\mathbf{r})$  rekonstruovat. Nadále je ovšem nutné znát tyto projekce ve všech směrech (pro všechna  $\mathbf{n}$ ).

Výše diskutované obecné charakteristiky tomografické úlohy bezvýhradně platí i pro tomografii plazmatu. Ta přitom představuje z hlediska požadavků na diagnostiku fúzního plazmatu velmi atraktivní možnost zpracování dat. Kvůli extrémním podmínkám, které v plazmatu panují (a v zájmu jejich zachování) existuje jen minimum diagnostických metod, pomocí kterých lze měřit lokální hodnoty fyzikálních veličin přímo v plazmatu. Řadí se mezi ně zejména finančně náročné aktivní diagnostiky plazmatu<sup>3</sup> jako je Thomsonův rozptyl, mikrovlnná reflektometrie a interferometrie nebo měření interakce částicových svazků s plazmatem (tato metoda je již ovšem do určité míry invazivní), viz např. [Wes04, part 10]. Většina metod měření parametrů plazmatu v tokamacích ovšem patří mezi tzv. pasivní diagnostiky, které jsou založeny na detekci vnějších fyzikálních projevů plazmatu. Takové metody měření poskytují z hlediska prostorové závislosti zpravidla jen integrální hodnoty, tj. projekce. Je to právě tomografie, která na tomto základě umožňuje prostorovou lokalizaci procesů v plazmatu.



Obrázek 1.1: Základní pojmy toroidální geometrie.

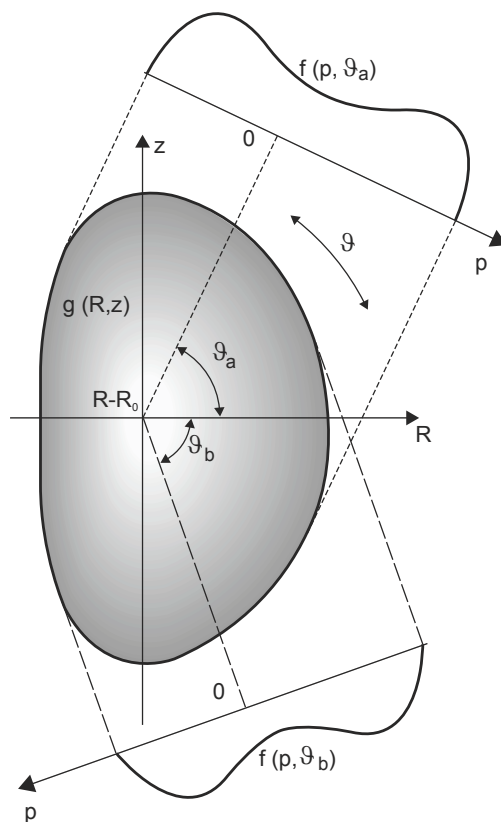
<sup>3</sup> Pojem „aktivní diagnostika“ se ve fyzice plazmatu užívá pro takové metody měření vlastností plazmatu, které jsou založené na interakci plazmatu s fyzikální sondou - například s laserovým světlem, s mikrovlnným zářením nebo se svazkem částic.

Předložený soubor prací se převážně soustřeďuje na praktickou implementaci a použití 2D tomografie při analýze záření z vysokoteplotního plazmatu tokamaků. Funkce  $g(\mathbf{r})$  je pak úměrná velikosti hustoty zdrojů záření v plošném řezu plazmatem, která má při absolutní kalibraci detektorů fyzikální rozměr  $W.m^{-2}$  (v praxi se též používá pojem emisivita plazmatu). Vzhledem k osové symetrii tokamaku se zpravidla hledá řez plazmatem vedený rovinou, ve které leží osa symetrie neboli hlavní osa tokamaku, viz obr. 1.1. Jak vyplývá z obrázku, takový řez se nazývá poloidálním řezem. Poloha v řezu, obecně stanovená vektorem  $\mathbf{r}$ , se pak zpravidla uvádí pomocí vzdálenosti od hlavní osy  $R$  horizontálně a vzdálenosti od osy plazmatu  $z$  vertikálně, viz obr. 1.2. Projekce plazmatu  $f(\mathbf{p})$  odpovídají integrálům emisivity podél přímk ležících v poloidálním řezu a procházejících plazmatem. Geometricky jsou tyto přímky definovány dvojrozměrným vektorem  $\mathbf{p}$ , který se nejčastěji určuje pomocí vzdálenosti přímky od počátku a úhlu  $\vartheta$ , který tato přímka svírá s vodorovným směrem, jak je znázorněno na obr. 1.2. V reálném provedení se projekce plazmatu v daném směru měří pomocí detektoru s velmi úzce kolimovaným zorným polem, pro které se v praxi vžil název **chorda**. Jak uvedeme v kapitole 3, v prvním přiblížení lze projekce  $f(p, \vartheta)$  ztotožnit s daty, které poskytují detektory měřící vyzařování plazmatu podél chord. V části 3.3 tohoto komentáře je nicméně představena i původní metoda, jak do výpočtu rychle a dostatečně přesně zahrnout tu skutečnost, že reálné chordy odpovídají zornému poli s nenulovým prostorovým úhlem a s oblastmi polostínu.

2D tomografie podle analytického vztahu pro inverzní Radonovu transformaci 1.2 apriori vyžaduje úplnou znalost projekcí ve dvou proměnných (zpravidla  $p$  a  $\vartheta$ , viz obrázek 1.2). Tento požadavek je ovšem v praxi fúzních experimentů prakticky nespílitelný. Obvykle je možné zajistit poměrně dobré měření úplné projekce plazmatu z několika pozorovacích směrů, které jsou až na výjimky dány polohou průzorů do vakuové komory (pro ty se vžilo označení **porty**). Rozhodně ale není k dispozici měření „ze všech směrů“ tj. bohatě pokrývající celý obvod plazmatu v souřadnici  $\vartheta$  tak, jako je to třeba obvyklé v lékařských aplikacích tomografie. Význam takového omezení je zejména dobře vidět na tzv. sinogramech, které graficky znázorňují hodnotu projekcí  $f$  v závislosti na  $p$  a na  $\vartheta$ , jak uvádí např. [Her09, str. 6]. Zatímco v optimálním případě by měl být měřen celý sinogram, ve fúzních experimentech se měří jen okolí několika bodů sinogramu, viz [1, obr. 1], [11, obr. 2] nebo [Ing08, obr. 10]. Z těchto obrázků je zřejmé, že vzorkování plochy sinogramu je i u poměrně kvalitních tomografických systémů fúzního výzkumu velmi řídké.

Omezení směrů pro měření projekcí je v kombinaci se špatnou podmíněností tomografické úlohy natolik tvrdé, že u některých odborníků fúzního výzkumu stále přežívá skepse ohledně možného využití tomografie jako ná-

stroje pro zpracování dat z diagnostiky vysokoteplotního plazmatu. Jedinou alternativou k lokalizaci procesů v plazmatu z měření jeho projekcí pak zůstává metoda fitování zadanými hodnotami (forward fitting), která spočívá ve srovnávání naměřených dat s fyzikálními předpoklady o vysokoteplotním plazmatu, viz např. [Zas04]. Tato metoda je ovšem silně závislá na kvalitě poměrně složitěho fyzikálního modelu, jehož parametrizace se navíc odvozuje z dat měřených celou řadou diagnostických metod. Věrohodnost fitování zadanými hodnotami je proto v konečném důsledku také předmětem diskusí, podobně jako věrohodnost tomografické rekonstrukce. Jde přitom o principiálně odlišné metody, takže se očividně nabízí možnost ověřování (validace) důležitých prostorových charakteristik pomocí aplikace obou přístupů. Příklad takového postupu uvedeme v části 3.2.



**Obrázek 1.2:** Základní geometrické parametry v tomografii plazmatu.

V kapitole 2 ukážeme, jak lze spolehlivě dosáhnout toho, aby tomografická rekonstrukce dobře fitovala měřená data, a zároveň aby její prostorové rozlišení odpovídalo prostorovému rozlišení v měřených projekcích. Výsledky pak jasně prokazují výjimečnou robustnost tomografických rekonstrukcí, které se staly

základem pro řadu užitečných výstupů v podobě nových informací o chování fúzního plazmatu, a to včetně kvantitativních charakteristik (například přímé vyčíslení rychlosti transportu paliva do plazmatu, viz [10]). Jinými slovy, tomografie plazmatu zlepšuje naše znalosti ohledně řady významných fyzikálních procesů, a to navzdory poměrně špatnému prostorovému rozlišení. Určitou satisfakcí je přitom v mnoha případech vynikající časové rozlišení příslušného měření projekcí (v závislosti na diagnostice až  $1 \mu s$ ).

Krátká zmínka bude v části 3.3 patřit i obvyklejší jednorozměrné tomografii, která je známa pod pojmem inverzní Abelova transformace neboli abelizace. Při abelizaci se předpokládá redukce funkční závislosti emisivity plazmatu na jedinou proměnnou, například na vzdálenost od osy plazmatu  $r = \sqrt{(R - R_0)^2 + z^2}$  za předpokladu osové symetrie rozložení zdrojů záření. K tomografické rekonstrukci pak stačí znalost závislosti projekcí také jen na jednom rozměru, například pouze na vzdálenosti chord od osy plazmatu  $p$ , úhel projekce  $\vartheta$  není třeba měnit. Přestože se metoda abelizace stále často uvádí jako vhodné přiblížení pro řešení tomografických úloh ve fyzice plazmatu, v kapitole 3 ukážeme, že s ohledem na výkon dnešních počítačů je její použití místo 2D tomografie zpravidla zbytečné a kontraproduktivní.

Závěrem první kapitoly pro upřesnění uvedme, že vedle výše popsané tomografie založené na vlastním záření objektu, známé jako *emisní tomografie*, je v lékařské a průmyslové praxi velmi často prováděna i tzv. absorpční tomografie [Her09]. Při absorpční tomografii je objekt zvnějšku prozařován nejčastěji rentgenovým zářením. V měřených projekcích jsou pak pozorovány stíny vnitřních struktur, které záření absorbují. V emisní tomografii představuje případná absorpce vlastního záření poměrně značnou komplikaci [Bel79]. Následující kapitoly se výhradně věnují emisní tomografii vysokoteplotního plazmatu při zanedbání absorpce díky optické tenkosti plazmatu.

# Kapitola 2

## Metody řešení

V této kapitole budou nejprve ve vší stručnosti představeny základní metody tomografické rekonstrukce, které se při analýze dat z tokamaků používají, a poté bude zvláštní pozornost věnována regularizaci ve čtvercové síti. Právě ta se totiž stala spolehlivým nástrojem našeho vlastního výzkumu. Tématika tomografie je v literatuře poměrně bohatě zdokumentována, viz např. [Her09], [Gra09], [Ben04]. Za pozornost stojí i monografie věnující se výpočetním metodám pro inverzní metody obecně [Vog02]. Ohledně aplikací tomografie ve fyzice plazmatu se nabízí ruská monografie [Pik87] a přímo ve vztahu k fúzním experimentům s magnetickým udržením doporučujeme přehledový článek [Ing08]. K přehledovým článkům jsme sami přispěli publikací [11] zaměřenou na rychlé tomografické metody a jejich perspektivní uplatnění při řízení experimentu.

Metody komerční tomografie a tomografie pro výzkum fyziky plazmatu se rozešly již zhruba před třiceti lety. Hlavním důvodem byl principiální rozdíl v prostorovém rozlišení projekcí: zatímco komerční systémy pracují prakticky se všesměrovým pozorováním projekcí objektu, v případě pozorování vysokoteplotního plazmatu je technicky možné získat projekce jen z několika směrů, data jsou „řídká“ (sparse data). Ve fyzice plazmatu se proto tomografická úloha většinou řeší jako nedourčená soustava rovnic, jak bude diskutováno níže.

Při všesměrové znalosti projekcí je možné založit metody počítačové tomografie přímo na numerickém vyjádření inverzní Radonovy transformace. Hlavní pozornost se při vývoji těchto algoritmů věnuje převážně úpravě vstupních dat, zejména metodám jejich shlazování a filtrování. Jednou z nejčastějších metod v standardní komerční tomografii je tzv. filtrovaná zpětná projekce (FBP, [Her09, ch.8, ch.10]), která využívá numericky dobře zvládnutou inverzní Fourierovu transformaci na filtrovaných spektrech dat (tj. na frekvenčně omezeném intervalu Fourierovy transformace projekcí). Lze ukázat, že vztah mezi Radonovou a Fourierovou transformací je poměrně přímočarý [Pik87]. Moderní komerční systémy navíc srovnávají pozorování s očekávanou podobou řezu a

tak iteračně dosahují mnohem lepšího rozlišení těch oblastí, které se nějakým způsobem liší od očekávání.

V oblasti výzkumu vysokoteplotního plazmatu je při neúplné znalosti projekcí pro tomografickou rekonstrukci vhodnější algebraický přístup, ve kterém se od počátku jak projekce, tak rekonstruovaný řez diskretizují. Jinými slovy, výsledná podoba řezu se stanovuje jako součet jistých vhodně zvolených báзовých funkcí:

$$g(\mathbf{r}) = \sum_j^{\infty} g_j b_j(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

a řešení tomografické rekonstrukce se hledá jako taková kombinace amplitud **konečného** počtu  $N$  báзовých funkcí, která je optimální z hlediska všech naměřených dat  $f_i$ :

$$f_i \doteq \sum_j^N T_{ij} g_j \quad i \in 1, \dots, M. \quad (2.2)$$

Matice  $T_{ij}$  s dimenzí  $M \times N$  se zpravidla nazývá „matice příspěvků“ (contribution matrix) nebo „geometrická matice“.

Není bez zajímavosti, že na tomto principu byl založen i jeden z úplně prvních matematických předpisů pro řešení tomografie v lékařských aplikacích, který je dnes znám jako Cormackova metoda. A.M. Cormack před 50 lety ukázal, že pokud se za báзовé funkce řezů zvolí Zernikovy polynomy, pak jim v projekcích jednoznačně odpovídají Čebyševovy polynomy druhého druhu [Cor63]. Jinými slovy, pokud měřené projekce aproximujeme do rozvoje Čebyševových polynomů druhého druhu, omezeného jen na  $N$  členů, pak je možné řez tělesa složit z  $N$  prvních členů rozvoje pomocí Zernikových polynomů, přičemž Cormackova metoda dává jednoznačný předpis pro vztah mezi amplitudami těchto rozvoje.

Na velmi podobném principu je založena i Fourierova-Besselova metoda [Wan91], která má navíc nezanedbatelnou výhodu v tom, že implicitně obsahuje požadavek poklesu rekonstruované hustoty zdrojů záření k nule vně hranice zářivého objektu. Cormackova a Fourierova-Besselova metoda krátce vévodily i metodám pro analýzu vysokoteplotního plazmatu. V dnešním výzkumu fúzního plazmatu je ovšem využití takových metod vzácné, protože mají tři poměrně závažné nevýhody:

1. Vzhledem ke tvaru báзовých funkcí a k omezení rozvoje se hodí především pro rekonstrukci objektů s kruhovým průřezem, zatímco dnešní plazma je většinou tvarované, viz kap. 3,

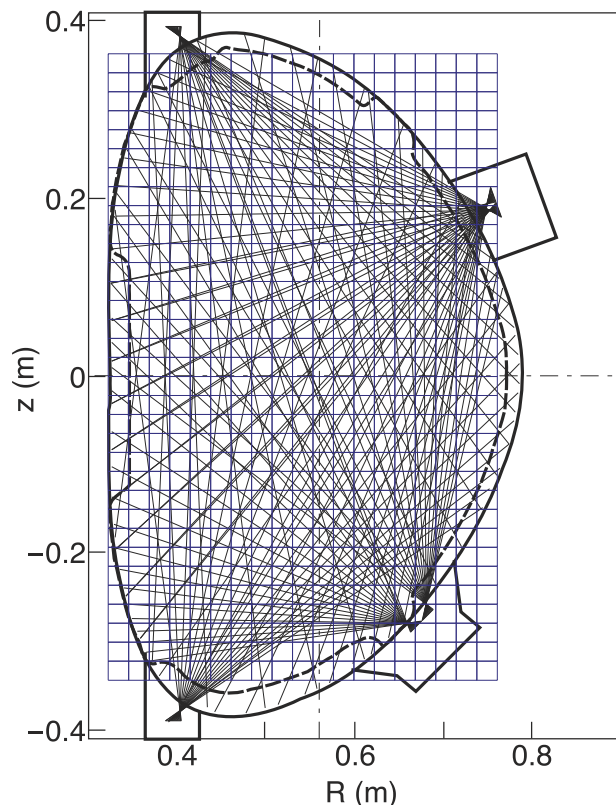


2. vzhledem k omezení rozvoje upřednostňují prostorově periodická řešení, čímž se do řešení vnáší apriorní informace, pro kterou často chybí fyzikální odůvodnění,
3. do těchto metod je obtížné či takřka nemožné implementovat jiné apriorní informace.

S ohledem na současné požadavky je výhodná tzv. **metoda pixelů**, ve které je báze tvořena čtvercovou sítí  $N$  buňek neboli pixelů. Ty zcela pokrývají plochu studovaného řezu, viz obr. 2.1. Jedna bazová funkce pak v nejjednodušším případě představuje nespojitou funkci, pro kterou platí:  $b_j = 1$  na ploše  $j$ -tého pixelu,  $b_j = 0$  jinde (tj. bázi je kvádr se čtvercovou podstavou a jednotkovou výškou). Právě takovou bazovou funkci používáme v níže popsané metodě regularizace s minimalizací Fisherovy informace. V některých publikacích se též používá spojitá bilineární bazová funkce ve tvaru jehlanu:  $b_j = 1 - \frac{|x|+|y|}{d}$  pro  $b_j > 0$ , jinde  $b_j = 0$ , kde  $x, y$  jsou vzdálenosti od středu pixelu a  $d$  je šířka strany pixelu (tj. maximum jehlanu je ve středu pixelu, zatímco hranice jehlanu prochází středem sousedních pixelů). Použití spojitě bazové funkce již „zadními vrátky“ zavádí do tomografie shlazování jako klíčové kritérium pro výběr řešení a zejména znamená, že výsledná funkce  $g(r)$  bude také spojitá, což je často žádané třeba jen z vizuálního hlediska. Během vývoje tomografie ovšem byly aplikovány i jiné možné tvary bazových funkcí [Ing08, kap.4E], [Ing00]. Extrémním případem je pak tvarování pixelů podle magnetického pole [17], [Zol93]. To podle naší zkušenosti zavádí příliš tvrdou apriorní informaci – předpokládá se totiž, že rekonstrukce magnetického pole je přesně známa – a vedle toho výrazně zpomaluje výpočet. Matice příspěvků  $T_{ij}$  podle 2.2 se totiž v takovém případě musí průběžně přepočítávat podle vývoje magnetického pole.

V případě použití výše uvedené nespojitě bazové funkce je podle rovnice 2.1 možné i přímo graficky ztotožnit hledaný řez  $g(\mathbf{r})$  se zobrazením všech hodnot  $g_j$  v příslušných pixelech. Prakticky tak obraz řezu vzniká složením konstantních hodnot v konečných elementech podobně, jako třeba na obrazovce. Z uživatelského hlediska je takové zobrazení výhodné tím, že je z něj přímo patrné prostorové rozlišení použité čtvercové sítě, viz například [11, obr. 5]. Proto se zpravidla při naší vlastní práci držíme právě této praxe. Někdy je z hlediska zobrazení vybraného jevu (nebo při použití vrstevnicového tisku) výhodnější hodnoty funkce  $g$  mezi pixely interpolovat. Výsledný řez pak působí dojemem spojitě rozdělení, podobně jako při použití bilineárních bazových funkcí.

V metodě pixelů má názornou reprezentaci i matice příspěvků  $T_{ij}$  podle rovnice 2.2. V bázi tvořené sousedícími jednotkovými skokovými funkcemi vyjadřuje každý člen matice  $T_{ij}$  příspěvek emisivity  $j$ -tého pixelu do celkového



**Obrázek 2.1:** Příklad rozdělení řezu plazmatem při aplikaci metody pixelů. Zobrazené chordy odpovídají uspořádání detektorů AXUV na tokamaku COMPASS (viz část 3.5).

signálu měřeného podél  $i$ -té chordy diagnostického systému. V prvním přiblížení lze pozorovaný signál ztotožnit s projekcí podél přímky, a pak člen matice  $T_{ij}$  odpovídá délce průsečíku  $i$ -té přímky s  $j$ -tým pixelem. Matice  $T_{ij}$  má tím pádem i jednoduché grafické vyjádření, jak je demonstrováno v kapitole 3.3 na obrázku 3.3. Rovnici 2.2 můžeme nyní přepsat přímo jako soustavu  $M$  lineárních rovnic takto:

$$f_i = \sum_j^N T_{ij} g_j + \xi_i, \quad i \in 1, \dots, L, \quad (2.3)$$

kde  $\xi_i$  zahrnuje všechny rozdíly mezi fyzikálním pozorováním na jedné straně a projekcemi zrekonstruovaného řezu plazmatem na straně druhé. Pro tyto rozdíly se vžil pojem **rezidua**. Rezidua nevznikají jen v důsledku diskretizace úlohy, ale primárně v důsledku existence systematických a nahodilých chyb měření. Bez uvážení těchto chyb by soustava rovnic buď neměla žádné řešení,

nebo by řešení bylo velmi zatížené artefakty (bylo by „přefitované“). To je celkem očekávaným odrazem skutečnosti, že jde o algebraický přepis špatně podmíněné analytické úlohy.

Výše uvedený zápis soustavy rovnic 2.3 je bez dalších úprav pro analýzu dat nepoužitelný, protože měřené (známé) hodnoty projekcí  $f_i$  jsou vlevo, zatímco neznámé hodnoty hustoty zdrojů záření  $g_j$  a reziduí  $\xi_i$  jsou vpravo. Tato soustava rovnic navíc v praxi téměř vždy představuje nedostatečně určenou úlohu, ve které počet pixelů výrazně převyšuje počet měření,  $M < N$ , viz obr. 2.1. Je tomu tak proto, že se lineární rozměr jednoho pixelu zpravidla odvozuje od lineárního prostorového rozlišení jednoho svazku chord (například jedné kamery). Celkový počet pixelů je tím pádem úměrný druhé mocnině počtu chord v jednom svazku. Celkový počet svazků je ovšem obvykle mnohem menší, nežli počet chord v jednom svazku (jedná se o důsledek špatného úhlového rozlišení, které bylo diskutované v kap. 1), a proto je zpravidla podstatně více pixelů než chord.

Úloha 2.3 má díky zavedení neznámých reziduí vždy nekonečné množství řešení. V současné praxi se zpravidla hledá takové řešení, ve kterém jsou výsledná rezidua  $\xi_i$  v souladu s očekávanými chybami měření<sup>4</sup> v jednotlivých detektorech  $\sigma_i$ . Za předpokladu normálního rozdělení chyb měření lze k nalezení optimálního řešení vycházet z testu dobré shody, který je ve statistice znám jako Pearsonův  $\chi^2$  test:

$$\chi^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_i^N \frac{\xi_i^2}{\sigma_i^2} \rightarrow 1. \quad (2.4)$$

Řešení s  $\chi^2 < 1$  by bylo tzv. přefitované (měření nedává dostatečně spolehlivá data pro tak přesný výsledek), pokud by naopak výsledek odpovídal  $\chi^2 > 1$ , bylo by řešení příliš vzdálené od hodnot měření (jinými slovy, během výpočtu by došlo ke ztrátě informace). Stojí za povšimnutí, že v rámci výpočtu 2.4 může být užitečné zaměřit se i na jednotlivé členy součtu, tj. na hodnoty  $\xi_i^2/\sigma_i^2$ . Pokud některý člen systematicky (např. během řady různých rekonstrukcí) vykazuje hodnoty výrazně odlišné od jedničky, pak jde o jasnou indikaci systematické chyby buď v kalibraci daného detektoru, nebo v hodnotách matice příspěvků pro daný detektor (tj. v geometrickém uspořádání).

Dnes je dobře rozvinuta celá řada numerických metod, pomocí kterých je možné nalézt vhodné řešení pro rovnici 2.3 při splnění podmínky 2.4, a to i s možností uvážení dalších apriorních informací (například okrajových podmínek). Pro podrobnou informaci o metodách řešení vztahu 2.3 doporučujeme

<sup>4</sup> Přesněji řečeno, v souladu s očekávanými směrodatnými odchylkami náhodných chyb měření.

přehledový článek [Ing08, kap. IVB] a reference v něm uvedené. Stručná klasifikace těchto metod je v příloženém článku [11, str. 736]. Za všechny jmenujme alespoň metodu maximální entropie [Ert96], metodu maximální věrohodnosti (Maximum Likelihood Method, MLM) [Cra08], metodu Lagrangeových multiplikátorů [Ing98], SVD dekompozici [Han92] a Tichonovovu regularizaci [14]. Metodou, která se poněkud vymyká klasifikaci, která je ale perspektivní z hlediska velmi vysoké rychlosti rekonstrukce, je metoda učení na bázi neuronových sítí [Tho08], [Ron10]. Nevýhodou učících se metod je ovšem jejich velmi chybné a poměrně nepředvídatelné chování při extrapolaci dat mimo „naučenou“ oblast.

V našem vlastním výzkumu využíváme metody vycházející z Tichonovovy regularizace [14], [Ant96], a to vzhledem k jejich velké výkonnosti (tj. rychlému výpočtu) a robustnosti (algoritmus neselhává ani v neobvyklých situacích). Pojem *regularizace* se obecně používá pro výpočetní metody určené k řešení špatně podmíněných a nekorektních úloh. Hlavním nástrojem regularizace je nejčastěji sankce za složitost, tj. takový předpis, který v rámci podmínky  $\chi^2 \rightarrow 1$  najde jednoduché (zpravidla hladké) řešení. Jednotlivé metody regularizace se mezi sebou liší jak definicí této „jednoduchosti“, tak předpisem pro řešení úlohy. Dnes zřejmě nejrozšířenější metodou regularizace je Tichonovova regularizace, známá též jako hřebenová regrese (ridge regression). Ta nabízí v případě tomografické úlohy přímé řešení rovnice 2.3 ve formě jejího explicitního obrácení:

$$g_j = \sum_i^L M_{ji} f_i, \quad (2.5)$$

kde

$$M_{ji} = \sum_k^L \left( \sum_l^N T_{kl}^T T_{lj} + \lambda \sum_m^L B_{km}^T B_{mj} \right)^{-1} T_{ki}^T, \quad (2.6)$$

kde exponent  $T$  značí transponovanou a  $-1$  inverzní matici. Lze ukázat, že toto řešení odpovídá minimu součtu  $\|\xi\|^2 + \|\frac{1}{2}\lambda \mathbf{B}g\|^2$ , kde  $\lambda$  je tzv. regularizační parametr. Odvození lze nalézt například v [Ant96]. Matice  $\mathbf{B}$  je tzv. regularizační matice, jejíž členy odpovídají zvolené sankci za složitost, tj. apriorní představě o výsledku:

- Pokud je  $\mathbf{B}$  jednotková matice, pak regularizace hledá řešení s nejmenším součtem  $\sum_j^N g_j^2$ ,
- pokud  $\mathbf{B}$  představuje numerický operátor první derivace na ploše, pak je minimalizován průměrný gradient rekonstruovaného řezu,

- pokud  $\mathbf{B}$  představuje operátor druhé derivace na ploše, pak je minimalizována průměrná křivost funkce  $g(\mathbf{r})$  (právě takové řešení se zpravidla označuje jako „nejhladší“),
- prostřednictvím  $\mathbf{B}$  se mohou zavést i další apriorní informace, například numerické filtry atp.

Regularizační parametr  $\lambda$  stanovuje relativní váhu regularizační matice ve vztahu k reziduím  $\xi_i$  a jeho hodnota je v moderních algoritmech zásadně odvozována iteračně z podmínky  $\chi^2 \rightarrow 1$  podle vztahu 2.4. Za zmínku stojí i skutečnost, že tvar rovnice 2.6 umožňuje s výhodnou použít tzv. levé maticové dělení  $\mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} \cong \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Y}$ , které výrazně zjednodušuje numerické řešení této jinak poměrně obsáhlé algebraické úlohy [Sch01, kap. 3].

Naše zkušenost s používáním Tichonovy regularizace ukazuje, že jde nejen o velmi efektivní a transparentní metodu výpočtu špatně podmíněných a nedostatečně určených soustav lineárních rovnic, ale také o metodu velmi robustní, která stabilně poskytuje důvěryhodné výsledky i při velkých chybách dat. Do Tichonovy regularizace lze navíc poměrně snadno implementovat většinu užitečných okrajových podmínek a dalších apriorních informací. V aplikacích Tichonovy regularizace pro tomografické rekonstrukce fúzního plazmatu přitom nejčastěji používáme složitější formu apriorní podmínky, a sice takzvanou *regularizaci s minimalizací Fisherovy informace* (Minimum Fisher Regularisation). Minimalizace Fisherovy informace byla do Tichonovy regularizace poprvé uvedena v článku [Ant96], kde byla též navržena základní podoba příslušného algoritmu, a nakonec i jeho název a označení zkratkou MFR.

Fisherova informace je pro funkci dvou proměnných  $g(x_1, x_2)$  definována vztahem

$$I_F = \int \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_i} \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_j} \frac{1}{g(x_1, x_2)} \right| dx_1 dx_2 . \quad (2.7)$$

Lze ukázat, že řešení rovnice 2.3 s minimální hodnotou  $I_F$  podle 2.7 představuje – ve vztahu k ostatním řešením splňujícím podmínku 2.4 – řešení s největším rozptylem (variancí) funkce  $g(x_1, x_2)$ , viz [Fri88]. Řečeno jednoduše, zahrnutí minimalizace Fisherovy informace zaručuje, že do řešení není vnesena žádná skrytá informace, žádná privilegovaná funkční závislost řezu na souřadnicích. Právě pro tuto svoji charakteristiku je minimální Fisherova informace široce používána zejména v teorii odhadu [van07]. Z hlediska praktického použití při tomografii plazmatu rovnice 2.7 zajišťuje, že oblasti s nízkou amplitudou  $g(x, y)$  (v našem případě s nízkou emisivitou plazmatu) jsou podstatně více shlazovány než oblasti s vysokou amplitudou  $g(x, y)$ . Takové chování je

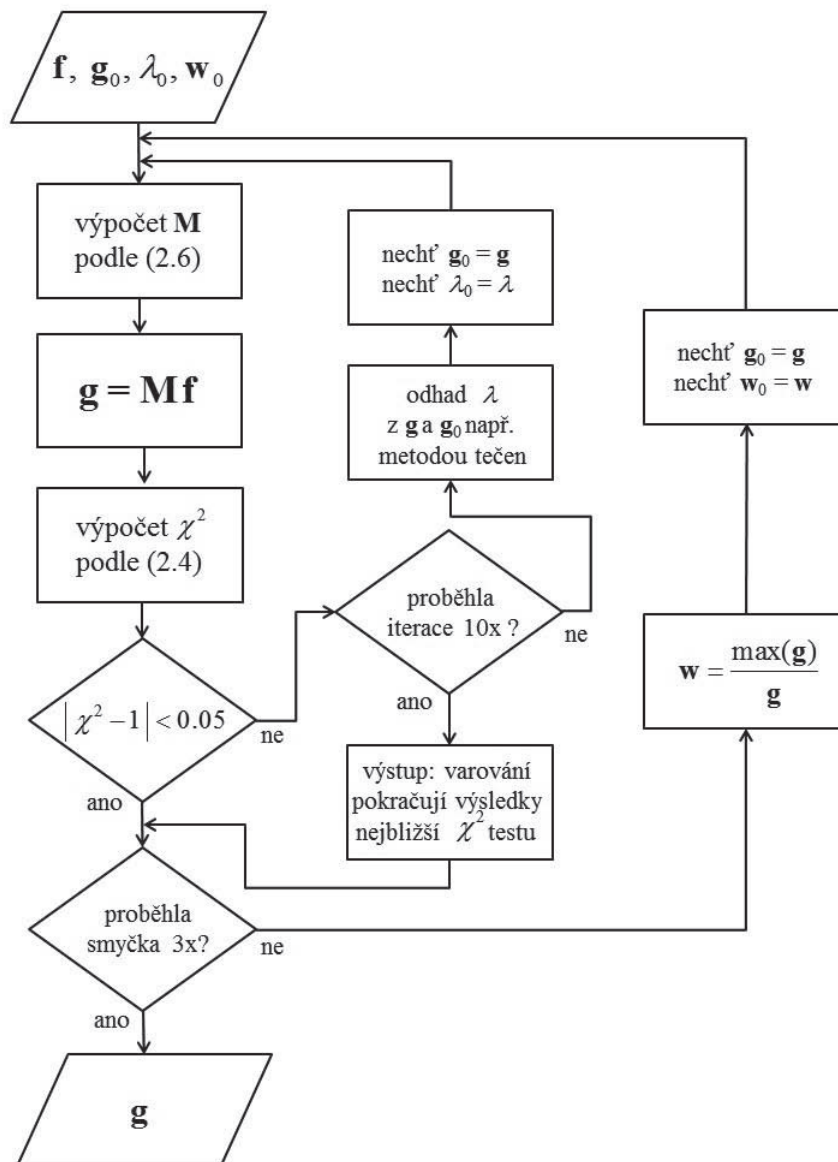
vítáno, protože v praxi spíše požadujeme lepší znalost chování plazmatu v oblastech intenzivního vyzařování.

Požadavek minimalizace Fisherovy informace podle 2.7 bohužel představuje nelineární podmínku, kterou nelze přímo diskretizovat do lineární matice regularizace  $\mathbf{B}$ . Proto se Fisherova informace implementuje iteračně tak, že matice  $\mathbf{B}$  odpovídá operátoru první derivace, přičemž se do rovnice 2.6 vkládá váhový člen  $w_j = 1/g_j$ . Za  $g_j$  se dosazuje řešení z předcházejícího iteračního kroku. Jako výchozí hodnota  $g_{j0}$  se používá buď předpokládaný, nebo konstantní průběh emisivity plazmatu.

Algoritmus MFR tedy celkově obsahuje dva vnořené iterační cykly, vnitřní ke stanovení regularizačního parametru  $\lambda$  vyhovujícího podmínce 2.4, a vnější ke stanovení váhových koeficientů  $\mathbf{w}$  tak, aby byla splněna podmínka minimální Fisherovy informace 2.7. Vývojový diagram algoritmu je na obrázku 2.2. Již původní článek [Ant96] uvádí, že vnější cyklus konverguje velmi rychle: Po dvou nebo po třech iteracích je dosažen výsledek, který se dále v rámci experimentálních chyb nemění. Naše zkušenost takové tvrzení zcela potvrzuje. A tak přesto, že výpočet obsahuje dva vnořené cykly, většinou stačí k jedné tomografické rekonstrukci zhruba 15-20 výpočtů rovnic 2.4, 2.5 a 2.6. To je ve srovnání s jinými tomografickými metodami poměrně málo, a proto se MFR řadí mezi nejrychlejší výpočetní metody tomografie pro fúzní výzkum [Cra09], blíže viz kapitola 3.

Závěrem této kapitoly lze shrnout, že zatímco při dostatečně rovnoměrném a bohatém vzorkování projekcí v obou souřadnicích  $p$  i  $\vartheta$  je možné se spolehnout na shlazování (či filtrování) dat, v případě nedostatečných znalostí projekcí se provádí shlazování (příp. filtrování) v rámci hledání výsledné tomografické rekonstrukce. Pokud se dodržují pravidla zabráňující přefitování či naopak ztrátě informace, lze tomografickou rekonstrukci řešit celou řadou metod, které se více či méně spolehlivě dopracují ke statisticky přijatelnému výsledku. Volba metody je pak dána apriorními preferencemi (objektivními, ale také subjektivními), náročností na robustnost metody (zejména vůči náhodným i skrytým systematickým chybám) a v neposlední řadě nároky na rychlost zpracování tomografické rekonstrukce. Samotnou kvalitu rekonstrukce, tj. její věrohodnost a prostorové rozlišení, lze ovšem výrazně ovlivnit v zásadě jen cestou zdokonalení příslušné diagnostiky. V tomto směru má význam zejména

- zvětšení počtu měřených projekcí, a to především v úhlu  $\vartheta$ ,
- snížení chyb, a to zvláště pečlivým potlačením systematických chyb, například pomocí co nejpřesnějšího proměření geometrického uspořádání detektorů a jejich relativní kalibrace.



**Obrázek 2.2:** Vývojový diagram algoritmu MFR. Uvedené číselné hodnoty odpovídají naší obvyklé praxi, v principu je ale možné je změnit.